Lokale Positivität der polyharmonischen Greenschen Funktion

Christian Köckritz * , MA 03

19. April 2007

Zusammenfassung

Im Allgemeinen ist die Greensche Funktion $G_{(-\Delta)^m,\Omega}$ für den polyharmonischen Operator $(-\Delta)^m$ unter Dirichlet-Randbedingungen im glatten beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nicht positiv. In [1] wurden, aufbauend auf einer Idee von Nehari, für den Fall $n > 2m$ lokale Positivitätsresultate für $G_{(-\Delta)^m,\Omega}$ gezeigt. Diese werden in der vorliegenden Studienarbeit auf den Fall $n = 2m$ ausgedehnt.

*Christian.Koeckritz@student.uni-magdeburg.de

1 Der polyharmonische Operator

Im folgenden soll das polyharmonische Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = f & \text{in } \Omega, \\ u = |\nabla u| = \ldots = |\nabla^{m-1} u| = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

wobei f und Ω genügend glatt sind, betrachtet werden.

Die Lösung von (1) ist gegeben durch

$$u(x) = \int_\Omega G_\Omega(x,y) f(y)\, dy,$$

mit der zu (1) gehörigen Greenschen Funktion

$$G_\Omega := G_{(-\Delta)^m,\Omega}.$$

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $B_1 := B_1(0) \subset \Omega \subset B_R := B_R(0)$.
Weiterhin sei für geeignetes $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{G}_\Omega f(x) := \int_\Omega G_\Omega(x,y) f(y)\, dy,$$

so dass

$$u(x) = \mathcal{G}_\Omega f(x)$$

die Lösung des Dirchlet-Problem (1) ist.
Die Greensche Funktion kann in die Fundamental Lösung und einen regulären Teil zerlegt werden

$$G_{(-\Delta)^m,\Omega}(x,y) = c_{m,n} F_{m,n}(\,|x-y|\,) + H_{(-\Delta)^m,\Omega}(x,y),$$

wobei

$$F_{m,n}(\zeta) := \begin{cases} c_{m,n} \zeta^{2m-n} & n > 2m \\ -2c_{m,n} \log \zeta & n = 2m \end{cases}$$

$$H_\Omega := H_{(-\Delta)^m,\Omega} \in C^{2m,\alpha}\left(\Omega \times \bar{\Omega}\right)$$

und $c_{m,n} > 0$ eine geeignete positive Konstante ist.
Weiter sei

$$\mathcal{H}_\Omega f(x) := \int_\Omega H_\Omega(x,y) f(y)\, dy.$$

Satz 1. *Seien f, g glatt und ihre Träger in B_1 enthalten.*
Dann gilt:

a) $m = 2k$

$$\begin{aligned} 4\int_\Omega \left(\Delta^k \mathcal{G}_\Omega f\right)\left(\Delta^k \mathcal{G}_\Omega g\right)\, dx \geq & \int_{B_1} \left\{ f\left(\mathcal{H}_{B_1} f - \mathcal{H}_{B_R} f\right) + g\left(\mathcal{H}_{B_1} g - \mathcal{H}_{B_R} g\right) \right\} dx \\ & + \int_{B_1} \left\{ f\left(\mathcal{G}_{B_1} g + \mathcal{G}_{B_R} g\right) + g\left(\mathcal{G}_{B_1} f + \mathcal{G}_{B_R} f\right) \right\} dx \end{aligned} \tag{2}$$

$b)\qquad m = 2k+1$

$$4\int_\Omega \left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f\right)\left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)\,dx \geq \int_{B_1}\Big\{f\left(\mathcal{H}_{B_1}f-\mathcal{H}_{B_R}f\right)+g\left(\mathcal{H}_{B_1}g-\mathcal{H}_{B_R}g\right)\Big\}\,dx \\ +\int_{B_1}\Big\{f\left(\mathcal{G}_{B_1}g+\mathcal{G}_{B_R}g\right)+g\left(\mathcal{G}_{B_1}f+\mathcal{G}_{B_R}f\right)\Big\}\,dx \tag{3}$$

Beweis: Wir betrachten die quadratische Form

$$\mathbb{R}^2 \ni (\beta,\gamma)\mapsto \int_\Omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx$$

bzw.

$$\mathbb{R}^2 \ni (\beta,\gamma)\mapsto \int_\Omega\left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx$$

und zeigen zunächst, dass diese im Gebiet Ω monoton steigend ist. Um dies nachzuweisen, betrachten wir $B_1(0)\subset\omega\subset\Omega$. Dies liefert:

zu $a)$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2dx-\int_\omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2\,dx\\
&=\int_\Omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx+\int_\omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2\,dx\\
&\quad-2\int_\omega\left(\beta\mathcal{G}_\omega f+\gamma\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta\Delta^{2k}\mathcal{G}_\omega f+\gamma\Delta^{2k}\mathcal{G}_\omega g\right)\,dx\\
&=\int_\Omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx+\int_\omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2\,dx\\
&\quad-2\int_\omega\left(\beta\mathcal{G}_\omega f+\gamma\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta\Delta^{m}\mathcal{G}_\omega f+\gamma\Delta^{m}\mathcal{G}_\omega g\right)\,dx\\
&=\int_\Omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx+\int_\omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2\,dx\\
&\quad-2\int_\omega\left(\beta\mathcal{G}_\omega f+\gamma\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta\left(-\Delta\right)^m\mathcal{G}_\omega f+\gamma\left(-\Delta\right)^m\mathcal{G}_\omega g\right)\,dx\\
&=\int_\Omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx+\int_\omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2\,dx\\
&\quad-2\int_\omega\left(\beta\mathcal{G}_\omega f+\gamma\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta f+\gamma g\right)\,dx\\
&=\int_\Omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx+\int_\omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2\,dx\\
&\quad-2\int_\omega\left(\beta\mathcal{G}_\omega f+\gamma\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta\left(-\Delta\right)^m\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\left(-\Delta\right)^m\mathcal{G}_\Omega g\right)\,dx\\
&=\int_\Omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx+\int_\omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2\,dx\\
&\quad-2\int_\omega\left(\beta\mathcal{G}_\omega f+\gamma\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta\Delta^{m}\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\Delta^{m}\mathcal{G}_\Omega g\right)\,dx\\
&=\int_\Omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx+\int_\omega\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f+\gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2\,dx\\
&\quad-2\int_\omega\left(\beta\mathcal{G}_\omega f+\gamma\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta\Delta^{2k}\mathcal{G}_\Omega f+\gamma\Delta^{2k}\mathcal{G}_\Omega g\right)\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx + \int_\omega \left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2 dx \\
&\quad - 2\int_\omega \left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx + \int_\omega \left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2 dx \\
&\quad + \int_\omega \left\{\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right) - \left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)\right\}^2 dx - \int_\omega \left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx \\
&\quad - \int_\omega \left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2 dx \\
&= \int_\Omega \left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx - \int_\omega \left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx \\
&\quad + \int_\omega \left\{\left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right) - \left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)\right\}^2 dx \\
&= \int_{\Omega\setminus\omega} \left(\beta\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx + \int_\omega \left\{\beta\left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f - \Delta^k\mathcal{G}_\omega f\right) + \gamma\left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g - \Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)\right\}^2 dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

zu $b)$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx - \int_\omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2 dx \\
&= \int_\Omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx + \int_\omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2 dx \\
&\quad + 2\int_\omega \left(\beta\mathcal{G}_\omega f + \gamma\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta\Delta^{2k+1}\mathcal{G}_\omega f + \gamma\Delta^{2k+1}\mathcal{G}_\omega g\right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx + \int_\omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2 dx \\
&\quad - 2\int_\omega \left(\beta\mathcal{G}_\omega f + \gamma\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta\left(-\Delta\right)^m\mathcal{G}_\omega f + \gamma\left(-\Delta\right)^m\mathcal{G}_\omega g\right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx + \int_\omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2 dx \\
&\quad - 2\int_\omega \left(\beta\mathcal{G}_\omega f + \gamma\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta f + \gamma g\right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx + \int_\omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2 dx \\
&\quad - 2\int_\omega \left(\beta\mathcal{G}_\omega f + \gamma\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta\left(-\Delta\right)^m\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\left(-\Delta\right)^m\mathcal{G}_\Omega g\right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx + \int_\omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2 dx \\
&\quad + 2\int_\omega \left(\beta\mathcal{G}_\omega f + \gamma\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta\Delta^{2k+1}\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\Delta^{2k+1}\mathcal{G}_\Omega g\right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx + \int_\omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2 dx \\
&\quad - 2\int_\omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)\left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right) dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx + \int_\omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2\,dx\\
&\quad + \int_\omega \left\{\left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right) - \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)\right\}^2 dx\\
&\quad - \int_\omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)^2\,dx - \int_\omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx\\
&= \int_\Omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx - \int_\omega \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx\\
&\quad + \int_\omega \left\{\left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right) - \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)\right\}^2 dx\\
&= \int_{\Omega\setminus\omega} \left(\beta\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \gamma\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2\,dx\\
&\quad + \int_\omega \left\{\beta\left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f - \nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega f\right) + \gamma\left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g - \nabla\Delta^k\mathcal{G}_\omega g\right)\right\}^2 dx\\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Wir benutzen nun diese Erkenntnis, um sie auf $B_1 \subset \Omega$ mit $\beta = \gamma = 1$ anzuwenden, wobei wir $\omega \to B_1$ und $\Omega \to \Omega$ setzen.

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx\\
&\geq \int_{B_1} \left(\Delta^k\mathcal{G}_{B_1} f + \Delta^k\mathcal{G}_{B_1} g\right)^2 dx\\
&\quad = \int_{B_1} \left(\Delta^k\mathcal{G}_{B_1} f + \Delta^k\mathcal{G}_{B_1} g\right)\left(\Delta^k\mathcal{G}_{B_1} f + \Delta^k\mathcal{G}_{B_1} g\right) dx\\
&\quad = \int_{B_1} \Delta^k\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\,\Delta^k\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\,dx\\
&\quad = (-1)^{2k}\int_{B_1} \left(\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right)\left(\Delta^{2k}\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right) dx\\
&\quad = \int_{B_1} \left(\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right)(f+g)\,dx = \int_{B_1} (f+g)\left(\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right) dx
\end{aligned}
\tag{4}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx\\
&\geq \int_{B_1} \left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_{B_1} f + \nabla\Delta^k\mathcal{G}_{B_1} g\right)^2 dx\\
&\quad = \int_{B_1} \left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_{B_1} f + \nabla\Delta^k\mathcal{G}_{B_1} g\right)\left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_{B_1} f + \nabla\Delta^k\mathcal{G}_{B_1} g\right) dx\\
&\quad = \int_{B_1} \left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right)\left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right) dx\\
&\quad = (-1)^{2k+1}\int_{B_1} \left(\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right)\left(\Delta^{2k+1}\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right) dx\\
&\quad = \int_{B_1} \left(\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right)\left((-\Delta)^m\,\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right) dx\\
&\quad = \int_{B_1} \left(\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right)(f+g)\,dx = \int_{B_1} (f+g)\left(\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right) dx.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Des Weiteren betrachten wir $\Omega \subset B_R$ mit $\beta = -\gamma = 1$, wobei wir nun $\omega \to \Omega$ und $\Omega \to B_R$ setzen.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\Delta^k \mathcal{G}_\Omega f - \Delta^k \mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx \\
&\leq \int_{B_R} \left(\Delta^k \mathcal{G}_{B_R} f - \Delta^k \mathcal{G}_{B_R} g\right)^2 dx \\
&\quad = \int_{B_R} \left(\Delta^k \mathcal{G}_{B_R} f - \Delta^k \mathcal{G}_{B_R} g\right) \left(\Delta^k \mathcal{G}_{B_R} f - \Delta^k \mathcal{G}_{B_R} g\right) dx \\
&\quad = \int_{B_R} \Delta^k \mathcal{G}_{B_R} (f-g) \, \Delta^k \mathcal{G}_{B_R} (f-g) \, dx \\
&\quad = (-1)^{2k} \int_{B_R} \left(\mathcal{G}_{B_1} (f-g)\right) \left(\Delta^{2k} \mathcal{G}_{B_R} (f-g)\right) dx \\
&\quad = \int_{B_R} \left(\mathcal{G}_{B_R} (f-g)\right) (f-g) \, dx \\
&\quad = \int_{B_1} (f-g) \left(\mathcal{G}_{B_R} (f-g)\right) dx \qquad \text{da } \operatorname{supp} f \subset B_1, \ \operatorname{supp} g \subset B_1
\end{aligned} \tag{6}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\nabla\Delta^k \mathcal{G}_\Omega f - \nabla\Delta^k \mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx \\
&\leq \int_{B_R} \left(\nabla\Delta^k \mathcal{G}_{B_R} f - \nabla\Delta^k \mathcal{G}_{B_R} g\right)^2 dx \\
&\quad = \int_{B_R} \left(\nabla\Delta^k \mathcal{G}_{B_R} f - \nabla\Delta^k \mathcal{G}_{B_R} g\right) \left(\nabla\Delta^k \mathcal{G}_{B_R} f - \nabla\Delta^k \mathcal{G}_{B_R} g\right) dx \\
&\quad = \int_{B_R} \left(\nabla\Delta^k \mathcal{G}_{B_R} (f-g)\right) \left(\nabla\Delta^k \mathcal{G}_{B_R} (f-g)\right) dx \\
&\quad = (-1)^{2k+1} \int_{B_R} \left(\mathcal{G}_{B_R} (f-g)\right) \left(\Delta^{2k+1} \mathcal{G}_{B_R} (f-g)\right) dx \\
&\quad = \int_{B_R} \left(\mathcal{G}_{B_R} (f-g)\right) \left((-\Delta)^m \mathcal{G}_{B_R} (f-g)\right) dx \\
&\quad = \int_{B_R} \left(\mathcal{G}_{B_R} (f-g)\right) (f-g) \, dx \\
&\quad = \int_{B_R} (f-g) \left(\mathcal{G}_{B_R} (f-g)\right) dx \qquad \text{da } \operatorname{supp} f \subset B_1, \ \operatorname{supp} g \subset B_1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Betrachten wir nun die Differenzen $(4) - (6)$ und $(5) - (7)$, so gelangen wir zu folgenen Ungleichungen:

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_\Omega \left(\Delta^k \mathcal{G}_\Omega f + \Delta^k \mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx & & \displaystyle\int_{B_1} (f+g) \left(\mathcal{G}_{B_1} (f+g)\right) dx \\
 & \geq & \\
\displaystyle -\int_\Omega \left(\Delta^k \mathcal{G}_\Omega f - \Delta^k \mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx & & \displaystyle -\int_{B_1} (f-g) \left(\mathcal{G}_{B_R} (f-g)\right) dx
\end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Omega \left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx & & \displaystyle\int_{B_1} (f{+}g)\left(\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right) dx \\ \displaystyle -\int_\Omega \left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f - \nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx & \geq & \displaystyle -\int_{B_1} (f{-}g)\left(\mathcal{G}_{B_R}(f-g)\right) dx \end{array}$$

Es erfolgen zunächst die Untersuchungen der linken Seiten:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx - \int_\Omega \left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f - \Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx \\ &= \int_\Omega \left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 - \left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f - \Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx \\ &= \int_\Omega (f+g)\left(\mathcal{G}_\Omega (f+g)\right) - (f-g)\left(\mathcal{G}_\Omega (f-g)\right) dx \\ &= \int_\Omega 2f\left(\mathcal{G}_\Omega g\right) + 2g\left(\mathcal{G}_\Omega f\right) dx \\ &= \int_\Omega 2\left(\Delta^{2k}\mathcal{G}_\Omega f\right)\left(\mathcal{G}_\Omega g\right) + 2\left(\Delta^{2k}\mathcal{G}_\Omega g\right)\left(\mathcal{G}_\Omega f\right) dx \\ &= \int_\Omega 2\left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f\right)\left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right) + 2\left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)\left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f\right) dx \\ &= 4\int_\Omega \left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f\right)\left(\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right) dx \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx - \int_\Omega \left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f - \nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx \\ &= \int_\Omega \left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f + \nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 - \left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f - \nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)^2 dx \\ &= \int_\Omega (f+g)\left(\mathcal{G}_\Omega (f+g)\right) - (f-g)\left(\mathcal{G}_\Omega (f-g)\right) dx \\ &= \int_\Omega 2f\left(\mathcal{G}_\Omega g\right) + 2g\left(\mathcal{G}_\Omega f\right) dx \\ &= \int_\Omega 2\left((-\Delta)^m\mathcal{G}_\Omega f\right)\left(\mathcal{G}_\Omega g\right) + 2\left((-\Delta)^m\mathcal{G}_\Omega g\right)\left(\mathcal{G}_\Omega f\right) dx \\ &= \int_\Omega 2\left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f\right)\left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right) + 2\left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right)\left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f\right) dx \\ &= 4\int_\Omega \left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega f\right)\left(\nabla\Delta^k\mathcal{G}_\Omega g\right) dx. \end{aligned}$$

Die Differenz der rechten Seite, welche bei den beiden Ungleichungen identisch ist, liefert:

$$\begin{aligned} &\int_{B_1} (f+g)\left(\mathcal{G}_{B_1}(f+g)\right) dx - \int_{B_1} (f-g)\left(\mathcal{G}_{B_R}(f-g)\right) dx \\ &= \int_{B_1} f\left(\mathcal{G}_{B_1} f\right) + g\left(\mathcal{G}_{B_1} g\right) + f\left(\mathcal{G}_{B_1} g\right) + g\left(\mathcal{G}_{B_1} f\right) dx \\ &\quad + \int_{B_1} (-f)\left(\mathcal{G}_{B_R} f\right) - g\left(\mathcal{G}_{B_R} g\right) + f\left(\mathcal{G}_{B_R} g\right) + g\left(\mathcal{G}_{B_R} f\right) dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{B_1} f\left(\mathcal{G}_{B_1} f - \mathcal{G}_{B_R} f\right)\, dx + \int_{B_1} g\left(\mathcal{G}_{B_1} g - \mathcal{G}_{B_R} g\right)\, dx \\
&\quad + \int_{B_1} f\left(\mathcal{G}_{B_1} g + \mathcal{G}_{B_R} g\right)\, dx + \int_{B_1} g\left(\mathcal{G}_{B_1} f + \mathcal{G}_{B_R} f\right)\, dx.
\end{aligned}
$$

Somit ergeben sich, durch Ersetzen der linken und rechten Seiten, folgende Ungleichungen:

$$
\begin{aligned}
4\int_{\Omega}\left(\Delta^k \mathcal{G}_\Omega f\right)\left(\Delta^k \mathcal{G}_\Omega g\right)\, dx \geq &\int_{B_1} f\left(\mathcal{G}_{B_1} f - \mathcal{G}_{B_R} f\right)\, dx + \int_{B_1} g\left(\mathcal{G}_{B_1} g - \mathcal{G}_{B_R} g\right)\, dx \\
&+ \int_{B_1} f\left(\mathcal{G}_{B_1} g + \mathcal{G}_{B_R} g\right)\, dx + \int_{B_1} g\left(\mathcal{G}_{B_1} f + \mathcal{G}_{B_R} f\right)\, dx
\end{aligned}
\tag{8}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
4\int_{\Omega}\left(\nabla\Delta^k \mathcal{G}_\Omega f\right)\left(\nabla\Delta^k \mathcal{G}_\Omega g\right)\, dx \geq &\int_{B_1} f\left(\mathcal{G}_{B_1} f - \mathcal{G}_{B_R} f\right)\, dx + \int_{B_1} g\left(\mathcal{G}_{B_1} g - \mathcal{G}_{B_R} g\right)\, dx \\
&+ \int_{B_1} f\left(\mathcal{G}_{B_1} g + \mathcal{G}_{B_R} g\right)\, dx + \int_{B_1} g\left(\mathcal{G}_{B_1} f + \mathcal{G}_{B_R} f\right)\, dx.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Mit $\mathcal{G}_{B_1} - \mathcal{G}_{B_R} = \mathcal{H}_{B_1} - \mathcal{H}_{B_R}$ folgen die Behauptungen (2) und (3). □

Satz 2. *Seien $x, y \in B_1$ und $x \neq y$. Wir erhalten dann für die polyharmonische Greensche Funktion in Ω folgende Ungleichung:*

$$
G_\Omega(x,y) \geq \frac{1}{4}\Big(H_{B_1}(x,x) - H_{B_R}(x,x) + H_{B_1}(y,y) - H_{B_R}(y,y)\Big) + \frac{1}{2}\Big(G_{B_1}(x,y) + G_{B_R}(x,y)\Big). \tag{10}
$$

Beweis: Wir wissen, dass die Greensche Funktion symmetrisch ist:

$$
G_\Omega(x,y) = G_\Omega(y,x).
$$

Des Weiteren folgt aus Satz 1:

$$
\begin{aligned}
&4\int_{\Omega}\left(\Delta^k \mathcal{G}_\Omega f\right)\left(\Delta^k \mathcal{G}_\Omega g\right)\, d\xi \\
&= 4\int_{\Omega}\left(\Delta^{2k} \mathcal{G}_\Omega f\right)\left(\mathcal{G}_\Omega g\right)\, d\xi = 4\int_{\Omega} f\left(\mathcal{G}_\Omega g\right)\, d\xi \\
&\overset{(2)}{\geq} \int_{B_1}\Big\{ f\mathcal{H}_{B_1} f - f\mathcal{H}_{B_R} f + g\mathcal{H}_{B_1} g - g\mathcal{H}_{B_R} g + f\mathcal{G}_{B_1} g + f\mathcal{G}_{B_R} g + g\mathcal{G}_{B_1} f + g\mathcal{G}_{B_R} f \Big\}\, d\xi
\end{aligned}
$$

Seien f_h und g_h wie folgt definierte Approximationen der Dirac-Deltadistributionen in x bzw. y:

$$
\begin{aligned}
f_h &= \frac{1}{h^n}\varphi\left(\frac{x - .}{h}\right) \\
g_h &= \frac{1}{h^n}\varphi\left(\frac{y - .}{h}\right)
\end{aligned}
$$

mit $0 \leq \varphi$, $\operatorname{supp}\varphi \subset B_1(0)$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x) = 1$.
Dabei sei $\xi = x - h\tilde{\xi}$ und $\eta = y - h\tilde{\eta}$.

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega f_h \mathcal{G}_\Omega g_h - G_\Omega(x,y)\right| \\
&= \left|\int_\Omega \int_\Omega f_h(\xi) G_\Omega(\xi,\eta) g_h(\eta)\, d\xi\, d\eta - G_\Omega(x,y)\right| \\
&= \left|\int_\Omega \int_\Omega f_h(\xi) G_\Omega(\xi,\eta) g_h(\eta)\, d\xi\, d\eta - \int_\Omega \int_\Omega f_h(\xi) G_\Omega(x,y) g_h(\eta)\, d\xi\, d\eta\right| \\
&\leq \int_{\frac{1}{h}(y-\Omega)} \int_{\frac{1}{h}(x-\Omega)} \varphi\left(\tilde{\xi}\right) \left|G_\Omega\left(x - h\tilde{\xi},\, y - h\tilde{\eta}\right) - G_\Omega(x,y)\right| \varphi\left(\tilde{\eta}\right)\, d\tilde{\xi}\, d\tilde{\eta} \\
&= \int_{B_1(0)} \int_{B_1(0)} \varphi(\xi) \Big|G_\Omega(\underbrace{x - h\xi}_{\in B_h(x)}, \underbrace{y - h\eta}_{\in B_h(y)}) - G_\Omega(x,y)\Big| \varphi(\eta)\, d\xi\, d\eta \qquad \text{, für } h \text{ klein genug} \\
&= (*)
\end{aligned}
$$

Für h_0 klein genug ist $\overline{B_{h_0}(x)} \times \overline{B_{h_0}(y)} \ni (\xi,\eta) \mapsto G_\Omega(\xi,\eta)$ gleichmäßig stetig.
Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ und $h_1 \leq h_0$ gilt

$$
\left(\hat{\xi},\hat{\eta}\right) \in \overline{B_{h_1}(x)} \times \overline{B_{h_1}(y)} \quad \to \quad \left|G_\Omega\left(\hat{\xi},\hat{\eta}\right) - G_\Omega\left(x,y\right)\right| \leq \varepsilon\,,
$$

so dass mit $\xi,\eta \in B_1(0) \times B_1(0)$,

$$
|G_\Omega(x - h\xi, y - h\eta) - G_\Omega(x,y)| \leq \varepsilon
$$

und $0 < h \leq h_1$ folgt:

$$
(*) \leq \varepsilon \int_{B_1(0)} \int_{B_1(0)} \varphi(\xi)\varphi(\eta) = \varepsilon.
$$

Mit Hilfe der obigen Abschätzung kommt man zu folgender Erkenntnis:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \int_\Omega f_h(\xi) G_\Omega(\xi,\eta) g(\eta)\, d(\xi,\eta) \quad &\to \quad G_\Omega(x,y) \\
\int_{B_1} \int_{B_1} f_h(\xi) G_{B_1}(\xi,\eta) g(\eta)\, d(\xi,\eta) \quad &\to \quad G_{B_1}(x,y) \\
\int_{B_1} \int_{B_1} f_h(\xi) G_{B_R}(\xi,\eta) g(\eta)\, d(\xi,\eta) \quad &\to \quad G_{B_R}(x,y)
\end{aligned}
$$

Betrachten wir nun exemplarisch $H_{B_1}(x,x)$, wobei f_κ wie oben definiert ist.

$$
\mathcal{H}_{B_1} f_\kappa(\xi) = \int_{B_1} H_{B_1}(\xi,\eta) f_\kappa(\eta)\, d\eta
$$

$f_\kappa(\eta)$, $f_\kappa(\xi)$ - Glättungskerne, in L^1 beschränkt

$$
\int_{B_1} H_{B_1}(\xi,\eta) f_\kappa(\eta)\, d\eta \quad \to \quad H_{B_1}(\xi,x) \qquad \text{gleichmäßig in } \xi \text{, vgl. Weierstraßscher Approximationssatz}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_1} f_\kappa(\xi)\mathcal{H}_{B_1} f_\kappa(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{B_1} f_\kappa(\xi) H_{B_1}(\xi,x)\, d\xi + \int_{B_1} f_\kappa(\xi) \underbrace{\left(\mathcal{H}_{B_1} f_\kappa(\xi) - H_{B_1}(\xi,x)\right)}_{\to 0 \text{ glm.}} \\
&= \int_{B_1} f_\kappa(\xi) H_{B_1}(\xi,x)\, d\xi + o(1) \quad \to \quad H_{B_1}(x,x) \quad , \kappa \to h\,, h \to 0
\end{aligned}
$$

Analog verhält es sich mit $H_{B_R}(x,x)$, $H_{B_1}(y,y)$ und $H_{B_R}(y,y)$.
Daraus läßt sich schliesen:

$$
\begin{aligned}
G_\Omega(x,y) \geq \frac{1}{4}\Big(& H_{B_1}(x,x) - H_{B_R}(x,x) + H_{B_1}(y,y) - H_{B_R}(y,y) \\
& + G_{B_1}(x,y) + G_{B_R}(x,y) + G_{B_1}(y,x) + G_{B_R}(y,x)\Big) \\
= \frac{1}{4}\Big(& H_{B_1}(x,x) - H_{B_R}(x,x) + H_{B_1}(y,y) - H_{B_R}(y,y)\Big) + \frac{1}{2}\Big(G_{B_1}(x,y) + G_{B_R}(x,y)\Big),
\end{aligned}
$$

womit (10) gezeigt ist.

□

2 Abschätzungen für $G_{m,2m}$

Wir verwenden im folgenden nachstehende Notationen:

i) $B = \left\{x \in \mathbb{R}^{2m};\ |x| < 1\right\}$ mit $m \in \mathbb{N}$

ii) $\mathcal{G}_{m,2m}$ ist der Greensche Operator von (1), so dass

$$u = \mathcal{G}_{m,2m} f$$

mit

$$\left(\mathcal{G}_{m,2m} f\right)(x) = \int_B G_{m,2m}(x,y) f(y)\, dy$$

iii) $[xy] = |x-y|$ *bzw.* $\widetilde{[xy]} = \frac{1}{R}\,|x-y|\,,$

$[XY] = \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|$ *bzw.* $\widetilde{[XY]} = \left| \frac{1}{R^2}\,|x|\,y - \frac{x}{|x|} \right|,$

$\theta(x,y) = [XY]^2 - [xy]^2\,.$

Wir wollen bemerken, dass

$$[XY] = \sqrt{|x|^2|y|^2 - 2 < x,y > +1} = [YX]$$

und $d(x) = \big(1-|x|\big)$ der Abstand zwischen x und dem Rand ∂B ist.
Des Weiteren gilt

$$\theta(x,y) = \left(1-|x|^2\right)\left(1-|y|^2\right).$$

Deshalb folgt für $x, y \in B$

$$[XY] > [xy].$$

Lemma 1. *Für die Greensche Funktion folgt nach Boggio*

$$G_{m,n}(x,y) = k_{m,n}|x-y|^{2m-n}\int_1^{[XY]/[xy]} \frac{\left(v^2-1\right)^{m-1}}{v^{n-1}}\,dv,$$

wobei $k_{m,n}$ eine feste, positiveKonstante ist, vgl. auch [3].
Somit folgt für $n = 2m$

$$G_{m,n=2m}(x,y) = k_{m,n=2m}\int_1^{[XY]/[xy]} \frac{\left(v^2-1\right)^{m-1}}{v^{2m-1}}\,dv. \tag{11}$$

Satz 3. *Sei $m \in \mathbb{N}$, $n = 2m$, $m \geq 2$. Dann existiert eine Konstante $\delta_m > 0$, welche nur von der Ordnung $2m$ des polyharmonischen Operators abhängt, so dass gilt: Setzen wir voraus, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^{2m}$ ein $C^{2m,\alpha}$-glattes Gebiet ist, dann ist*

$$G_{(-\Delta)^m,\Omega}(x,y) > 0,$$

falls gilt:

$$|x-y| < \delta_m \max\left(d(x), d(y)\right).$$

Für die Konstante $\delta_{m,n}$ erhalten wir folgende Abschätzung

$$\delta_m \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\!\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^{m-1} - 2^{m-2}\right).$$

Beweis: O.B.d.A. $x = 0$, $B_1(0) \subset \Omega$
Außerdem sei $R > 0$ so groß wewählt, dass $B_R(0) \supset \Omega$. Berechnen wir nun das Integral aus (11), so folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_{m,2m}} G_{B_1}(x,y) &= \int_1^{[XY]/[xy]} \frac{\left(v^2-1\right)^{m-1}}{v^{2m-1}}\,dv \\
&= \log v\,\Big|_1^{[XY]/[xy]} + \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}(-1)^j\frac{v^{-2j}}{-2j}\,\Big|_1^{[XY]/[xy]} \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\left||x|y-\frac{x}{|x|}\right|^2\right) - \frac{1}{2}\log|x-y|^2 + \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}(-1)^j\frac{([XY]/[xy])^{-2j}}{-2j} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j}{-2j} \\
&= \frac{1}{2}\log\Big||x|^2|y|^2 - 2 < x,y > +1\Big| - \frac{1}{2}\log|x-y|^2 + \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}(-1)^j\frac{([xy]/[XY])^{2j}}{-2j} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j}{2j}
\end{aligned} \tag{12}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\log\Big||x|^2|y|^2 - 2|x|\,|y| + 1\Big| + \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}(-1)^j\frac{([xy]/[XY])^{2j}}{-2j} - \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j}{2j}}_{\frac{1}{k_{m,n}}H_{(-\Delta)^m,B_1}}$$

$$- \frac{1}{2}\log|x-y|^2$$

Davon ausgehend betrachten wir einige Fälle.

Zunächst folgt:

$$\frac{1}{k_{m,n}}H_{(-\Delta)^m,B_1}(x,y) = \log\Big|1 - |x|\,|y|\Big| + \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}(-1)^j\frac{([xy]/[XY])^{-2j}}{-2j} - \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j}{2j}.$$

Nun lassen wir $x \to y$, d.h. $[xy]/[XY] \to 0$, laufen. So ergibt sich für $H_{(-\Delta)^m,B_1}(y,y)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_{m,n}}H_{(-\Delta)^m,B_1}(y,y) &= \log\Big|1 - |y|^2\Big| + \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}(-1)^j\frac{([xy]/[XY])^{-2j}}{-2j} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j}{2j} \\ &= \log\Big|1 - |y|^2\Big| - \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j}{2j}\end{aligned} \tag{13}$$

sowie

$$\frac{1}{k_{m,n}}H_{(-\Delta)^m,B_1}(0,0) = -\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j}{2j}\,. \tag{14}$$

Betrachten wir nun den Fall $x = 0$.

$$\begin{aligned}\left||x|y - \frac{x}{|x|}\right|^2_{\big| x=0} &= \left\langle |x|y - \frac{x}{|x|}\,,\,|x|y - \frac{x}{|x|}\right\rangle_{\big| x=0} \\ &= |x|^2|y|^2 - 2 < x, y > +1_{\big| x=0} \\ &= 1 \\ [XY]/[xy] &= \frac{1}{|y|}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k_{m,2m}} G_{B_1}(0,y) &= \int_1^{[XY]/[xy]} \frac{\left(v^2-1\right)^{m-1}}{v^{2m-1}}\, dv \ \Big|_{x=0} \\
&\overset{(12)}{=} \frac{1}{2}\log\left(\left| |x|y - \frac{x}{|x|}\right|^2\right)_{\big| x=0} - \frac{1}{2}\log|x-y|^2 \ \Big|_{x=0} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}(-1)^j \frac{\left([XY]/[xy]\right)^{-2j}}{-2j} \ \Big|_{x=0} - \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j}{-2j} \\
&= -\frac{1}{2}\log|y|^2 + \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j|y|^{2j}}{-2j} - \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j}{2j} \qquad (15)\\
&\geq -\frac{1}{2}\log|y|^2 - \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j|y|^{2j}}{2j} - \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{2} \\
&\geq -\frac{1}{2}\log|y|^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}|y|^{2j} - 2^{m-2} \\
&\geq -\frac{1}{2}\log|y|^2 - \frac{1}{2}\left(1+|y|^2\right)^{m-1} - 2^{m-2}
\end{aligned}
$$

Desweiteren wollen wir $G_{(-\Delta)^m,B_R}$ und $H_{(-\Delta)^m,B_R}$ untersuchen.
Nach [3] gilt :

$$
G_{(-\Delta)^m,B_R}(x,y) = R^{2m-n} G_{(-\Delta)^m,B_1}\left(\frac{1}{R}x, \frac{1}{R}y\right) \ \Big|_{n=2m} = G_{(-\Delta)^m,B_1}\left(\frac{1}{R}x, \frac{1}{R}y\right).
$$

So folgt aus (11) für $G_{(-\Delta)^m,B_R}(0,y)$:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{R^2}|x|y - \frac{x}{|x|}\right|^2_{\big| x=0} &= \left\langle \frac{1}{R^2}|x|y - \frac{x}{|x|}, \frac{1}{R^2}|x|y - \frac{x}{|x|}\right\rangle_{\big| x=0} \\
&= \frac{1}{R^4}|x|^2|y|^2 - \frac{2}{R^2} < x, y > +1_{\big| x=0} \\
&= 1 \\
\widetilde{[XY]}/\widetilde{[xy]} &= \frac{R}{|y|}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k_{m,2m}} G_{B_R}(0,y) &= \int_1^{\widetilde{[XY]}/\widetilde{[xy]}} \frac{\left(v^2-1\right)^{m-1}}{v^{2m-1}}\, dv \ \Big|_{x=0} \\
&\overset{(15)}{=} -\log\left(\frac{1}{R}|y|\right) + \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j\left(\frac{1}{R}|y|\right)^{2j}}{-2j} + \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j}{2j} \\
&= -\log|y| + \underbrace{\log(R) \underbrace{- \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j|y|^{2j}}{2jR^{2j}}}_{\to 0\,,\, R\to\infty} - \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{2}}_{\frac{1}{k_{m,2m}}H_{B_R}}
\end{aligned}
$$

Betrachten wir nun $H_{(-\Delta)^m,B_R}$.
Aus (13) folgt

$$\frac{1}{k_{m,2m}} H_{B_1}(y,y) = \log\Big|1-|y|^2\Big| - \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j}{-2j}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_{m,2m}} H_{B_R}(y,y) &= \frac{1}{k_{m,2m}} H_{B_1}\left(\frac{y}{R},\frac{y}{R}\right) + \log R \\ &= \log\left|1-\frac{|y|^2}{R^2}\right| - \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-1)^j}{-2j} + \log R.\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\frac{1}{k_{m,2m}}\Big(H_{B_1}(y,y) - H_{B_R}(y,y)\Big) = \log\Big|1-|y|^2\Big| - \log\left|1-\frac{|y|^2}{R^2}\right| - \log R.$$

Setzen wir nun $y = 0$, dann ergibt sich

$$\frac{1}{k_{m,2m}}\Big(H_{B_1}(0,0) - H_{B_R}(0,0)\Big) = -\log R.$$

Betrachten wir nun die daraus resultierende Abschätzung für $G_{(-\Delta)^m,\Omega}$ aus (10).

$$\begin{aligned}\frac{4}{k_{m,n}} G_{(-\Delta)^m,\Omega}(0,y) \geq{}& \log\Big|1-|y|^2\Big| - \log\left|1-\frac{|y|^2}{R^2}\right| - 2\log R \\ &+ 2\left(-\frac{1}{2}\log|y|^2 - \frac{1}{2}\left(1+|y|^2\right)^{m-1} - 2^{m-2} - \frac{1}{2}\log|y|^2 + \log R - 2^{m-2}\right)\end{aligned}$$

Mit $R \to \infty$ folgt

$$\frac{4}{k_{m,n}} G_{(-\Delta)^m,\Omega}(0,y) \geq \log\Big|1-|y|^2\Big| - 2\log|y|^2 - \left(1+|y|^2\right)^{m-1} - 2^m.$$

Man kann nun ein $\delta_m > 0$ bestimmen, so dass für $|y| < \delta_m$ die rechte Seite positiv ist.
Dazu beschränken wir uns auf $|y| \leq \frac{1}{2}$. Somit ergibt sich für $G_{(-\Delta)^m,\Omega}(0,y)$:

$$\frac{4}{k_{m,n}} G_{(-\Delta)^m,\Omega}(0,y) \geq \log\left(\frac{3}{4}\right) - 4\log|y| - \left(\frac{5}{4}\right)^{m-1} - 2^m$$

Da für $G_{(-\Delta)^m,\Omega}$ lokale Positivitätsresultate gezeigt werden sollen, ist y so zu bestimmen, dass gilt:

$$0 < \log\left(\frac{3}{4}\right) - 4\log|y| - \left(\frac{5}{4}\right)^{m-1} - 2^m$$

Diese Ungleichung ist für

$$|y| < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^{m-1} - 2^{m-2}\right) =: \delta_m$$

erfüllt.
So erhält man:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= 0.2504689000\ldots \\ \delta_3 &= 0.0852177513\ldots \\ \delta_4 &= 0.0104599482\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\lim_{m\to\infty} \delta_m = 0$$

□

Literatur

[1] H.-Ch. Grunau, G. Sweers - Regions of positivity for polyharmonic Green functions in arbitrary domains, Universität Magdeburg Preprint Nr. 6 (2006)

[2] H.-Ch. Grunau, Polyharmonische Dirichletprobleme: Positivität, kritische Exponenten und kritische Dimensionen,Universität Bayreuth Habilitationsschrift (1996)

[3] H.-Ch. Grunau, G. Sweers - Positivity for equations involving polyharmonic operators with Dirichlet boundary conditions, Math. Ann. 307, 589-626 (1997)

[4] D. Gilbarg, N.S. Trudinger - Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, The Second Edition, Springer Verlag, Berlin 1983

[5] J. Jost - Partielle Differentialgleichungen, Springer Verlag, Berlin 1998