Ludwig Pulst

Ein Analogon eines Satzes von Moser auf der $\mathbb{S}^4$

– überarbeitete Diplomarbeit –

Betreuer: Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung ... 1

2 Grundlagen ... 5
2.1 Geometrische Größen ... 5
2.1.1 Die Riemannsche Metrik ... 5
2.1.2 Die kovariante Ableitung ... 8
2.1.3 Krümmungen ... 10
2.1.4 Konforme Metrikwechsel und der Paneitz-Operator ... 11
2.2 Sobolevräume auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten ... 14

3 Die verbesserte Beckner-Ungleichung ... 21
3.1 Ungleichungen ... 21
3.2 Eigenwerte und Eigenfunktionen des Paneitz-Operators $\mathbb{P}_4$ ... 25
3.3 Beweis der verbesserten Beckner-Ungleichung ... 33
3.3.1 Teil A ... 33
3.3.2 Teil B ... 42

4 Der Satz von Moser für die Q-Krümmung ... 51
4.1 Notwendige Bedingungen ... 51
4.2 Der Beweis ... 52

5 Der Parameter a in der verbesserten Beckner-Ungleichung ... 59
5.1 Die Strategie auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$ ... 60
5.2 Die Strategie auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ ... 61

Literaturverzeichnis ... 63

Kapitel 1
Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist das Vorschreiben beziehungsweise Vorgeben der Q-Krümmung auf der vierdimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^4$. Damit stellen sich sofort zwei Fragen: Was heißt es, die Krümmung auf der Sphäre vorzuschreiben und was ist die Q-Krümmung für ein Objekt?
Hierzu ist es hilfreich, zunächst die zweidimensionale Sphäre $\mathbb{S}^2$, also die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$, zu betrachten. Ein Maß für die Gekrümmtheit in einem Punkt auf der Sphäre ist die sogenannte Gaußkrümmung K. Eine Anschauung für die Gaußkrümmung erhält man, wenn man die Sphäre als ein Objekt im umgebenden $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Dann ist es möglich, in einem Punkt auf der Sphäre den Normalenvektor zu bestimmen und eine Ebene, die diesen enthält: die Normalenebene. In der Folge berechnet man die Krümmung von Kurven, die in dem Schnitt von der Sphäre und dieser Ebene liegen. Wiederholt man dies für alle möglichen Normalenebenen und wählt aus den so erhaltenen Krümmungen die größte und die kleinste aus, erhält man die sogenannten Hauptkrümmungen. Die Gaußkrümmung ist dann das Produkt der beiden. Gauß hat nun festgestellt, dass, ganz im Gegensatz zu den Hauptkrümmungen, die nach ihm benannte Krümmung K auch ohne den umgebenden Raum $\mathbb{R}^3$ berechnet werden kann, also zur sogenannten intrinsischen Geometrie gehört.
Allerdings hängt die Gaußkrümmung stark von der Metrik der Sphäre, das heißt von der Art der Messung der Abstände und Winkel, ab. In einer genaueren Beschreibung ist die Metrik g eine Funktion, die den Tangentialräumen an die Sphäre ein inneres Produkt zuordnet. Das heißt, dass bei gegebener Metrik g auf $\mathbb{S}^2$ die Gaußkrümmung $K = K_g$ bezüglich dieser Metrik in jedem Punkt der Sphäre zu erhalten ist. Damit ist die Gaußkrümmung nichts anderes, als eine Funktion von $\mathbb{S}^2$ nach $\mathbb{R}$. Stattet man die Sphäre zum Beispiel mit der Metrik aus, die sie von dem umgebenden $\mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Metrik erbt, ist die Gaußkrümmung die konstante Funktion $K_g \equiv 1$.
Wie sieht die umgekehrte Situation aus? Gegeben sei eine reellwertige Funktion f auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$. Kann eine Metrik auf der Sphäre gefunden werden, so dass diese Funktion f die Gaußkrümmung bezüglich dieser Metrik ist? Spezieller sucht man nach Metriken, die konform zur Ausgangsmetrik g sind. Das bedeutet die Suche nach einer glatten Funktion w auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$, so dass $g_w = \mathrm{e}^{2w} g$ gilt und f die Gaußkrümmung bezüglich g_w ist: $K_{g_w} = f$. Das Problem ist äquivalent zur Lösung folgender partieller Differentialgleichung auf $\mathbb{S}^2$, [4, Kapitel 6.3]:

$$-\Delta_g w + 1 = K_{g_w} \mathrm{e}^{2w}, \tag{1.1}$$

wobei Δ_g den Laplace-Beltrami-Operator bezüglich der Metrik g bezeichnet und folgende konforme Kovarianz-Eigenschaft erfüllt:

$$\Delta_{g_w} = \mathrm{e}^{-2w}\Delta_g. \tag{1.2}$$

Das Problem der vorgeschriebenen Gaußkrümmung, beziehungsweise verallgemeinert auf Sphären höherer Dimension, der skalaren Krümmung, ist nach dem kanadischen Mathematiker Nirenberg benannt.
Man erkennt für eine beliebige Metrik g auf der Sphäre, d.h. K_g ist nicht notwendig konstant 1, unter Zuhilfenahme des Satzes von Gauß-Bonnet für Flächen

$$\int_{\mathbb{S}^2} K_g dv_g = 2\pi\chi\left(\mathbb{S}^2\right), \tag{1.3}$$

dass das Integral $\int_{\mathbb{S}^2} K_g dv_g$ eine topologische Invariante ist und die vorgegebene Funktion K_{g_w} irgendwo positiv sein muss: Integration von Gleichung (1.1) zeigt

$$\begin{aligned}\underbrace{-\int_{\mathbb{S}^2} \Delta_g w dv_g}_{=0} + \int_{\mathbb{S}^2} K_g dv_g &= \int_{\mathbb{S}^2} K_{g_w} \mathrm{e}^{2w} dv_g \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} K_{g_w} dv_{g_w} \\ &= 2\pi\chi\left(\mathbb{S}^2\right) \\ &= 4\pi > 0.\end{aligned}$$

Für $K_g \equiv 1$ folgt dies natürlich auch ohne den Satz von Gauß-Bonnet. Das Problem der vorgeschriebenen Gaußkrümmung auf $\mathbb{S}^2$ wurde von Moser unter einer einschneidenden Symmetrieannahme folgendermaßen gelöst [28]:

Satz 1.1 (Moser). *Sei $f \in C^\infty\left(\mathbb{S}^2, g\right)$ mit $f(x) = f(-x)$. Falls $\sup_{x\in\mathbb{S}^2} f > 0$, dann existiert ein konformer Faktor e^{2w}, so dass f die Gauß-Krümmung von $\left(\mathbb{S}^2, g_w\right)$ mit $g_w = \mathrm{e}^{2w} g$ ist.*

Für Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension $n > 2$ wurde von Paneitz in [30] der Differentialoperator $\mathbb{P}_n$ vierter Ordnung entdeckt, der für $n = 4$ eine zu Gleichung (1.2) ganz analoge konform kovariante Eigenschaft nach dem konformen Metrikwechsel $g_w = \mathrm{e}^{2w} g$ besitzt:

$$\mathbb{P}_4^{g_w} = \mathrm{e}^{-4w}\mathbb{P}_4^g. \tag{1.4}$$

Auf der vierdimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^4$ erfüllt der Paneitz-Operator $\mathbb{P}_4$ folgende partielle Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$\mathbb{P}_4^g w + 2Q_g = 2Q_{g_w}\mathrm{e}^{4w}, \tag{1.5}$$

wobei Q_g die Q-Krümmung auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ bezeichnet. Diese wird aus Termen von höherdimensionalen Krümmungscharakterisierungen berechnet. Wie später gezeigt wird, beträgt die Q-Krümmung auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ mit der geerbten Metrik des umgebenden $\mathbb{R}^5$ drei, d.h. $Q_g = 3$. Weiter kann die Q-Krümmung als ein Teil der auf vierdimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten M_4 verallgemeinerten Gauß-Bonnet-Formel, der Gauß-Bonnet-Chern-Formel gesehen werden:

$$8\pi^2\chi(M_4) = \int_{M_4}\left(\frac{1}{4}|W_g|_g^2 + 2Q_g\right) dv_g. \tag{1.6}$$

Der Weyl-Tensor W, der sich wieder aus höherdimensionalen Krümmungscharakterisierungen ergibt, verschwindet für lokal konform flache Mannifaltigkeiten wie der Sphäre $\mathbb{S}^4$, so dass für diese folgt:

$$16\pi^2 = 8\pi^2\chi\left(\mathbb{S}^4\right) = \int_{\mathbb{S}^4} 2Q_g dv_g. \tag{1.7}$$

Analog wie die Gaußkrümmung auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$ soll in dieser Arbeit die Q-Krümmung für die vierdimensionale Sphäre $\mathbb{S}^4$ vorgeschrieben werden. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Lösung für Gleichung (1.5). Durch die Analoga der Differentialgleichungen (1.1), (1.5) und den Gauß-Bonnet-Formeln (1.3), (1.7) motiviert, soll die folgende Variante des Satzes von Moser bewiesen werden.

Satz 1.2. *Sei $Q \in C^\infty\left(\mathbb{S}^4, g\right)$ mit $Q(x) = Q(-x)$. Falls $\sup_{x\in\mathbb{S}^4} Q > 0$, dann existiert ein konformer Faktor e^{2w}, so dass Q die Q-Krümmung von $\left(\mathbb{S}^2, g_w\right)$ mit $g_w = \mathrm{e}^{2w}g$ ist.*

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Im zweiten Kapitel werden mit der kovarianten Ableitung, den verschiedenen Krümmungsbegriffen und konformen Metrikwechseln auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten die notwendigen differentialgeometrischen Werkzeuge zusammengestellt, um den Paneitz-Operator sowie partielle Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten zu verstehen. Die Ausführungen sind den Büchern von Lee [24, 25], Aubin [4] und Kühnel [23] entnommen. Da für die Lösung der Differentialgleichung (1.5) auf direkte Methoden der Variationsrechnung zurückgegriffen wird, werden im zweiten Abschnitt des Kapitels die Sobolevräume auf Mannigfaltigkeiten eingeführt. Hier wird den Büchern von Hebey [20, 21] und Aubin [3] gefolgt. Für ein notwendiges Kompaktheitsresultat im Beweis des Satzes 1.2 wird die verbesserte Beckner-Ungleichung

$$\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} \leq \frac{1}{3}\left(a\fint_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w)\, w + 12\fint_{\mathbb{S}^4} w\right)$$

mit $a < 1$ benötigt, wobei $\fint_{\mathbb{S}^4} := (3/(8\pi^2))\int_{\mathbb{S}^4}$. Der auf Wei und Xu aus [34] zurückgehende Beweis der Verbesserung der Beckner-Ungleichung wird in Kapitel 3 dargestellt. Vorangestellt werden Betrachtungen über einen Grenzfall der Sobolevschen Einbettungssätze, die ähnliche Ungleichungen hervorbringen, sowie für den Beweis der Verbesserung der Beckner-Ungleichung unerlässlichen Charakterisierungen über die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Paneitz-Operators $\mathbb{P}_4$.

Die Verbesserung der Beckner-Ungleichung wird für ein a nahe 1 bewiesen. Dafür benutzten Wei und Xu die in ihrer Arbeit nicht bewiesene Koerzitivität des, der verbesserten Beckner-Ungleichung entsprechenden, Funktionals

$$J_a[w] := \log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} - \frac{1}{3}\left(a\fint_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w)\, w + 12\fint_{\mathbb{S}^4} w\right)$$

für ein $a > \frac{1}{2}$. Zwar kann in dieser Arbeit die Koerzitivität nur für ein a nahe 1 bewiesen werden, doch legt die Behauptung von Wei und Xu, sowie analoge Tatsachen auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$, die Vermutung nahe, dass die verbesserte Beckner-Ungleichung nur für $a \geq \frac{1}{2}$ gilt. Dies soll in Kapitel 5 diskutiert werden.

Kapitel 2
Grundlagen

2.1 Geometrische Größen

2.1.1 Die Riemannsche Metrik

Die grundlegenden Objekte in der Differentialgeometrie sind Mannigfaltigkeiten. Eine Mannigfaltigkeit M_n der Dimension n ist ein n-dimensionaler topologischer Hausdorff-Raum, der, grob gesprochen, lokal dem n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ gleicht, d.h. jeder Punkt auf der Mannigfaltigkeit besitzt eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Damit ist eine Mannigfaltigkeit lokal kompakt und lokal wegzusammenhängend.
Um die Konzepte der Analysis auf Mannigfaltigkeiten übertragen zu können, werden diese mit einer glatten bzw. differenzierbaren Struktur, dem sogenannten Atlas, versehen. Damit ist es möglich, differenzierbare Funktionen $f : M_n \to \mathbb{R}$ auf der Mannigfaltigkeit zu definieren. Um geometrische Größen wie Abstände und Winkel zu messen, wird diese Mannigfaltigkeit mit einer weiteren Struktur ausgestattet: der Riemannschen Metrik.
Die Riemannsche Metrik ist eine Funktion g, die in jedem Punkt p ein Skalarprodukt $g : T_pM_n \times T_pM_n \to \mathbb{R}$ definiert, wobei T_pM_n den Tangentialraum im Punkt p an die Mannigfaltigkeit bezeichnet. Dazu muss erst einmal der Tangentialraum T_pM_n erklärt werden:
Anschaulich soll der Tangentialraum in einem Punkt p der Mannigfaltigkeit eine lineare Approximation der Mannigfaltigkeit in einer Umgebung um diesen Punkt sein. Um die abstrakte Definition von Tangentenvektoren an Mannigfaltigkeiten zu verstehen, werden einführend eingebettete Mannigfaltigkeiten in den $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet. Seien dazu $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ die Koordinaten des $\mathbb{R}^{n+1}$, dann ist die Sphäre $\mathbb{S}^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$ eine solche eingebettete Mannigfaltigkeit. Den Tangentialraum an einen Punkt p der Sphäre kann man sich nun als einen Unterraum des Vektorraumes

$$\mathbb{R}_p^{n+1} := \left\{(p, v) : v \in \mathbb{R}^{n+1}\right\}$$

vorstellen, d.h. konkret als den Vektorraum, dessen Vektoren senkrecht zum radialen Einheitsvektor in p stehen. Dieser Vektorraum ist offensichtlich isomorph zum $\mathbb{R}^{n+1}$ selbst und erhält, bzw. erbt, über diesen Isomorphismus auch das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^{n+1}$. Wie lassen sich nun Tangentialvektoren bzw. Tangentialräume für eine beliebige Mannigfaltigkeit M_n ohne den umgebenden euklidischen reellen Vektorraum definieren?

Als Motivation der Definition dient die Möglichkeit „geometrische“ Tangentialvektoren $v_p \in \mathbb{R}_p^{n+1}$ als Richtungsableitungen von Funktionen aufzufassen, d.h. als eine Abbildung $D_v|_p : C^\infty\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) \to \mathbb{R}$ mit

$$D_v|_p f = D_v f(p) := \left.\frac{d}{dt} f(p+tv)\right|_{t=0}.$$

Diese Abbildung ist linear und erfüllt die Produktregel. Der Vektor v_p sei in der Standardbasis geschrieben: $v_p = v^i e_i\big|_p$. Hier, wie auch im Folgenden, wird die Einsteinsche Summenkonvention benutzt, d.h. über sich doppelnde lateinische Indizes, wobei ein Index oben, der andere unten steht, wird summiert. Dann folgt mit der Kettenregel:

$$D_v|_p = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Falls der Vektor v_p schon selbst ein Basisvektor ist, d.h. $v_p = e_j\big|_p$ dann gilt:

$$D_v|_p = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p).$$

Mit dieser Konstruktion im Hintergrund, definiert man Tangentialvektoren und Tangentialräume im Punkt p auf M_n wie folgt:
Eine lineare Abbildung $X : C^\infty(M_n) \to \mathbb{R}$ heißt Derivation in p, falls für alle $f, g \in C^\infty(M_n)$ gilt:

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf.$$

Die Menge aller Derivationen auf $C^\infty(M_n)$ in p bildet einen Vektorraum, der Tangentialraum an M_n in p genannt wird. Dieser wird mit T_pM_n bezeichnet. Die Elemente aus T_pM_n heißen Tangentialvektoren in p.
Für ein Koordinatensystem, das heißt die Komponentenfunktionen $\left\{x^i\right\}$ einer Abbildung $\varphi : \Omega \to U$, $\varphi(p) = \left(x^1(p), \ldots, x^n(p)\right)$ mit $\Omega \subset M_n, U \subset \mathbb{R}^n$ offen, bilden die Vektoren $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, definiert durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = \left(\frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}$$

eine Basis für T_pM_n. Für einen Vektor $X \in T_pM_n$ gilt also im Punkt p:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Seien die als Kovektoren bezeichneten $\left(dx^i\right)_p$ die duale Basis zu $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ des Dualraumes von T_pM_n, dann lässt sich die Metrik g schreiben als

$$g = g_{ij} dx^i dx^j,$$

mit der Koeffizientenmatrix $(g_{ij}) = \left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)$. Die Einträge der inversen Matrix werden mit g^{ij} bezeichnet: $g_{ji}g^{ik} = \delta_j^k$.
Zum Beispiel gilt damit für die euklidische Metrik $\bar{g}$ auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$: $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$.

Im Weiteren soll die Sphäre $\mathbb{S}^n$ mit einer Riemannschen Metrik ausgestattet werden. Die Standardmetrik (auch runde Metrik) g_0 der Sphäre wird durch die euklidische Metrik $\bar{g}$ des umgebenden $\mathbb{R}^{n+1}$ induziert und soll nun näher beschrieben werden.
Dazu sei die Abbildung $\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{N := (0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion der Einheitssphäre. Durch diese wird ein Punkt $p = \left(\xi^1, \ldots, \xi^n, \tau\right) \in \mathbb{S}^n$ auf einen Punkt $u \in \mathbb{R}^n$ abgebildet, wobei $U = (u, 0)$ der Punkt ist, in dem die Gerade durch N und p die Hyperebene $\{\tau = 0\}$ schneidet.
Damit ergeben sich folgende Formeln für π: Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\pi(\xi, \tau) = u = \frac{\xi}{1-\tau}, \qquad \pi^{-1}(u) = (\xi, \tau) = \left(\frac{2u}{|u|^2+1}, \frac{|u|^2-1}{|u|^2+1}\right). \tag{2.1}$$

Die Abbildung π^{-1} kann nun dazu verwendet werden, die Metrik g_0 auf den $\mathbb{R}^n$ „zurückzuziehen“, das heißt es soll die sogenannte „pullback“-Metrik $\left(\pi^{-1}\right)^* g_0$ berechnet werden. Seien dazu $q \in \mathbb{R}^n$ und $V \in T_q\mathbb{R}^n$.

$$\left(\pi^{-1}\right)^* g_0 (V, V) := g_0\left(\pi_*^{-1}V, \pi_*^{-1}V\right) = \bar{g}\left(\pi_*^{-1}V, \pi_*^{-1}V\right). \tag{2.2}$$

Seien $V = V^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\pi^{-1}(u) = (\xi(u), \tau(u))$ und f eine reellwertige Funktion auf der Sphäre, dann berechnet sich definitionsgemäßder sogenannte „push-forward“ π_*^{-1} des Vektors V wie folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\pi_*^{-1}V\right)(f) :=& V^i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(f \circ \pi^{-1}(u)\right) \\
=& V^i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(f(\xi(u), \tau(u))\right) \\
=& \left(V^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial \xi^j} + V^i \frac{\partial \tau}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial \tau}\right) f.
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite ergeben sich folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
V^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} &= V^i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{2u^j}{|u|^2+1}\right) = \frac{2V^j}{|u|^2+1} - \frac{4u^j}{\left(|u|^2+1\right)^2}\sum_k V^k u^k, \\
V^i \frac{\partial \tau}{\partial u^i} &= V^i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{|u|^2-1}{|u|^2+1}\right) = \frac{4\sum_k V^k u^k}{\left(|u|^2+1\right)^2}.
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (2.2):

$$\bar{g}\left(\pi_*^{-1}V, \pi_*^{-1}V\right) = \sum_{j=1}^n \left(V^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i}\right)^2 + \left(V^i \frac{\partial \tau}{\partial u^i}\right)^2 = \frac{4|V|^2}{\left(|u|^2+1\right)^2}.$$

Also

$$\left(\pi^{-1}\right)^* g_0 = \frac{4}{\left(|u|^2+1\right)^2}\bar{g}, \tag{2.3}$$

wobei $\bar{g}$ jetzt die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

2.1.2 Die kovariante Ableitung

Ziel dieses Abschnittes soll es sein, der Ableitung eines Vektorfeldes auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit entlang eines anderen Vektorfeldes einen Sinn zu geben. Grundsätzlich besteht das Problem, dass für verschiedene Punkte p_i auf M_n die Tangentialvektoren in verschiedenen Tangentialebenen $T_{p_i}M_n$, das heißt in verschiedenen Vektorräumen, liegen. Für eine sinnvolle Ableitung muss also ein Weg gefunden werden, diese zu „verbinden". Dies führt zu dem Begriff des Zusammenhangs auf einer Mannigfaltigkeit. Wird die Mannigfaltigkeit zusätzlich mit einer Metrik g ausgestattet, ist es möglich, einen spezielleren Zusammenhang zu wählen: den Levi-Civita-Zusammenhang. Dieser soll hier beschrieben werden.
Sei dazu das Tangentialbündel TM_n einer Mannigfaltigkeit defniert als die disjunkte Vereinigung der Tangentialräume in allen Punkten p auf M_n:

$$TM_n := \bigcup_{p\in M_n} \{p\} \times T_pM_n =: \bigsqcup_{p\in M_n} T_pM_n.$$

Die natürliche Projektion $\pi : TM_n \to M_n$ mit $(p, X_p) \mapsto p$, wobei $X_p \in T_pM_n$, ist eine glatte Abbildung, die jedem Vektor in T_pM_n den Punkt zuordnet, an den er tangential ist. Ein glattes Vektorfeld ist ein Schnitt im Tangentialbündel, d.h. eine glatte Abbildung $X : M_n \to TM_n$ mit $p \mapsto X_p$ und der Eigenschaft

$$\pi \circ X = Id_{M_n}.$$

Die Menge aller glatten Vektorfelder auf M_n wird mit $\mathscr{T}(M_n)$ bezeichnet. Seien $X, Y, Z \in \mathscr{T}(M_n)$ und $f, g \in C^\infty(M_n)$, dann definiert die Abbildung

$$(X,Y) \overset{\nabla}{\mapsto} \nabla_X Y \in \mathscr{T}(M_n)$$

mit den Eigenschaften

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$
2. $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

einen Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit. $\nabla_X Y$ heißt kovariante Ableitung von Y in Richtung von X. Der Begriff des Tangentialbündels kann auf ko- und kontravariante Tensorbündel beliebiger Ordnung auf der Mannigfaltigkeit verallgemeinert werden und somit kann auch die kovariante Ableitung von Tensorfeldern definiert werden. Für ein 2-fach kovariantes Tensorfeld A und ein festes Vektorfeld X ist die kovariante Ableitung von A in Richtung X definiert durch

$$(\nabla_X A)(Y,Z) := \underbrace{\nabla_X (A(Y,Z))}_{=X(A(Y,Z))} - A(\nabla_X Y, Z) - A(X, \nabla_X Z).$$

Das sich daraus ergebende 3-fach kovariante Tensorfeld ∇A, definiert durch

$$(\nabla A)(X,Y,Z) := (\nabla_X A)(Y,Z)$$

heißt totale kovariante Ableitung von A. Wie sich herausstellt, existiert auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ein eindeutiger Zusammenhang, der die folgenden Eigenschaften bezüglich der Metrik erfüllt:

4. $\nabla_X g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Verträglichkeit mit der Metrik g),
5. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] := XY - YX$ (Symmetrie).

Dieser Zusammenhang heißt Levi-Civita-Zusammenhang. Eigenschaft 4 zeigt das Verschwinden der totalen kovarianten Ableitung der Metrik: $\nabla g = 0$.
Für das Rechnen in Koordinaten, das heißt $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &\overset{1.}{=} X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \overset{3.}{=} X^i Y^j \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}}_{:=\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}} + X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= X^i \left(Y^j \Gamma^k_{ij} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^k\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.\end{aligned}$$

Also

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y^k = Y^j \Gamma^k_{ij} + \partial_i Y^k. \tag{2.4}$$

Dabei heißen die so definierten Funktionen Γ^k_{ij} Christoffel-Symbole, die sich mit Hilfe der Metrik wie folgt ausrechnen lassen:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{k\ell}\left(\partial_j g_{i\ell} + \partial_i g_{j\ell} - \partial_\ell g_{ij}\right), \tag{2.5}$$

$$\Gamma^i_{ik} = \partial_k \left(\log \sqrt{\det(g)}\right). \tag{2.6}$$

Die kovariante Ableitung einer skalaren, differenzierbaren Funktion $f : M_n \to \mathbb{R}$, die ein 0-fach ko- und kontravarianter Tensor ist, ist nichts anderes als das Differential $df = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ der Funktion mit $\nabla f(X) = \nabla_X f = X(f)$ und somit ein 1-fach kovarianter Tensor. Der Gradient $\operatorname{grad} f$ ist dann als derjenige Tangentialvektor definiert, der für alle $X \in \mathscr{T}(M_n)$

$$g(\operatorname{grad} f, X) = X(f)$$

erfüllt. In Koordinaten mit $X = X^i \partial_i$:

$$\begin{aligned} g\left(X^i\partial_i, \left(g^{k\ell}\partial_\ell f\right)\partial_k\right) &= g_{rs} dx^r \left(X^i \partial_i\right) dx^s \left(\left(g^{k\ell}\partial_\ell f\right)\partial_k\right) \\ &= g_{ik} X^i g^{k\ell}\partial_\ell f = X^\ell \partial_\ell f = X(f).\end{aligned}$$

Also

$$\operatorname{grad} f = \left(g^{k\ell}\partial_\ell f\right)\partial_k =: \nabla^k f \partial_k. \tag{2.7}$$

Die zweite kovariante Ableitung von f ist gegeben mit $\nabla^2 f := \nabla\nabla f$. Dabei gilt:

$$\left(\nabla^2 f\right)(X,Y) := \nabla_X (\nabla f(Y)) - \nabla f(\nabla_X Y) = \nabla_X \nabla_Y f - (\nabla_X Y)(f).$$

Wieder in Koordinaten mit $X = \partial_i, Y = \partial_j$ ergibt sich:

$$\nabla_i \nabla_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{2.8}$$

Der Laplace-Beltrami-Operator von f wird definiert durch:

$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f), \tag{2.9}$$

wobei die Divergenz eine Vektorfeldes X definiert ist als die Spur der Abbildung $Y \mapsto \nabla_Y X$. In Koordinaten:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(X) =& \nabla_{\partial_i} X^i \overset{(2.4)}{=} X^j \Gamma^i_{ij} + \partial_i X^i \overset{(2.6)}{=} \partial_i X^i + X^j \partial_j \left(\log \sqrt{\det(g)}\right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \partial_j \left(X^j \sqrt{\det(g)}\right).\end{aligned}$$

Zusammengesetzt gilt damit für den Laplace-Beltrami-Operator von f:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \partial_j \left(\sqrt{\det(g)} g^{ji} \partial_i f\right). \tag{2.10}$$

2.1.3 Krümmungen

Um ein Maßfür die „Gekrümmtheit" einer Riemannschen Mannigfaltigkeit zu finden, betrachtet man folgenden Ausdruck für Vektorfelder auf dem euklidischen $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_X \left(Y Z^k \partial_k\right) - \nabla_Y \left(X Z^k \partial_k\right) = X Y Z^k \partial_k - Y X Z^k \partial_k = \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Diese Relation wird für allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten sicherlich nicht gelten, da in diesem Fall die Christoffel-Symbole nicht verschwinden. Somit definiert man die Krümmung R einer Riemannschen Manngifaltigkeit M_n wie folgt: $R : \mathscr{T}(M_n) \times \mathscr{T}(M_n) \times \mathscr{T}(M_n) \to \mathscr{T}(M_n)$ mit

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Dabei ist R ein 3-fach kovariantes und 1-fach kontravariantes Tensorfeld, dessen Koeffizienten durch

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^\ell_{kij} \partial_\ell$$

definiert sind. Diese lassen sich in Koordinaten mit Hilfe der Christoffel-Symbole ausrechnen

$$R^k_{\ell ij} = \partial_i \Gamma^k_{j\ell} - \partial_j \Gamma^k_{i\ell} + \Gamma^k_{im} \Gamma^m_{j\ell} - \Gamma^k_{jm} \Gamma^m_{i\ell} \tag{2.11}$$

und es gilt für die Komponenten X^k eines Vektorfeldes:

$$\nabla_i \nabla_j X^k - \nabla_j \nabla_i X^k = R^k_{\ell ij} X^\ell \tag{2.12}$$

mit

$$\nabla_i \nabla_j X^k = \partial_i \left(\nabla_j X^k\right) + \Gamma^k_{i\ell} \nabla_j X^\ell - \Gamma^\ell_{ij} \nabla_\ell X^k.$$

Durch Kontraktion, das heißt Spurbildung, lassen sich noch zwei weitere wichtige Krümmungstensoren finden:

- Die Ricci-Krümmung *Ric*, gegeben durch:

$$R_{ij} = R^k_{ikj}, \tag{2.13}$$

- und nach nochmaliger Kontraktion, die skalare Krümmung S:

$$S = R_{ij} g^{ij}. \tag{2.14}$$

Außerdem erhält man durch Erniedrigen des kontravarianten Indizes von R^{ℓ}_{kij} einen 4-fach kovarianten Tensor, den Riemannschen Krümmungstensor mit den Koeffizienten:

$$R_{k\ell ij} = g_{km} R^{m}_{\ell ij}.$$

Zurück zur Einheitssphäre $\mathbb{S}^n$ ausgestattet mit der Standardmetrik $g_0 = 4(1+|x|^2)^{-2}\delta_{ij}$ über die stereographische Projektion $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$. Mit Gleichung (2.5) ergeben sich die Christoffelsymbole zu:

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\partial_j \frac{4\delta_{i\ell}}{\left(1+|x|^2\right)^2} + \partial_i \frac{4\delta_{j\ell}}{\left(1+|x|^2\right)^2} - \partial_\ell \frac{4\delta_{ij}}{\left(1+|x|^2\right)^2} \right) \\ &= \frac{2}{1+|x|^2} \left(-\delta_{ik} x_j - \delta_{jk} x_i + \delta_{ij} x_k \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Gleichung (2.11) für die Koeffizienten von R:

$$R^{\ell}_{kij} = \frac{4}{\left(1+|x|^2\right)^2} \left(\delta_{jk}\delta_{i\ell} - \delta_{j\ell}\delta_{ik}\right) \quad \text{bzw.} \quad R_{k\ell ij} = \frac{16}{\left(1+|x|^2\right)^4} \left(\delta_{j\ell}\delta_{ik} - \delta_{jk}\delta_{i\ell}\right), \tag{2.15}$$

und für die Ricci- bzw. skalare Krümmung der Sphäre:

$$R_{ij} = (n-1)\frac{4\delta_{ij}}{\left(1+|x|^2\right)^2} = (n-1)\, g_{ij} \quad \text{bzw.} \quad S = (n-1)\, g_{ij} g^{ij} = (n-1)\, n. \tag{2.16}$$

2.1.4 Konforme Metrikwechsel und der Paneitz-Operator

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M_n ist es möglich verschiedene Metriken zu definieren. Seien g_1 und g_2 zwei Metriken auf M_n, dann heißen sie konform zueinander, falls eine positive Funktion $\rho \in C^\infty(M_n)$ exisitiert, so dass gilt:

$$g_2 = \rho g_1,$$

bzw. für eine Funktion $w \in C^\infty(M_n)$

$$g_w := \mathrm{e}^{2w} g_1. \tag{2.17}$$

Anschaulich bleiben bei einem solchen Wechsel die Winkel zwischen zwei Vektoren invariant, die Länge eines Vektors kann sich allerdings ändern. Weiter heißen dementsprechend zwei Mannigfaltigkeiten $\left(M^1, g_1\right)$ und $\left(M^2, g_2\right)$ konform äquivalent, falls ein Diffeomorphismus $\varphi : M^1 \to M^2$ existiert, so dass die „pullback"-Metrik $\varphi^* g_2$ konform zu g_1 ist.
Ein Beispiel für konform äquivalente Mannigfaltigkeiten sind der $\mathbb{R}^n$ und die Sphäre $\mathbb{S}^n$, denn nach Gleichung (2.3) gilt: $\varphi^* g_0 = 4(1+|x|^2)^{-2}\bar{g}$.
Nun stellt sich die Frage, wie sich die Differentialoperatoren auf einer Mannigfaltigkeit unter einem

konformen Metrikwechsel ändern, da sie, wie im letzten Abschnitt gesehen, stark von der zugrunde gelegten Metrik abhängen. Aus diesem Grund werden die Operatoren mit dem Indizes g bzw. g_w versehen, bei Eindeutigkeit werden sie weggelassen. Dieser Sachverhalt motiviert folgende Definition.

Definition 2.1. Sei (M_n, g) eine kompakte und geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei A ein selbstadjungierter, geometrischer Differentialoperator, d.h. der Operator ist abhängig von den geometrischen Größen auf (M_n, g). Dann heißt A konform kovariant, falls bei einem konformen Wechsel der Metrik $g_w := \mathrm{e}^{2w} g$ für die korrespondierenden Operatoren A_{g_w} und A gilt: Es existieren a, b, so dass für alle $\varphi \in C^\infty(M_n)$

$$A_{g_w}(\varphi) = \mathrm{e}^{-bw} A(\mathrm{e}^{aw}\varphi). \tag{2.18}$$

Beispiel 2.2. Der Laplace-Beltrami-Operator in zwei Dimensionen erfüllt

$$\Delta_{g_w} = \mathrm{e}^{-2w}\Delta_g,$$

da:

$$\begin{aligned}
\Delta_{g_w} u &= \frac{1}{\sqrt{\det(\mathrm{e}^{2w} g)}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathrm{e}^{-2w} g^{ij} \sqrt{\det(\mathrm{e}^{2w} g|)} \frac{\partial}{\partial x_j} u\right) \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{2w}\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathrm{e}^{-2w} g^{ij} \mathrm{e}^{2w} \sqrt{\det(g)} \frac{\partial}{\partial x_j} u\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-2w}}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij} \sqrt{\det(g)} \frac{\partial}{\partial x_j} u\right) \\
&= \mathrm{e}^{-2w}\Delta_g u.
\end{aligned}$$

Das heißt, er ist konform kovariant mit $(a, b) = (0, 2)$.

Ein konform kovarianter Differentialoperator der Ordnung 4 wurde von Paneitz entdeckt [30] und nach ihm benannt:

Satz und Definition 2.3 (Paneitz-Operator). *Sei (M_n, g) eine glatte, Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $n > 2$. Sei $g_w = \mathrm{e}^{2w} g$ ein konformer Metrikwechsel. Dann gilt für alle $\varphi \in C^\infty(M_n)$:*

$$\mathrm{e}^{\frac{n+4}{2}w} \mathbb{P}_n^{g_w} \varphi = \mathbb{P}_n^g \left(\mathrm{e}^{\frac{n-4}{2}w} \varphi\right), \tag{2.19}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n^g \varphi :=& \Delta_g^2 \varphi - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\left(-a_n R_g^{ij} + b_n g^{ij} S_g\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi \right) \\
&+ \left((n-4) c_n \Delta_g S_g - (n-4) d_n |Ric_g|_g^2 + (n-4) e_n S_g^2 \right) \varphi
\end{aligned} \tag{2.20}$$

mit

$$\begin{aligned}
a_n :=& \frac{4}{n-2}, \quad b_n := \frac{n^2 - 4n + 8}{2(n-1)(n-2)}, \quad c_n := \frac{-1}{4(n-1)}, \quad d_n := \frac{1}{(n-2)^2}, \\
e_n :=& \frac{n^3 - 4n^2 + 16n - 16}{16(n-1)^2(n-2)^2}
\end{aligned}$$

und

$$|Ric_g|_g^2 = g^{ij} g^{kl} R_{ik} R_{jl}$$

als Hilbert-Schmidt-Norm der Ricci-Krümmung bezüglich der Metrik g.
Für $n = 4$ gilt also:

$$\mathbb{P}_4^g \varphi = \Delta_g^2 \varphi - 2 \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\left(\frac{1}{3} g^{ij} S_g - R_g^{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi \right), \tag{2.21}$$

und für alle $\varphi \in C^\infty(M_n)$

$$e^{4w} \mathbb{P}_4^{g_w} \varphi = \mathbb{P}_4^g \varphi$$

das heißt, $\mathbb{P}_4^g$ ist konform kovariant mit $(a,b) = (0,4)$.

Definiert man die Q-Krümmung einer vierdimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit durch

$$Q_g := \frac{1}{12} \left(-\Delta_g S_g - 3 |Ric_g|_g^2 + S_g^2 \right), \tag{2.22}$$

dann erfüllt der konform kovariante Paneitz-Operator $\mathbb{P}_4^g$ folgende partielle Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$\mathbb{P}_4^g w + 2Q_g = 2Q_{g_w} e^{4w}. \tag{2.23}$$

Die Q-Krümmung wird auch häufig als Branson's Q-Krümmung bezeichnet, da Branson in [9] den Zusammenhang (2.23) entdeckt hat.
Zurück zur Sphäre $\mathbb{S}^n$: Durch Zurückziehen des Operators $(-\Delta)^{\frac{n}{2}}$ mit Hilfe der stereographischen Projektion von $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ nach $(\mathbb{S}^n, g_0)$ konnten Branson [7] und Beckner [5] eine explizite Formel für den Paneitz-Operator $\mathbb{P}_4^{g_0}$ auf $\mathbb{S}^n$ angeben.
Speziell für die vierdimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^4$ mit der Standardmetrik g_0 und den Formeln (2.16) für die Ricci- bzw. skalare Krümmung ergibt sich der Paneitz-Operator $\mathbb{P}_4^{g_0}$ mit Gleichung (2.21) zu:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_4^{g_0} \varphi &= \Delta_{g_0}^2 \varphi - 2 \frac{1}{\sqrt{\det(g_0)}} \partial_j \left(\sqrt{\det(g_0)} \left(\frac{12}{3} g_0^{ij} - 3 g_0^{ij} \right) \partial_i \varphi \right) \\ &= \Delta_{g_0}^2 \varphi - 2 \Delta_{g_0} \varphi, \end{aligned} \tag{2.24}$$

sowie die Q-Krümmung auf $\mathbb{S}^4$:

$$\begin{aligned} Q_{g_0} =& \frac{1}{12} \left(-\Delta_{g_0}(12) - 3 |3g_0|_{g_0}^2 + 12^2 \right) = \frac{1}{12} \Big(-3 g_0^{ij} \underbrace{g_0^{kl} g_{ik}^0}_{=\delta_i^l} g_{jl}^0 3^2 + 144 \Big) \\ =& \frac{1}{12} \Big(-27 \underbrace{g_0^{ij} g_{ji}^0}_{=4} + 144 \Big) = 3. \end{aligned}$$

Damit wird Gleichung (2.23) zu:

$$\mathbb{P}_4^{g_0} w + 6 = 2Q_{g_w} e^{4w} \tag{2.25}$$

bzw. mit Gleichung (2.24) und $Q := 2Q_{g_w}$:

$$\Delta_{g_0}^2 w - 2\Delta_{g_0} w + 6 = Q e^{4w}. \tag{2.26}$$

2.2 Sobolevräume auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wird eine kurze Einführung in die Theorie der Sobolev-Räume auf Mannigfaltigkeiten gegeben. Diese sollen, analog zum $\mathbb{R}^n$, als Abschluss von Funktionenräumen hinreichend glatter Funktionen auf der Mannigfaltigkeit bezüglich einer Integral-Norm definiert werden. Daher ist es notwendig, das Lebesgue-Integral einer Funktion auf einer Mannigfaltgikeit zu verstehen:

Definition 2.4 (Lebesgue-Integral). Sei (M_n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Karte (Ω, φ) und dem Koordinatensystem $\left\{x^i\right\}$, das heißt für alle $p \in \Omega \subset M_n$ gilt

$$\varphi(p) = \left(x^1(p), \ldots, x^n(p)\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Für eine glatte Funktion f auf M_n mit kompaktem Träger in Ω sei das Lebesgue-Integral von f definiert als

$$\int_{M_n} f dv_g := \int_{\varphi(\Omega)} \left(\sqrt{\det(g)} f\right) \circ \varphi^{-1} dx^1 dx^2 \cdots dx^n.$$

Sei weiter $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ein Atlas für M_n und $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ eine der Überdeckung $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ untergeordnete Teilung der Eins, d.h. es gilt für alle $i \in I$:

1. $\operatorname{supp} \alpha_i \subset \Omega_i$;
2. jeder Punkt p besitzt eine Umgebung U, so dass $U \cap \operatorname{supp} \alpha_i = \emptyset$, außer für eine endliche Auswahl von α_i;
3. $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$.

Dann definiert man:

$$\int_{M_n} f dv_g := \sum_{i \in I} \int_{M_n} \alpha_i f dv_g,$$

wobei die Summe endlich ist, da der Schnitt von $\operatorname{supp} \alpha_i$ mit dem kompakten Träger von f nur für eine endliche Anzahl an Indizes i nicht leer ist.

Bemerkung 2.5. Für die Existenz einer Teilung der Eins benötigt man die Eigenschaft der Parakompaktheit der Mannigfaltigkeit. Die Teilung der Eins ist dann so glatt, wie die glatte Struktur auf der Mannigfaltigkeit, der Atlas. Für die Mannigfaltigkeiten in dieser Arbeit sei Parakompaktheit immer vorausgesetzt, bei kompakten Mannigfaltigkeiten gilt die Eigenschaft natürlich schon.

Es bleibt zu zeigen, dass das Integral wohldefiniert ist, das heißt es darf weder von der Karte noch von der Teilung der Eins abhängen:

Beweis. Sei dazu (θ, Ψ) eine weitere Karte mit dem Koordinatensystem $\{y^\alpha\}$ und gelte $\operatorname{supp} f \subset \Omega \cap \theta$. Damit kann die Metrik g in den verschiedenen Koordinaten geschrieben werden als

$$g = g_{\alpha\beta}(y)\, dy^\alpha dy^\beta = g_{ij}(x)\, dx^i dx^j$$

und es gilt mit dem Koordinatenwechsel für Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$g_{\alpha\beta}(y) = g\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) =: B^i_\alpha B^j_\beta g_{ij}(x).$$

Also

$$\det(g(y)) = (\det(B))^2 \det(g(x)).$$

Damit und dem Transformationssatz sowie $A_i^\alpha := \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$ folgt:

$$\begin{aligned}\int_{M_n} f dv_g &= \int_{\Psi(\Omega\cap\theta)} \left(\sqrt{\det(g(y))}f\right) \circ \Psi^{-1} dy^1 dy^2 \cdots dy^n \\ &= \int_{\varphi(\Omega\cap\theta)} \left(\sqrt{\det(g(x))}f\right) \circ \varphi^{-1} \underbrace{|\det(B)\det(A)|}_{=1,\text{ da invers zueinander}} dx^1 dx^2 \cdots dx^n \\ &= \int_{M_n} f dv_g.\end{aligned}$$

Betrachtet man nun einen weiteren Atlas $\left\{\theta_j, \Psi_j\right\}_{j\in J}$ mit einer untergeordneten Teilung der Eins $\left\{\beta_j\right\}$ bezüglich der Überdeckung $\left\{\theta_j\right\}_{j\in J}$, dann gilt:

$$\sum_{i\in I}\int_{M_n} \alpha_i f dv_g \overset{\sum_{j\in J}\beta_j=1}{=} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\int_{M_n} (\alpha_i\beta_j) f dv_g \overset{\text{Summen lokal endlich}}{=} \sum_{j\in J}\int_{M_n} \beta_j f dv_g.$$

□

Bemerkung 2.6. Mit $dv_g = \sqrt{\det(g)}dx^1dx^2\cdots dx^n =: \sqrt{\det(g)}dx$ wird das Riemannsche Volumenelement bezeichnet, und mit dx das Lebeguesche Volumenelement des $\mathbb{R}^n$. Falls die Metrik eindeutig ist, wird dieses im Folgenden weggelassen.

Definition 2.7. Sei (M_n, g) eine glatte, Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Für eine reelle Funktion $w \in C^k(M_n)$, $k \in \mathbb{N}_0$, sei $\nabla^k w$ die k-te kovariante Ableitung von w und $\left|\nabla^k w\right|$ die Norm von $\nabla^k w$. Diese ist in lokalen Koordinaten definiert durch

$$\left|\nabla^k w\right|^2 := g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_k j_k} \left(\nabla^k w\right)_{i_1 \ldots i_k} \left(\nabla^k w\right)_{j_1 \ldots j_k}.$$

Bemerkung 2.8. Für die Komponenten der kovarianten Ableitung existieren verschiedene Notationskonventionen. So werden in dieser Arbeit, wie auch im vorangegangenen Abschnitt, die Komponenten der ersten kovarianten Ableitung mit

$$\nabla_i w = (\nabla w)_i = \partial_i w$$

und die Komponenten der zweiten kovarianten Ableitung mit

$$\nabla_i \nabla_j w = \left(\nabla^2 w\right)_{ij} = \partial_{ij} w - \Gamma_{ij}^k \partial_k w$$

bezeichnet. Außerdem überschneiden sich die Notationen für die k-te kovariante Ableitung $\nabla^k w$ sowie für die k-te Komponente des Gradienten $\nabla^k w = g^{ki}\partial_i w$. Da mit Ausnahme der folgenden Definition der Sobolev-Räume ausschließlich kovariante Ableitungen bis zur Ordnung 2 vorkommen bezeichnet im folgenden, wie auch im vorangegangen, Kapitel $\nabla^k w$ die k-te Komponente des Gradienten $\operatorname{grad} w$.

Damit ist es nun möglich Sobolev-Räume auf Mannigfaltigkeiten einzuführen:

Definition 2.9 (Sobolev-Raum). Sei $k, \ell \in \mathbb{N}_0,\ p \geq 1$. Der Sobolev-Raum $W^{k,p}(M_n)$ ist definiert als die Vervollständigung des Vektorraumes

$$\begin{aligned}C^{k,p}(M_n) &:= \left\{ w \in C^\infty(M_n)\,|\forall \ell \leq k: \ \left|\nabla^\ell w\right| \in L^p(M_n) \right\} \\ &= \left\{ w \in C^\infty(M_n)\,|\forall \ell \leq k: \ \int_{M_n} \left|\nabla^\ell w\right|^p dv_g < \infty \right\}\end{aligned}$$

bezüglich der Norm

$$\|w\|_{W^{k,p}} := \sum_{\ell=0}^{k} \left\|\nabla^\ell w\right\|_{L^p} = \sum_{\ell=0}^{k} \left(\int_{M_n} \left|\nabla^\ell w\right|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Falls M_n eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, folgt für alle k und $p \geq 1$: $C^{k,p}(M_n) = C^\infty(M_n)$. Analog zum $\mathbb{R}^n$ gilt für den Spezialfall $p = 2$:

Proposition 2.10. *Für $p = 2$ ist $W^{k,2}(M_n)$ ein Hilbertraum mit der durch das Skalarprodukt*

$$\langle w, v \rangle := \sum_{\ell=0}^{k} \int_{M_n} \left(g^{i_1 j_1} \dots g^{i_\ell j_\ell} \left(\nabla^\ell w\right)_{i_1 \dots i_\ell} \left(\nabla^\ell v\right)_{j_1 \dots j_\ell} \right) dv_g$$

induzierten Norm

$$\|w\|_{W^{k,2}} = \left(\sum_{\ell=0}^{k} \left\|\nabla^\ell w\right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dieser wird mit $H^k(M_n)$ bezeichnet.

Als weitere Verallgemeinerungen ergeben sich die folgenden Einbettungssätze für Sobolev-Räume auf Mannigfaltigkeiten:

Satz 2.11 (Rellich-Kondrachov). *Sei M_n eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Seien $0 \leq \ell \leq k,\ \ell, k \in \mathbb{N}$ und $w \in W^{k,p}(M_n)$. Falls*

$$k - \ell < \frac{n}{p}$$

und

$$\frac{1}{p} - \frac{k-\ell}{n} \leq \frac{1}{q} \tag{2.27}$$

dann ist die Einbettung $W^{k,p}(M_n) \hookrightarrow W^{\ell,q}(M_n)$ stetig. Für $\ell < k$ und (2.27) strikt ist die Einbettung sogar kompakt. Außerdem gilt für $p > n$:

$$w \in C^{k-1}(M_n).$$

Bemerkung 2.12. Für $n = 4$ und $p = 2, k = 1$ und $\ell = 0$ ist die Einbettung $H^1 \hookrightarrow L^2$ kompakt. Da die Einbettung $H^2 \hookrightarrow H^1$ stetig ist, folgt: $H^2 \hookrightarrow L^2$ ist kompakt.

Lemma 2.13 (Poincarésche Ungleichung). *Sei (M_n, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei $q \in [1, n)$. Dann existiert eine positive Konstante $C = C(M_n, g, q)$, so dass für alle $w \in W^{1,q}(M_n)$ gilt:*

$$\left(\int_{M_n} |w - \bar{w}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{M_n} |\nabla w|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.28}$$

Dabei ist $\bar{w} := \fint_{M_n} w := \frac{1}{vol(M_n)} \int_{M_n} w$.

Damit lässt sich nun die „partielle Integration“ auf Mannigfaltigkeiten beweisen:

Lemma 2.14. *Sei (M_n, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt für $u, v \in C^2(M_n)$:*

$$\int_{M_n} (\Delta_g u) v \, dv_g = - \int_{M_n} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g \, dv_g = \int_{M_n} u (\Delta_g v) \, dv_g \tag{2.29}$$

wobei $\langle \nabla u, \nabla v \rangle_g = g^{ij} \partial_i u \partial_j v$.

Beweis. Sei $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ein Atlas auf M_n und $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ eine der Überdeckung (endlich) $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ untergeordnete, glatte Teilung der Eins. Dann zeigt man mit $\tilde{u} := u \circ \varphi^{-1}$:

$$\int_{M_n} (\Delta_g u) v \, dv_g = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(\Omega_i)} \tilde{\alpha}_i \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{\det(g)} g^{js} \frac{\partial}{\partial x^s} \tilde{u} \right) \tilde{v} \sqrt{\det(g)} dx.$$

Partielle Integration der einzelnen Summanden ergibt:

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi_i(\Omega_i)} \tilde{\alpha}_i \partial_j \left(\sqrt{\det(g)} g^{js} \partial_s \tilde{u} \right) \tilde{v} dx \\
&= - \int_{\varphi_i(\Omega_i)} \partial_j (\tilde{\alpha}_i \tilde{v}) \left(\sqrt{\det(g)} g^{js} \partial_s \tilde{u} \right) dx \\
&= - \int_{\varphi_i(\Omega_i)} (\partial_j \tilde{\alpha}_i) \tilde{v} g^{js} \partial_s \tilde{u} \sqrt{\det(g)} dx - \int_{\varphi_i(\Omega_i)} \tilde{\alpha}_i g^{js} \partial_s \tilde{u} \partial_j \tilde{v} \sqrt{\det(g)} dx
\end{aligned}$$

wobei die Randterme verschwinden, da supp $\alpha_i \subset \Omega_i$. Oben eingesetzt folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{M_n} (\Delta_g u) v \, dv_g &= - \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(\Omega_i)} (\partial_j \tilde{\alpha}_i) \tilde{v} g^{js} \partial_s \tilde{u} \sqrt{\det(g)} dx \\
&\quad - \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(\Omega_i)} \tilde{\alpha}_i g^{js} \partial_s \tilde{u} \partial_j \tilde{v} \sqrt{\det(g)} dx \\
&= \int_{\varphi_i(\Omega_i)} \underbrace{\partial_j \left(\left(\sum_{i \in I} \alpha_i \right) \circ \varphi^{-1} \right)}_{=0,\ \sum_{i \in I} \alpha_i = 1} \tilde{v} g^{js} \partial_s \tilde{u} \sqrt{\det(g)} dx \\
&\quad - \int_{M_n} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g \, dv_g \\
&= - \int_{M_n} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g \, dv_g
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Satz 2.15. *Sei M_n eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $w \in H^2(M_n)$. Die reellwertige Abbildung*

$$w \mapsto \left(\|w\|_{L^2}^2 + \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \|\Delta w\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist eine Norm auf $H^2(M_n)$, welche äquivalent zu $\|.\|_{H^2}$ ist.

Beweis. Die Normeigenschaften der Abbildung ergeben sich aus den Normeigenschaften der L^p-Norm.
Zur Äquivalenz.

Behauptung.

$$n \left| \nabla^2 w \right|^2 \geq |\Delta w|^2 \tag{2.30}$$

Beweis dazu: Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix. $\langle A, B \rangle := sp\left(AB^T\right)$ definiert ein Skalarprodukt für die reellen $n \times n$ Matrizen. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt:

$$\left| sp\left(AB^T\right) \right|^2 \leq sp\left(AA^T\right) sp\left(BB^T\right)$$

bzw. speziell mit der Einheitsmatrix:

$$|sp(A)|^2 \leq n \cdot sp\left(AA^T\right).$$

Wendet man die Ungleichung auf die Matrix mit den Einträgen

$$A_j^i = g^{ki} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^k \partial x^j} - \Gamma_{kj}^m \frac{\partial w}{\partial x^m} \right)$$

an, so folgt mit

$$\begin{aligned} \left| \nabla^2 w \right|^2 =& g^{ij} g^{k\ell} \nabla_i \nabla_k w \nabla_j \nabla_\ell w \\ =& g^{ij} g^{k\ell} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma_{ik}^m \frac{\partial w}{\partial x^m} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^j \partial x^\ell} - \Gamma_{j\ell}^s \frac{\partial w}{\partial x^s} \right) \end{aligned}$$

und

$$\Delta w = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial w}{\partial x^k} \right)$$

die Behauptung.

Behauptung.

$$\int_{M_n} \left| \nabla^2 w \right|^2 = \int_{M_n} |\Delta w|^2 - \int_{M_n} Ric(\nabla w, \nabla w) \quad \forall w \in C^\infty(M_n) \tag{2.31}$$

Beweis dazu: Aus Gleichung (2.12) mit den Komponenten des Gradienten grad $w = \nabla^k w \frac{\partial}{\partial x^k} = g^{k\ell} \frac{\partial w}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^\ell}$ ergibt sich:

$$\nabla_i \nabla_j \nabla^k w - \nabla_j \nabla_i \nabla^k w = R_{\ell ij}^k \nabla^\ell w.$$

Durch Kontraktion der Gleichung, d.h. $k = i$, folgt:

$$\nabla_i \nabla_j \nabla^i w - \nabla_j \nabla_i \nabla^i w = R_{\ell j} \nabla^\ell w = R_{ij} \nabla^i w.$$

Multiplikation mit $\nabla^j w$ und Integration:

$$\int_{M_n} \nabla_i \nabla_j \nabla^i w \nabla^j w - \int_{M_n} \nabla_j \nabla_i \nabla^i w \nabla^j w = \int_{M_n} R_{ij} \nabla^i w \nabla^j w.$$

Partielle Integration des zweiten Integrals liefert:

$$\int_{M_n} \nabla_i \nabla_j \nabla^i w \nabla^j w + \int_{M_n} \nabla_i \nabla^i w \nabla_j \nabla^j w = \int_{M_n} Ric\,(\nabla w, \nabla w)\,. \tag{2.32}$$

Für das erste Integral gilt:

$$\begin{aligned}\int_{M_n} \nabla_i \nabla_j \nabla^i w \nabla^j w \quad &= \quad \int_{M_n} g^{js} \nabla_i \nabla_j \nabla^i w \nabla_s w \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} - \int_{M_n} g^{js} \nabla_j \nabla^i w \nabla_i \nabla_s w - \int_{M_n} \left(\nabla_i g^{js}\right) \nabla_j \nabla^i w \nabla_s w.\end{aligned}$$

Da die Metrik g verträglich mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ist, gilt:

$$\nabla g = 0.$$

Differenziert man die Gleichung $g_{\ell j} g^{js} = \delta_\ell^s$ kovariant, ergibt sich:

$$\underbrace{\left(\nabla_i g_{\ell j}\right)}_{=0} g^{js} + g_{\ell j} \left(\nabla_i g^{js}\right) = 0.$$

Multiplikation mit $g^{\ell j}$ zeigt:

$$\nabla_i g^{js} = 0.$$

Damit verschwindet das zweite Integral und nach nochmaliger Anwendung des Argumentes gilt:

$$\int_{M_n} \nabla_i \nabla_j \nabla^i w \nabla^j w = - \int_{M_n} g^{js} g^{i\ell} \nabla_j \nabla_\ell w \nabla_i \nabla_s w.$$

Eingesetzt in (2.32) liefert:

$$-\int_{M_n} \left|\nabla^2 w\right|^2 + \int_{M_n} (\Delta w)^2 = \int_{M_n} Ric\,(\nabla w, \nabla w)$$

und damit die behauptete Identität (2.31).

Da M_n kompakt, kann man eine Konstante C finden, so dass gilt: $Ric \geq -Cg$. In (2.31):

$$\begin{aligned}\int_{M_n} \left|\nabla^2 w\right|^2 &\leq \int_{M_n} |\Delta w|^2 + C \int_{M_n} g\,(\nabla w, \nabla w) \\ &= \int_{M_n} |\Delta w|^2 + C \int_{M_n} |\nabla w|^2\,.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Mit (2.30), (2.33) und der Dichtheit von $C^\infty(M_n)$ in $H^2(M_n)$ folgt die Äquivalenz in $H^2(M_n)$. □

Im Folgenden wird mit $\|.\|_{H^2}$ die Norm $\left(\|.\|_{L^2}^2 + \|\nabla.\|_{L^2}^2 + \|\Delta.\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ bezeichnet.

Lemma 2.16. *Sei M_n eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n.*
Die Teilmenge $\hat{H}^2(M_n) := \left\{v \in H^2(M_n) : \int_{M_n} v = 0\right\} \subset H^2(M_n)$ ist als abgeschlossener (sogar schwach folgenabgeschlossener) Teilraum in $H^2(M_n)$ wieder ein Hilbertraum mit der durch das Skalarprodukt

$$\langle .\,,\,. \rangle_{\hat{H}^2} : \hat{H}^2 \times \hat{H}^2 \to \mathbb{R}, \quad \langle u, v \rangle_{\hat{H}^2} := \langle \Delta u, \Delta v \rangle_{L^2} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2}$$

induzierten Norm $\|u\|_{\hat{H}^2} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{\hat{H}^2}}$, die auf $\hat{H}^2$ äquivalent zur Norm auf $H^2(M_n)$ ist.

Beweis. Die Unterraumeigenschaften für $\hat{H}^2$ sind leicht zu zeigen.
Zur Abgeschlossenheit: Sei (v_k) eine Folge in $\hat{H}^2$ mit $v_k \to v$ in $H^2(M_n)$ für $k \to \infty$. Damit:

$$\left|\int_{M_n} v\right| = \left|\int_{M_n} v - \int_{M_n} v_k\right| \leq \int_{M_n} |v - v_k| \overset{\text{Hölder Ugl.}}{\leq} c\,\|v - v_k\|_{L^2} \leq c\,\|v - v_k\|_{H^2} \to 0$$

für $k \to \infty$, das heißt $\int_{M_n} v = 0$, bzw. $v \in \hat{H}^2$. Da der Teilraum $\hat{H}^2$ eine konvexe Menge in $H^2(M_n)$ ist, folgt die schwache Folgenabgeschlossenheit. Als abgeschlossener Teilraum in $H^2(M_n)$ ist $\hat{H}^2\,(M_n)$ wieder ein Hilbertraum, allerdings mit dem Skalarprodukt, bzw. der Norm auf $H^2(M_n)$. Der Teilraum $\hat{H}^2$ enthält nicht mehr die konstanten Funktionen ungleich Null, sodass die, bezüglich $\langle .\,,\,.\rangle_{H^2}$, „verkürzte“ Bilinearform $\langle .\,,\,.\rangle_{\hat{H}^2}$ zu einem Skalarprodukt auf $\hat{H}^2$ wird. Dazu sei $\langle v,v\rangle_{\hat{H}^2} = 0$ für $v \in \hat{H}^2$, also

$$0 = \int_{M_n} (\Delta v)^2 + \int_{M_n} |\nabla v|^2 .$$

Somit folgt $v \equiv$ konst. und mit $\int_{M_n} v = 0$: $v \equiv 0$. Die restlichen Skalarprodukteigenschaften ergeben sich aus dem L^2-Skalarprodukt.
Zur Norm-Äquivalenz: Sei $v \in \hat{H}^2$.

- Sicherlich gilt $\|v\|_{\hat{H}^2} \leq \|v\|_{H^2}$.
- Außerdem: $\|v\|_{H^2}^2 = \|\Delta v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \overset{\int_{M_n} v=0,\ (2.28)}{\leq} c\,\|v\|_{\hat{H}^2}^2$.

□

Bemerkung 2.17. Analog zu der Norm $\|.\|_{H^2}$ bzw. dem Skalarprodukt $\langle .,.\rangle_{H^2}$ sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} w &\mapsto \left(\alpha\,\|\Delta w\|_{L^2}^2 + \beta\,\|\nabla w\|_{L^2}^2 + \gamma\|w\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ u,v &\mapsto \alpha\,\langle \Delta u, \Delta v\rangle_{L^2} + \beta\,\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2} + \gamma\langle u,v\rangle_{L^2}, \end{aligned}$$

mit $\alpha,\beta,\gamma > 0$ äquivalente Normen bzw. Skalarprodukte auf $H^2(M_n)$.
Auf $\hat{H}^2(M_n)$ sind entsprechend die Abbildungen

$$\begin{aligned} w &\mapsto \left(\alpha\,\|\Delta w\|_{L^2}^2 + \beta\,\|\nabla w\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ u,v &\mapsto \alpha\,\langle \Delta u, \Delta v\rangle_{L^2} + \beta\,\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2}, \end{aligned}$$

mit $\alpha,\beta > 0$ äquvialente Normen bzw. Skalarprodukte zu $\|.\|_{\hat{H}^2}$ bzw. $\langle .,.\rangle_{\hat{H}^2}$ und werden im Folgenden benutzt. Auf $\hat{H}^2(M_n)$ ist sogar $\beta = 0$ möglich:

$$\begin{aligned} \left|\int_{M_n} |\nabla w|^2\right| &= \left|\int_{M_n} w\Delta w\right| \leq \left(\int_{M_n} w^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{M_n} (\Delta w)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{\int_{M_n} v=0,\ (2.28)}{\leq} c\left(\int_{M_n} |\nabla w|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{M_n} (\Delta w)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Also

$$\|\nabla w\|_{L^2} \leq c\,\|\Delta w\|_{L^2} .$$

Kapitel 3
Die verbesserte Beckner-Ungleichung

3.1 Ungleichungen

Sei Ω ein glattes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, dann besagen die klassischen Einbettungssätze von Sobolev [18], dass für $kp < n$ die Einbettung

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega)$$

stetig ist. Hier bezeichne $W_0^{k,p}(\Omega)$ den Abschluss des Funktionenraumes der Funktionen mit kompaktem Träger in Ω und Ableitung der Ordnung k in L^p unter der Norm $(\sum_{|\ell|\le k}\int_\Omega |\nabla^\ell|^p dx)^{1/p}$. Nun stellt sich die Frage, ob die Inklusion im Grenzfall $n = kp$ immer noch gilt, d.h. $W_0^{k,n/k}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Es stellt sich heraus, dass sie nicht gilt: zum Beispiel liegt für $n > 1$ die auf dem Einheitsball unbeschränkte Funktion $w(x) = \log(\log(1+\frac{1}{|x|}))$ in $W_0^{1,n}$.
Dafür konnte Trudinger [33] folgende Variante der „Fast-Beschränktheit“ beweisen: Es existieren Konstanten $\beta(n)$, $C(n)$, so dass für $w \in W_0^{1,n}(\Omega)$ mit
$\int_\Omega |\nabla w|^n dx \le 1$ gilt:

$$\int_\Omega e^{\beta |w|^{\frac{n}{n-1}}} dx \le C(n)|\Omega| \tag{3.1}$$

Dieses Resultat konnte von Moser in [27] noch weiter präzisiert werden: Es existiert eine Konstante $\beta_0 = \beta_0(n) = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$, so dass unter gleichen Bedingungen an w für alle $\beta \le \beta_0$ die Trudinger-Ungleichung (3.1) gilt. Dabei ist ω_{n-1} die $(n-1)$-dimensionale Oberfläche der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$. Die Konstante β_0 ist scharf, das heißt, für alle $\beta > \beta_0$ kann das Integral aus (3.1) unbeschränkt werden. Eine Erweiterung der Ungleichung auf höhere Ableitungen, das heißt für Funktionen in $W^{k,\frac{n}{k}}(\Omega)$ wurde von Adams [1] bewiesen und von Fontana [16] in folgender Form auf kompakte Mannigfaltigkeiten verallgemeinert:

Satz 3.1. *Sei (M_n, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N}$ strikt kleiner als n. Dann existiert eine Konstante $C(k, M_n)$, so dass für alle $w \in W^{k,\frac{n}{k}}(M_n)$ mit $\int_{M_n} w = 0$ und*

$$\begin{cases} \int_{M_n} \left|\nabla \Delta^{\frac{k-1}{2}} w\right|^{\frac{n}{k}} \le 1, \textit{für k ungerade} \\ \int_{M_n} \left|\Delta^{\frac{k}{2}} w\right|^{\frac{n}{k}} \le 1, \textit{für k gerade} \end{cases} \tag{3.2}$$

gilt:

$$\int_{M_n} e^{\beta_0(k,n)|w|^{\frac{n}{n-k}}} \leq C \tag{3.3}$$

wobei

$$\beta_0(k,n) = \begin{cases} \dfrac{n}{\omega_{n-1}} \left(\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^k \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)} \right)^{\frac{n}{n-k}}, \text{für } k \text{ ungerade} \\ \dfrac{n}{\omega_{n-1}} \left(\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^k \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)} \right)^{\frac{n}{n-k}}, \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Weiterhin ist $\beta_0(k,n)$ scharf, das heißt für jedes $\beta \geq \beta_0(k,n)$ kann das Integral in (3.4) *nicht mehr gleichmäßig beschränkt werden.*

Für den Spezialfall einer kompakten 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit und Funktionen in H^2 ergibt sich der von Branson, Chang und Yang [8] zur gleichen Zeit bewiesene Satz:

Satz 3.2. *Sei (M_4, g) eine kompakte, geschlossene Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Konstante $c_0 = c_0(g)$, so dass für alle $w \in H^2(M_4)$ mit $\|\Delta w\|_{L^2} \leq 1$ gilt:*

$$\int_{M_4} e^{32\pi^2|w-\bar{w}|^2} \leq c_0 \cdot \mathrm{vol}(M_4). \tag{3.5}$$

Verzichtet man auf die Einschränkung $\|\Delta w\|_{L^2} \leq 1$ erhält man:

Lemma 3.3. *Sei (M_4, g) eine kompakte, geschlossene Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Konstante $c_0 = c_0(g)$, so dass für alle $w \in H^2(M_4)$ gilt:*

$$\log \fint_{M_4} e^{4(w-\bar{w})} \leq \log c_0 + \frac{1}{8\pi^2} \|\Delta w\|^2_{L^2}. \tag{3.6}$$

Beweis. Mit der Young'schen Ungleichung $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ erhält man

$$\underbrace{4\|\Delta w\|^2_{L^2}}_{a} \cdot \underbrace{(w-\bar{w})\pi^2 64}_{b} \leq 8\|\Delta w\|^4_{L^2} + \frac{64^2}{2}(w-\bar{w})^2\pi^4.$$

Daraus folgt

$$4(w-\bar{w}) \leq \frac{1}{8\pi^2}\|\Delta w\|^2_{L^2} + 32\pi^2 \frac{(w-\bar{w})^2}{\|\Delta w\|^2_{L^2}}.$$

Und schließlich

$$\fint_{M_4} e^{4(w-\bar{w})} \leq \fint_{M_4} e^{\frac{1}{8\pi^2}\|\Delta w\|^2_{L^2}} e^{\frac{1}{\|\Delta w\|^2_{L^2}} 32\pi^2(w-\bar{w})^2}.$$

Sei $u := \frac{w-\bar{w}}{\|\Delta w\|_{L^2}}$, also $\|\Delta u\|_{L^2} \leq 1$. Somit erfüllt u die Vorraussetzungen von Satz 3.2 mit $\bar{u} = 0$. Daraus folgt

$$\fint_{M_4} e^{4(w-\bar{w})} \leq e^{\frac{1}{8\pi^2}\|\Delta w\|^2_{L^2}} c_0 \cdot \mathrm{vol}(M_4),$$

und

$$\log \fint_{M_4} e^{4(w-\bar{w})} \leq \log(c_0 \cdot \mathrm{vol}(M_4)) + \frac{1}{8\pi^2}\|\Delta w\|^2_{L^2}.$$

□

Mit dieser Ungleichung lässt sich nun ein für spätere Anwendungen wichtiges Hilfsmittel beweisen:

Lemma 3.4. *Sei* $\int_{M_4} |\Delta w|^2 \leq c, \int_{M_4} |\Delta w_i|^2 \leq c$ *mit* $\int_{M_4} w_i = 0$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$. *Falls* $w_i \rightharpoonup w$ *in* $H^2(M_4)$ *für* $i \to \infty$, *dann gilt für alle* $f \in L^\infty(M_4)$ *und alle* $p \in \mathbb{R}$:

$$\int_{M_4} f\mathrm{e}^{pw_i} \to \int_{M_4} f\mathrm{e}^{pw}, \qquad i \to \infty. \tag{3.7}$$

Beweis. Mit der Ungleichung

$$|\mathrm{e}^x - 1| \leq |x|\,\mathrm{e}^{|x|} \tag{$*$}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{M_4} |\mathrm{e}^{pw_i} - \mathrm{e}^{pw}| &= \int_{M_4} \mathrm{e}^{pw} \left|\mathrm{e}^{p(w_i-w)} - 1\right| \\
&\overset{(*)}{\leq} \int_{M_4} \mathrm{e}^{pw} p\,|w_i - w|\,\mathrm{e}^{p|w_i-w|} \\
&\overset{\text{Hölder Ugl.}}{\leq} c \underbrace{\left(\int_{M_4} \mathrm{e}^{4pw}\right)^{\frac{1}{4}}}_{\text{beschränkt (Lemma 3.3)}} \underbrace{\left(\int_{M_4} |w_i - w|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\to 0,\ \text{Satz 2.11}} \underbrace{\left(\int_{M_4} \mathrm{e}^{4p|w_i-w|}\right)^{\frac{1}{4}}}_{=:I}.
\end{aligned}$$

Das letzte Integral I ist beschränkt: Die Funktion $(w_i - w)$ liegt in H^2, wobei auf Grund der schwachen Konvergenz von w_i gegen w gilt: $\int_{M_4} (w_i - w) = 0$, $i \to \infty$.
Weiterhin gilt für alle i:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{M_4} |\Delta\,(w_i - w)|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{M_4} (|\Delta w_i| + |\Delta w|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{\text{Minkowski-Ugl.}}{\leq} \left(\int_{M_4} |\Delta w_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{M_4} |\Delta w|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\sqrt{c}.
\end{aligned}$$

Da der Beweis zu Lemma 3.3 analog mit $|.|$ statt $(.)$ funktioniert, folgt mit Lemma 3.3 für $|w_i - w|$: I ist beschränkt. Insgesamt folgt: $\int_{M_4} |\mathrm{e}^{pw_i} - \mathrm{e}^{pw}| \to 0$ und damit die Behauptung. □

Wie sich herausgestellt hat, spielen diese Ungleichungen eine entscheidende Rolle, um das Problem vorgeschriebener Krümmungen auf Sphären zu bearbeiten. Speziell in dieser Arbeit ist die Q-Krümmung auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ von Interesse. Auf der $\mathbb{S}^4$ wird die Ungleichung (3.6) wegen $\mathrm{vol}_4\left(\mathbb{S}^4\right) = (8\pi^2)/3$ daher zu:

$$\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} \leq \log c_0 + \frac{1}{3} \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 + 4 \fint_{\mathbb{S}^4} w. \tag{3.8}$$

Beckner konnte mit seiner Arbeit [5] dieses Resultat noch weiter verbessern: Für alle $w \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ gilt:

$$\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} \leq \frac{1}{3} \fint_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w)\, w + 4 \fint_{\mathbb{S}^4} w. \tag{3.9}$$

Ein alternativer Beweis für diese, nach Beckner benannte Ungleichung wird in [13] von Chang und Yang geführt. Da der Paneitz-Operator nach Gleichung (2.24) auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ gleich $\Delta^2 - 2\Delta$ ist, folgt nach partieller Integration:

$$\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} \leq \frac{1}{3} \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 + \frac{2}{3} \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 + 4 \fint_{\mathbb{S}^4} w. \tag{3.10}$$

Bezieht man die L^2-Norm für die Funktion $w - \bar{w}$ mit ein, erhält man als Folgerung aus der Ungleichung (3.8) folgende von Brendle [10, Proposition 3] bewiesene Ungleichung:

$$\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} \leq \frac{1}{3} \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 + \frac{2}{3} \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 - 4 \fint_{\mathbb{S}^4} (w - \bar{w})^2 + 4 \fint_{\mathbb{S}^4} w + C. \tag{3.11}$$

Der Beweis wird in Abschnitt 3.3.1 dargestellt. Definiert seien nun folgende Mengen:

Definition 3.5. Seien $(x_1, \ldots, x_5)$ die Koordinaten des $\mathbb{R}^5$, in den die Sphäre $\mathbb{S}^4$ eingebettet ist.

$$\mathscr{S} := \left\{ w \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right) \mid \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} x_j = 0, j = 1 \ldots 5 \right\},$$

$$\mathscr{S}_0 := \left\{ w \in \mathscr{S} \mid \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} = 1 \right\}.$$

Für Funktionen $w \in \mathscr{S}$, d.h. zum Beispiel unter Symmetrieannahmen wie $w(-x) = w(x)$, können die Konstanten in den Ungleichungen verbessert werden:
Zurückgehend auf eine Ungleichung von Aubin [2] auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$ konnten Branson, Chang und Yang in [8] eine analoge Ungleichung in der Klasse $\mathscr{S}$ auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ beweisen und den Faktor vor $\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2$ verringern:
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren Konstanten $C_1(\varepsilon)$ und $C_2(\varepsilon)$, so dass für alle $w \in \mathscr{S}$ gilt:

$$\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} \leq C_1(\varepsilon) + \left(\frac{1}{6} + \varepsilon \right) \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 + C_2(\varepsilon) \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 + 4 \fint_{\mathbb{S}^4} w. \tag{3.12}$$

Als Folgerung aus den Ungleichungen (3.11) und (3.12) bewies Brendle [10, Proposition 5] für reelle Konstanten η und C: Für alle $w \in \mathscr{S}$ gilt

$$\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} \leq \left(\frac{1}{3} - \eta \right) \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 + \frac{2}{3} \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 + \fint_{\mathbb{S}^4} w + C.$$

Für die Lösung des Problems der vorgeschriebenen Q-Krümmung auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ wird auf direkte Methoden der Variationsrechnung zurückgegriffen. Das heißt, es wird unerlässlich sein, Kompaktheit, beziehungsweise eine beschränkte Folge in $H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$, zu finden. Wie sich herausstellt, wird dies mit den bisherigen Ungleichungen nicht erreicht, mit der folgenden, verbesserten Beckner-Ungleichung ist dies jedoch möglich. Der Beweis der Ungleichung geht auf eine Arbeit von Wei und Xu [34] zurück und wird nach einigen Vorbetrachtungen über den Paneitz-Operator in Abschnitt 3.3 dargestellt.

Satz 3.6 (Verbesserte Beckner-Ungleichung). *Es existiert eine Konstante $a<1$, so dass für alle $w \in \mathscr{S}$ gilt:*

$$\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} \leq \frac{1}{3}\left(a \fint_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w)\, w + 12 \fint_{\mathbb{S}^4} w\right). \tag{3.13}$$

3.2 Eigenwerte und Eigenfunktionen des Paneitz-Operators $\mathbb{P}_4$

Zur Erinnerung: der Paneitz-Operator $\mathbb{P}_4$ auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ wird für hinreichend glatte Funktionen w durch (2.24) als

$$\mathbb{P}_4 w = -\Delta\,(-\Delta + 2)\, w$$

gegeben. Im Folgenden ist es wichtig, die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Paneitz-Operators auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ zu kennen. Dabei liegt die Vermutung nahe, dass diese eng mit den Eigenwerten und Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators Δ auf $\mathbb{S}^4$ verknüpft sind, wie später gezeigt wird. Zuerst einmal eine variationelle Charakterisierung der Eigenwerte von $\mathbb{P}_4$:

Satz 3.7. *Sei $\mathbb{P}_4$ der Paneitz-Operator auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$. Dann gilt:*

1. *Der Kern von $\mathbb{P}_4$ sind die konstanten Funktionen und $\int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 v)\, v$ ist nichtnegativ für alle $v \in H^2(\mathbb{S}^4)$.*
2. *Der Paneitz-Operator besitzt einen kleinsten, positiven Eigenwert λ_1 mit zugehöriger Eigenfunktion w_1 als Lösung des Eigenwertproblems in folgendem schwachen Sinne: für $w_1 \in \hat{H}^2(\mathbb{S}^4) \setminus \{0\}$ gilt für alle $\varphi \in H^2(\mathbb{S}^4)$*

$$\int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w_1)\, \varphi = \lambda_1 \int_{\mathbb{S}^4} w_1 \varphi. \tag{3.14}$$

Die Eigenfunktion kann in $L^2(\mathbb{S}^4)$ normiert gewählt werden: $\|w_1\|_{L^2} = 1$ und λ_1 ergibt sich als Lösung des Variationsproblems

$$\lambda_1 = \min_{v \in \hat{H}^2 \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 v)\, v}{\int_{\mathbb{S}^4} |v|^2} = \int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w_1)\, w_1. \tag{3.15}$$

Beweis. 1. Sei $\mathbb{P}_4 v = 0$. Dann folgt

$$0 = \int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 v)\, v \overset{\text{part. Int.}}{=} \int_{\mathbb{S}^4} (\Delta v)^2 + 2 \int_{\mathbb{S}^4} |\nabla v|^2$$

und somit $v = \text{konst.}$. Insbesondere gilt für alle $v \in H^2(\mathbb{S}^4)$:

$$\int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 v)\, v \geq 0.$$

2. Zur Positivität von λ_1: Sei die Norm $\|.\|_{\hat{H}^2}$ mit $\alpha = 1$ und $\beta = 2$ gewählt.

$$\lambda_1 = \min_{v \in \hat{H}^2 \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 v)\, v}{\|v\|_{L^2}^2} \overset{\text{part. Int.}}{=} \min_{v \in \hat{H}^2 \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{\hat{H}^2}^2}{\|v\|_{L^2}^2} \overset{\text{Lemma 2.16}}{\geq} \min_{v \in \hat{H}^2 \setminus \{0\}} \frac{c\,\|v\|_{\hat{H}^2}^2}{\|v\|_{\hat{H}^2}^2} = c > 0. \tag{3.16}$$

Dann existiert eine Minimalfolge (v_k) in $\hat{H}^2(\mathbb{S}^4)$ mit $\|v_k\|_{L^2} = 1$ für alle k und $\|v_k\|_{\hat{H}^2}^2 \to \lambda_1$ für $k \to \infty$. Sei k großgenug, so dass $\|v_k\|_{\hat{H}^2}^2 - \varepsilon \leq \lambda_1$ für ein $\varepsilon > 0$. Somit

$$\lambda_1 + \varepsilon \geq \|v_k\|^2_{\hat{H}^2} \overset{\text{Lemma 2.16}}{\geq} c\,\|v_k\|^2_{H^2}\,.$$

Damit ist die Folge (v_k) beschränkt in $H^2(\mathbb{S}^4)$. Nach Auswahl einer Teilfolge (v_k) existiert dann eine Funktion $w_1 \in H^2(\mathbb{S}^4)$ mit $v_k \rightharpoonup w_1$ in $H^2(\mathbb{S}^4)$ für $k \to \infty$. Die Funktion w_1 liegt mit Hilfe der schwachen Konvergenz in $\hat{H}^2(\mathbb{S}^4)$: $0 = \int_{\mathbb{S}^4} v_k \to \int_{\mathbb{S}^4} v$ für $k \to \infty$ und nach Anwendung des Satzes von Rellich-Kondrachov 2.11 folgt die starke Konvergenz von v_k gegen w_1 in L^2. Mit der Stetigkeit der L^2-Norm und der schwachunterhalbstetigen $\hat{H}^2$-Norm sieht man:

$$1 = \lim_{k\to\infty} \|v_k\|_{L^2} = \|w_1\|_{L^2}$$

und

$$\lambda_1 = \liminf_{k\to\infty} \|v_k\|^2_{\hat{H}^2} \geq \|w_1\|^2_{\hat{H}^2}\,.$$

Außerdem gilt $\|w_1\|^2_{\hat{H}^2} \geq \lambda_1$, also $\|w_1\|^2_{\hat{H}^2} = \lambda_1$, d.h. die Variationsaufgabe ist gelöst.
Zu zeigen bleibt: w_1 löst das Eigenwertproblem (3.14). Sei also $\varphi \in \hat{H}^2$ beliebig und $t \in \mathbb{R}$ nahe 0.

$$\begin{aligned}\lambda_1 \leq \frac{\|w_1 + t\varphi\|^2_{\hat{H}^2}}{\underbrace{\|w_1 + t\varphi\|^2_{L^2}}_{\neq 0}} &= \frac{\|w_1\|^2_{\hat{H}^2} + 2t\,\langle w_1, \varphi\rangle_{\hat{H}^2} + t^2\,\|\varphi\|^2_{\hat{H}^2}}{\|w_1\|^2_{L^2} + 2t\,\langle w_1, \varphi\rangle_{L^2} + t^2\,\|\varphi\|^2_{L^2}} \\ &= \frac{\lambda_1 + 2t\,\langle w_1, \varphi\rangle_{\hat{H}^2} + t^2\,\|\varphi\|^2_{\hat{H}^2}}{\underbrace{1 + 2t\,\langle w_1, \varphi\rangle_{L^2} + t^2\,\|\varphi\|^2_{L^2}}_{>0,\ t \text{ nahe } 0}}.\end{aligned}$$

Also

$$\lambda_1 t^2\,\|\varphi\|^2_{L^2} + 2t\lambda_1\,\langle w_1, \varphi\rangle_{L^2} \leq 2t\,\langle w_1, \varphi\rangle_{\hat{H}^2} + t^2\,\|\varphi\|^2_{\hat{H}^2}\,.$$

Division durch $t > 0$ und $t \to 0$ liefert

$$2\lambda_1\,\langle w_1, \varphi\rangle_{L^2} \leq 2\,\langle w_1, \varphi\rangle_{\hat{H}^2}\,.$$

Division durch $t < 0$ und $t \to 0$ liefert

$$2\lambda_1\,\langle w_1, \varphi\rangle_{L^2} \geq 2\,\langle w_1, \varphi\rangle_{\hat{H}^2}\,.$$

Insgesamt folgt für alle $\varphi \in \hat{H}^2$:

$$\lambda_1\,\langle w_1, \varphi\rangle_{L^2} = \langle w_1, \varphi\rangle_{\hat{H}^2}\,. \tag{3.17}$$

Gleichung (3.17) gilt außerdem für alle $\varphi \in H^2$: Sei dazu $\varphi \in H^2$ beliebig. Damit gilt: $(\varphi - \int_{\mathbb{S}^4} \varphi) \in \hat{H}^2$ und weiter

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \langle w_1, \varphi\rangle_{L^2} &= \lambda_1 \int_{\mathbb{S}^4} w_1\varphi - \lambda_1 \int_{\mathbb{S}^4} \varphi \underbrace{\int_{\mathbb{S}^4} w_1}_{=0,\ w_1\in\hat{H}^2} \\
&= \lambda_1 \left\langle w_1, \varphi - \int_{\mathbb{S}^4} \varphi \right\rangle_{L^2} \\
&\overset{(3.17)}{=} \left\langle w_1, \varphi - \int_{\mathbb{S}^4} \varphi \right\rangle_{\hat{H}^2} \\
&= \int_{\mathbb{S}^4} \Delta w_1 \Delta \left(\varphi - \int_{\mathbb{S}^4}\varphi\right) + 2\int_{\mathbb{S}^4} \nabla w_1 \nabla \left(\varphi - \int_{\mathbb{S}^4}\varphi\right) \\
&= \langle w_1, \varphi\rangle_{\hat{H}^2}.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.8. *Der Paneitz-Operator $\mathbb{P}_4$ besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in L^2 von Eigenfunktionen $w_k \in \hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ mit zugehörigen Eigenwerten λ_k in folgendem schwachen Sinne: Für $w_k \in \hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)\setminus\{0\}$ und für alle $\varphi \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$:*

$$\int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w_k)\,\varphi = \lambda_k \int_{\mathbb{S}^4} w_k\varphi. \tag{3.18}$$

Für die Eigenwerte gilt:

$$\lambda_{k+1} \geq \lambda_k > 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty. \tag{3.19}$$

Beweis. Der erste Eigenwert λ_1 sowie die erste Eigenfunktion w_1 ergeben sich aus Satz 3.7, Aussage 2. Sei $\mathscr{H}_1 := \operatorname{span}\{w_1\} \subset \hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ der von w_1 aufgespannte und abgeschlossene Teilraum in $\hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ und $\mathscr{H}_1^{\perp}$ das zugehörige orthogonale Komplement in $\hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$. w_2 erhält man als Lösung des folgenden Variationsproblems auf $\mathscr{H}_1^{\perp}$.

$$\lambda_2 := \min_{v\in\mathscr{H}_1^{\perp}\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 v)\,v}{\int_{\mathbb{S}^4} |v|^2} = \int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w_2)\, w_2 \quad \text{mit } \|w_2\|_{L^2} = 1.$$

Ganz analog zu Satz 3.7 wählt man eine Minimalfolge $(v_k) \in \mathscr{H}_1^{\perp}:\ \|v_k\|_{L^2} = 1$ und $\|v_k\|_{\hat{H}^2}^2 \to \lambda_2$, $k\to\infty$. Nach Auswahl einer Teilfolge gilt für $k\to\infty:\ v_k \rightharpoonup w_2$ in $H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$. Da $\int_{\mathbb{S}^4} v_k = 0$ für alle k folgt $w_2 \in \hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ und $w_2 \in \mathscr{H}_1^{\perp}$: $0 = \langle v_k, w_1\rangle_{\hat{H}^2} \to \langle w_2, w_1\rangle_{\hat{H}^2}$, $k\to\infty$. Mit dem Satz von Rellich-Kondrachov folgt die starke Konvergenz in L^2 und somit wie in Satz 3.7:

$$\|w_2\|_{\hat{H}^2}^2 = \lambda_2 \text{ und } \|w_2\|_{L^2} = 1,$$

d.h. $w_2 \in \mathscr{H}_1^{\perp}$ ist optimales Element. Analog gilt weiter die Euler-Lagrange-Gleichung: Für alle $\varphi \in \mathscr{H}_1^{\perp}$:

$$\langle w_2, \varphi\rangle_{\hat{H}^2} = \lambda_2 \langle w_2, \varphi\rangle_{L^2}. \tag{3.20}$$

Außerdem gilt:

$$0 = \langle w_2, w_1\rangle_{\hat{H}^2} = \underbrace{\lambda_1}_{>0} \langle w_2, w_1\rangle_{L^2},$$

und damit nicht nur die Orthogonalität von w_2 zu w_1 in $\hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ sondern auch in L^2 sowie in H^2:

$$\langle w_2, w_1\rangle_{H^2} = \underbrace{\langle w_2, w_1\rangle_{\hat{H}^2}}_{=0} + \underbrace{\langle w_2, w_1\rangle_{L^2}}_{=0} = 0.$$

Mit dem Projektionssatz lassen sich die Testfunktionen $\varphi \in \hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ zerlegen: $\varphi = \varphi_2 + \alpha w_1$ mit $\varphi_2 \in \mathscr{H}_1^{\perp},\ \alpha \in \mathbb{R}$. Somit

$$\begin{aligned}
\langle w_2, \varphi\rangle_{\hat{H}^2} &= \langle w_2, \varphi_2\rangle_{\hat{H}^2} + \alpha \overbrace{\langle w_2, w_1\rangle_{\hat{H}^2}}^{=0} \\
&\overset{(3.20)}{=} \lambda_2 \langle w_2, \varphi_2\rangle_{L^2} + \lambda_2 \alpha \underbrace{\langle w_2, w_1\rangle_{L^2}}_{=0} \\
&= \lambda_2 \langle w_2, \varphi\rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Für beliebige $\varphi \in H^2$ und der Verschiebung $(\varphi - \int_{\mathbb{S}^4} \varphi) \in \hat{H}^2$ folgt die Relation wieder für alle $\varphi \in H^2$. Das heißt w_2 ist in der Tat Eigenfunktion zum Eigenwert λ_2. Da $\mathscr{H}_1^{\perp} \subset \hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ folgt $\lambda_2 \geq \lambda_1$.
Für den nächsten Eigenwert wird nun über das orthogonale Komplement von $\mathscr{H}_2 := \operatorname{span}\{w_1, w_2\}$ minimiert:

$$\lambda_3 = \min_{v \in \mathscr{H}_2^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 v)\, v}{\int_{\mathbb{S}^4} |v|^2} = \int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w_3)\, w_3 \quad \text{mit } \|w_3\|_{L^2} = 1,$$

$w_3 \in \hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ geeignet.
Durch dieses Verfahren erhält man induktiv die Eigenfunktionen $w_k \in \hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ mit $\|w_k\|_{L^2} = 1$ und für $k \neq \ell$: $w_k \perp w_\ell$ in $H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ und L^2. Für die Eigenwerte gilt mit $\mathscr{H}_k := \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_k\}$ und $\mathscr{H}_k^{\perp}$ in $\hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$:

$$\lambda_{k+1} = \min_{v \in \mathscr{H}_k^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 v)\, v}{\int_{\mathbb{S}^4} |v|^2},\ \lambda_{k+1} \geq \lambda_k.$$

Weiter beweist man $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$ mit der Widerspruchsannahme: Es existiert ein $C > 0$, so dass für unendlich viele k gilt: $\lambda_k \leq C$. Für diese Teilfolge (λ_k) gilt:

$$C \geq \langle w_k, w_k\rangle_{H^2} = \langle w_k, w_k\rangle_{\hat{H}^2} + \langle w_k, w_k\rangle_{L^2} = \lambda_k \underbrace{\langle w_k, w_k\rangle_{L^2}}_{=1} + \underbrace{\langle w_k, w_k\rangle_{L^2}}_{=1} = \lambda_k + 1 > 0.$$

Damit folgt

$$\|w_k\|_{H^2}^2 \leq C \quad \text{und} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}} w_k \right\} \text{ ist Orthogonalsystem in } H^2.$$

Mit der Besselschen Ungleichung in H^2 für alle $\varphi \in H^2$

$$\|\varphi\|_{H^2}^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \varphi, \left(\sqrt{1+\lambda_k}\right)^{-1} w_k \right\rangle_{H^2}$$

folgt:

$$0 = \lim_{k\to\infty} \left\langle \varphi, \left(\sqrt{1+\lambda_k}\right)^{-1} w_k \right\rangle_{H^2} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}}}_{\geq \frac{1}{\sqrt{1+C}}} \langle \varphi, w_k\rangle_{H^2}.$$

Somit gilt

$$\lim_{k\to\infty} \langle \varphi, w_k \rangle_{H^2} = 0,$$

und weiter

$$w_k \rightharpoonup 0,\ k\to\infty,\ \text{in } H^2.$$

Mit $\|w_k\|_{H^2}^2 \leq C$ und dem Satz von Rellich-Kondrachov folgt: $w_k \to 0$ in L^2. Da dies ein Widerspruch zu $\|w_k\|_{L^2} = 1$ ist, folgt $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$. Bleibt die Vollständigkeit des Systems in L^2 zu beweisen.
Schritt 1: Sei $\varphi \in \hat{H}^2$. Dann gilt für k beliebig in $\hat{H}^2$:

$$\varphi = \varphi_k + \varphi_k^\perp, \quad \text{mit } \varphi_k \in \mathscr{H}_k = \operatorname{span}\{w_1,\dots,w_k\} \text{ und } \varphi_k^\perp \in \mathscr{H}_k^\perp \subset \hat{H}^2.$$

Mit $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} w_j\right)_{j=1,\dots,k}$ als Orthonormalbasis von $\mathscr{H}_k$ gilt:

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \sum_{j=1}^{k} \left\langle \varphi, \left(\sqrt{\lambda_j}\right)^{-1} w_j \right\rangle_{\hat{H}^2} \left(\sqrt{\lambda_j}\right)^{-1} w_j = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j)^{-1} \lambda_j \langle \varphi, w_j \rangle_{L^2} w_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} \langle \varphi, w_j \rangle_{L^2} w_j.\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass φ_k auch in L^2 die k-te Fourier-Partialsumme von φ ist. In $\hat{H}^2$ gilt dann:

$$\|\varphi\|_{\hat{H}^2}^2 = \|\varphi_k\|_{\hat{H}^2}^2 + \left\|\varphi_k^\perp\right\|_{\hat{H}^2}^2 \geq \left\|\varphi_k^\perp\right\|_{\hat{H}^2}^2 \geq \lambda_{k+1} \left\|\varphi_k^\perp\right\|_{L^2}^2.$$

Es folgt

$$\frac{1}{\lambda_{k+1}} \|\varphi\|_{\hat{H}^2}^2 \geq \|\varphi - \varphi_k\|_{L^2}^2 \to 0 \text{ für } k\to\infty \text{ , da } \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty.$$

Das heißt: $\varphi_k \to \varphi$ in L^2 und somit gilt für alle $\varphi \in \hat{H}^2$ in L^2:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi, w_k \rangle_{L^2} w_k. \tag{3.21}$$

Schritt 2:

Behauptung. Der Hilbertraum lässt sich in die direkte Summe der zueinander orthogonalen abgeschlossenen Unterräume $\hat{H}^2$ und $\ker \mathbb{P}_4 = \operatorname{span}\{1\}$ zerlegen, d.h. für alle $\varphi \in H^2$ gilt:

$$\varphi = \Psi + \alpha, \quad \Psi \in \hat{H}^2,\ \alpha \in \ker \mathbb{P}_4$$

Beweis dazu: Lemma 2.16 zeigt die Eigenschaften von $\hat{H}^2$ und $\ker \mathbb{P}_4$ ist als Kern des Paneitz-Operators ein abgeschlossener Unterraum von H^2. Zur Orthogonalität: Sei $\Psi \in \hat{H}^2$ und $\alpha \in \ker \mathbb{P}_4$:

$$\langle \Psi, \alpha \rangle_{H^2} = \left\langle \Delta\Psi, \underbrace{\Delta\alpha}_{=0} \right\rangle_{L^2} + 2\left\langle \nabla\Psi, \underbrace{\nabla\alpha}_{=0} \right\rangle_{L^2} + \langle \Psi, \alpha \rangle_{L^2} = \alpha \underbrace{\int_{\mathbb{S}^4} \Psi}_{=0,\ \Psi\in\hat{H}^2} = 0.$$

Zur direkten Summe: Man betrachtet die Projektion $\pi : H^2 \to \hat{H}^2, \varphi \mapsto \varphi - ⨍_{\mathbb{S}^4} \varphi$. Es gilt:

- Für alle $\alpha \in \ker \mathbb{P}_4$: $\pi(\alpha) = \alpha - ⨍_{\mathbb{S}^4} \alpha = 0$.

- Für alle $\Psi \in \hat{H}^2$: $\pi(\Psi) = \Psi - \underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} \Psi}_{=0} = \Psi$.
- Für alle $\varphi \in H^2$: $\fint_{\mathbb{S}^4} \pi(\varphi) = \fint_{\mathbb{S}^4} \varphi - \fint_{\mathbb{S}^4} \varphi = 0$, also $\pi(\varphi) \in \hat{H}^2$.
- Für alle $\varphi \in H^2$: $\varphi - \pi(\varphi) = \fint_{\mathbb{S}^4} \varphi \in \ker \mathbb{P}_4$.

Somit besitzt φ die Zerlegung $\varphi = \underbrace{\varphi - \pi(\varphi)}_{\in \ker \mathbb{P}_4} + \underbrace{\pi(\varphi)}_{\in \hat{H}^2}$. Diese ist nach dem Projektionssatz eindeutig, daraus folgt die Behauptung.

Schritt 3: Sei $\varphi \in H^2$ beliebig. Dann gilt für $\Psi \in \hat{H}^2$ und $\alpha \in \ker \mathbb{P}_4$:

$$\begin{aligned}\varphi = \Psi + \alpha &\overset{(3.21)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \langle \Psi, w_k \rangle_{L^2} w_k + \alpha \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle \Psi, w_k \rangle_{L^2} w_k + \langle \alpha, 1 \rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

Die Relation gilt für alle φ in der dichten Teilmenge H^2 von L^2 und damit folgt die Vollständigkeit des Systems auf L^2. □

Da das System der Eigenfunktionen vollständig ist, besteht das Spektrum $\sigma(\mathbb{P}_4)$ des Paneitz-Operators $\mathbb{P}_4$ nur aus Eigenwerten. Die expliziten Eigenwerte und Eigenfunktionen von $\mathbb{P}_4$ auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ können direkt aus den entsprechenden Eigenwerten und Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators Δ gewonnen werden:

Satz 3.9. *Sei $\mathbb{P}_4 = \Delta^2 - 2\Delta$ der Paneitz-Operator auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ und $\lambda_i^L \geq 0$ die Eigenwerte aus dem Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators Δ auf $\mathbb{S}^4$ mit zugehörigen Eigenfunktionen v_i:*

$$\Delta v_i + \lambda_i^L v_i = 0.$$

Dann gilt für das Spektrum von $\mathbb{P}_4$:

$$\sigma(\mathbb{P}_4) = \left\{ \left(\lambda_i^L\right)^2 + 2\lambda_i^L,\ \lambda_i^L \in \sigma(\Delta) \right\}.$$

Außerdem ist v_i Eigenfunktion von $\mathbb{P}_4$ zum Eigenwert $\left(\lambda_i^L\right)^2 + 2\lambda_i^L$, das heißt

$$\mathbb{P}_4 v_i = \left(\left(\lambda_i^L\right)^2 + 2\lambda_i^L \right) v_i$$

genau dann, wenn v_i Eigenfunktion von Δ mit Eigenwert λ_i^L ist.

Beweis. Man zeigt zunächst die einfache Richtung: Sei v_i Eigenfunktion von Δ zum Eigenwert λ_i^L. Dann folgt:

$$\mathbb{P}_4 v_i = \Delta^2 v_i - 2\Delta v_i = \left(\lambda_i^L\right)^2 v_i + 2\lambda_i^L v_i,$$

d.h. v_i ist Eigenfunktion mit $\left(\lambda_i^L\right)^2 + 2\lambda_i^L$ als Eigenwert.

Zur Rückrichtung: Sei w Eigenfunktion von $\mathbb{P}_4$ mit nichtnegativem Eigenwert μ (siehe Satz 3.7), $\Delta^2 w - 2\Delta w = \mu w$, dann folgt

$$\left(\Delta - 1 - \sqrt{1+\mu}\right) \underbrace{\left(\Delta - 1 + \sqrt{1+\mu}\right) w}_{=:\tilde{w}} = 0.$$

Angenommen $\tilde{w} = 0$, daraus folgt:

$$\Delta w + \left(-1 + \sqrt{1+\mu}\right) w = 0.$$

Das heißt, w ist Eigenfunktion des Laplace-Beltrami-Operators zum Eigenwert $-1 + \sqrt{1+\mu}$. Das heißt es existiert ein i, so dass folgt:

$$-1 + \sqrt{1+\mu} = \lambda_i^L \quad \text{und} \quad \mu = \left(\lambda_i^L\right)^2 + 2\lambda_i^L.$$

Falls nun $\tilde{w} \neq 0$ ist, dann folgt:

$$\left(\Delta - 1 - \sqrt{1+\mu}\right) \tilde{w} = 0,$$

und weiter

$$\Delta \tilde{w} + \left(-1 - \sqrt{1+\mu}\right) \tilde{w} = 0.$$

Also existiert ein i, so dass $-1 - \sqrt{1+\mu} = \lambda_i^L$. Allerdings sind die Eigenwerte λ_i^L stets nichtnegativ, während $-1 - \sqrt{1+\mu} < 0$ gilt. Damit existiert ein Widerspruch, d.h. es musste schon $\tilde{w} = 0$ gelten und damit die Behauptung. □

Wie sehen nun aber die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Laplace-Beltrami-Operator Δ auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ mit der Standardmetrik g_0 konkret aus? Sei dafür $\mathbb{S}^4 := \left\{x = (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5,\ |x| = 1\right\}$ wieder in den euklidischen $\mathbb{R}^5$ eingebettet und parametrisiert durch

$$x = x(u) = \left(x_1\left(u^1, \ldots, u^4\right), \ldots, x_5\left(u^1, \ldots, u^4\right)\right) : U \to \mathbb{S}^4$$

mit $U \subset \mathbb{R}^4$ offen. Durch die Abbildung

$$P(r,u) := rx\left(u^1, \ldots, u^4\right), \quad \text{für } r \in (0,\infty),\ u \in U$$

erhält man im weiteren Sinne Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^5$. Daraus folgt für die Einträge der Jacobi-Matrix:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = x, \quad \frac{\partial P}{\partial u^i} = r\frac{\partial x}{\partial u^i},\ i = 1, \ldots, 4.$$

Weiter gilt:

$$\left\langle \frac{\partial P}{\partial r}, \frac{\partial P}{\partial r} \right\rangle = \langle x, x \rangle = 1, \quad \left\langle \frac{\partial P}{\partial u^i}, \frac{\partial P}{\partial u^j} \right\rangle = r^2 \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle,$$
$$2\left\langle \frac{\partial P}{\partial u^i}, \frac{\partial P}{\partial r} \right\rangle = 2\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, x \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u^i} \underbrace{\langle x, x \rangle}_{=1} = 0.$$

Damit folgen die Einträge der Koeffizientenmatrizen der Metriken $\bar{g}$ und g_0 auf $\mathbb{R}^5$ und $\mathbb{S}^4$:

$$\bar{g}_{rr}(u,r) = 1, \quad \bar{g}_{ri}(u,r) = 0, \qquad i = 2, \ldots 5,$$
$$\bar{g}_{ij}(u,r) = r^2 g_{0,ij}(u), \qquad i,j = 2, \ldots, 5,$$

und weiter für die Determinanten und inversen Matrizen:

$$\sqrt{\det\left(\bar{g}(u,r)\right)} = r^4 \sqrt{\det\left(g_0(u)\right)},$$
$$\bar{g}^{ij} = \frac{1}{r^2} g_0^{ij},\ i,j = 2, \ldots 5.$$

Sei nun $f(u,r)$ eine reellwertige Funktion und $\Delta_{\mathbb{R}^5}$ der Laplace-Beltrami-Operator auf $\mathbb{R}^5$. Dann gilt mit Gleichung (2.10):

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{R}^5} f(u,r) =& \frac{1}{\sqrt{\det(\bar{g}(u,r))}} \partial_j \left(\sqrt{\det(\bar{g}(u,r))} \bar{g}^{ij} \partial_i f(u,r) \right) \\
=& \frac{1}{r^4 \sqrt{\det(g_0(u))}} \left(\partial_r \left(r^4 \sqrt{\det(g_0(u))} \partial_r f(u,r) \right) \right. \\
& \left. + \partial_i \left(r^4 \sqrt{\det(g_0(u))} \frac{g_0^{ij}}{r^2} \partial_j f(u,r) \right) \right) \\
=& \frac{1}{r^4} \partial_r \left(r^4 \partial_r f(u,r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\det(g_0(u))}} \partial_i \left(\sqrt{\det(g_0(u))} g_0^{ij} \partial_j f(u,r) \right) \\
=& \frac{1}{r^4} \partial_r \left(r^4 \partial_r f(u,r) \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^4} f(u,r)|_{\mathbb{S}^4} .
\end{aligned}$$

Falls f homogen vom Grade k ist, d.h. es gilt $f(u,r) = r^k h(u)$ für eine Funktion h, dann folgt:

$$\Delta_{\mathbb{R}^5} f(u,r) = \Delta_{\mathbb{R}^5} r^k h(u) = r^{k-2} \left(k(4+k-1) h(u) + \Delta_{\mathbb{S}^4} h(u) \right).$$

Das heißt: f ist harmonisch genau dann, wenn h eine Eigenfunktion auf $\mathbb{S}^4$ zum Eigenwert $k(4+k-1) = k(3+k)$ ist. Wie sich herausstellt [6, S. 159 f] bilden die auf die Sphäre eingeschränkten, harmonischen und homogenen Polynome vom Grade k die Eigenräume zu den Eigenwerten $\lambda_k^L = k(3+k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Die Vielfachheit der Eigenwerte λ_k^L, beziehungsweise die Dimension der Eigenräume, beträgt:

$$\frac{(2+k)!}{6 \cdot k!} (3+2k). \tag{3.22}$$

Mit Satz 3.9 ergeben sich somit die Eigenwerte des Paneitz-Operators $\mathbb{P}_4$ auf $\mathbb{S}^4$:

$$\lambda_k = k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k = (k+3)(k+2)(k+1)k. \tag{3.23}$$

Als Spezialfall $k = 1$ zeigt man:

Lemma 3.10. *Eine $L^2(\mathbb{S}^4)$-orthogonale Basis des Eigenraumes des Paneitz-Operators zum Eigenwert $\lambda_1 = 24$ sind die Einschränkungen der 5 Koordinatenfunktionen x_i, $i = 1, \ldots, 5$ des $\mathbb{R}^5$ auf $\mathbb{S}^4$.*

Beweis. Die Koordinatenfunktionen x_i sind homogene, harmonische Polynome vom Grade 1, d.h., deren Einschränkungen auf die Sphäre liegen im Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1^L = 4$ des Laplace-Beltrami-Operators und, wie oben gezeigt, auch im Eigenraum zu $\lambda_1 = 24$ von $\mathbb{P}_4$. Da nach Gleichung (3.22) die Dimension des Eigenraumes 5 beträgt, reicht es, die Orthogonalität und damit auch die lineare Unabhängigkeit der Koordinatenfunktionen zu zeigen. Sei $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^4} x_i x_j \, dv_{g_0} &= \int \int_{-\sqrt{1-\sum_{l \neq i} x_l^2}}^{\sqrt{1-\sum_{l \neq i} x_l^2}} x_i x_j \, dx_i dx_1 \ldots \underbrace{\hat{dx_i}}_{\text{weggelassen}} \ldots dx_5 \\
&= \int x_j \underbrace{\left[\frac{1}{2} x_i^2 \right]_{-\sqrt{1-\sum_{l \neq i} x_l^2}}^{\sqrt{1-\sum_{l \neq i} x_l^2}}}_{=0} dx_1 \ldots \hat{dx_i} \ldots dx_5 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe der Eigenfunktionen x_i lässt sich eine notwendige Bedingung an eine Funktion $Q \in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$ stellen, die Q-Krümmung der Sphäre $\mathbb{S}^4$ zu sein: die Kazdan-Warner-Bedingung.

Satz 3.11 (Kazdan-Warner). *Sei $w \in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$ und erfülle die Differentialgleichung*

$$\mathbb{P}_4 w + 6 = Q e^{4w} \quad \textit{auf } \mathbb{S}^4 \tag{3.24}$$

mit $Q \in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$. Für $j = 1, \ldots, 5$ seien x_j die Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators mit

$$\Delta x_j + 4 x_j = 0.$$

Dann gilt für alle $j = 1, \ldots, 5$

$$⨍_{\mathbb{S}^4} \left\langle \nabla Q, \nabla x_j \right\rangle e^{4w} = 0. \tag{3.25}$$

Der Satz wurde von Kazdan und Warner in [22] neben analogen Bedingungen für zweidimensionale kompakte Mannigfaltigkeiten auf der zweidimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^2$ bewiesen und von Wei und Xu in [34] auf die $\mathbb{S}^4$ verallgemeinert.

3.3 Beweis der verbesserten Beckner-Ungleichung

In diesem Abschnitt soll nun die Verbesserung der Beckner-Ungleichung bewiesen werden: Es existiert eine Konstante $a < 1$, so dass für alle $w \in \mathscr{S}$ gilt:

$$\log ⨍_{\mathbb{S}^4} e^{4w} \leq \frac{1}{3}\left(a ⨍_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w)\, w + 12 ⨍_{\mathbb{S}^4} w\right). \tag{3.26}$$

Der Beweis gliedert sich in die Teile A und B. In Teil *A* werden kritische Punkte des Funktionals

$$J_a[w] := \log ⨍_{\mathbb{S}^4} e^{4w} - \frac{1}{3}\left(a ⨍_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w)\, w + 12 ⨍_{\mathbb{S}^4} w\right)$$

für $a < 1$ gesucht. Diese werden in Teil *B* benötigt um die Verbesserung der Beckner-Ungleichung letztendlich zu beweisen.

3.3.1 Teil A

Benötigt werden die beiden folgenden Regularitätsresultate, wobei das Erste auf Chang, Yang und Gursky [11, Main Theorem] zurückgeht und das Zweite in dem Skript von Robert [31, Theorem 1.7] zu finden ist.

Satz 3.12. *Sei M_4 eine kompakte vierdimensionale Mannigfaltigkeit. Das Funktional $G : H^2(M_4) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch:*

$$G[w] := \int_{M_4} \left((\Delta w)^2 + \left(\alpha \Delta w + \beta |\nabla w|^2 \right)^2 \right) + \int_{M_4} \left(A_{ij} (\nabla_i w, \nabla_j w) + E(w - \bar{w}) \right)$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und A ein symmetrischer 2-Tensor ist. Falls $w \in H^2(M_4)$ das Funktional G minimiert und G die Bedingungen

1. $|E(x)| \leq a_1 \mathrm{e}^{a_2|x|}$,
2. $\left|A_{ij} v_i v_j\right| \leq a_3 |v|^2$,
3. $|E'(x)| \leq a_1 \mathrm{e}^{a_2|x|}$,

mit a_1, a_2, a_3 konstant erfüllt, dann folgt:

$$w \in C^\infty(M_4).$$

Satz 3.13. *Sei (M_n, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei A ein glatter symmetrischer 2-Tensor auf M_n und $a \in C^\infty(M_n)$. Sei $f \in W^{k,p}(M_n)$ und $u \in H^2(M_n)$ erfüllt*

$$\int_{M_n} \Delta u \Delta \varphi + A_{ij} (\nabla_i u, \nabla_j \varphi) + a u \varphi = \int_{M_n} f \varphi$$

für alle $\varphi \in C^\infty(M_n)$. Dann ist $u \in W^{4+k,p}(M_n)$ und es gilt die Abschätzung:

$$\|u\|_{W^{4+k,p}} \leq C \left(\|f\|_{W^{k,p}} + \|u\|_{L^p} \right). \tag{3.27}$$

An dieser Stelle soll nun die Ungleichung von Brendle (3.11) bewiesen werden:

Proposition 3.14. *Sei $w \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$. Dann gilt:*

$$\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} \leq \frac{1}{3} \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 + \frac{2}{3} \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 - 4 \fint_{\mathbb{S}^4} (w - \bar{w})^2 + 4 \fint_{\mathbb{S}^4} w + C.$$

Beweis. Schritt 1: Sei $w \in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$. Dann existiert eine eindeutige Funktion v, die die partielle Differentialgleichung

$$\Delta^2 v - 2\Delta v = 24(w - \bar{w}) \tag{3.28}$$

mit

$$\fint_{\mathbb{S}^4} v = 0 \tag{3.29}$$

erfüllt. Der Beweis erfolgt über direkte Variationsmethoden. Dazu betrachtet man das Funktional

$$F[v] := \frac{1}{2} \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta v)^2 + \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla v|^2 - 24 \fint_{\mathbb{S}^4} (w - \bar{w}) v.$$

Behauptung. F ist koerzitiv.

Beweis dazu: Sei $v \in \hat{H}^2$.

$$\begin{aligned}
F[v] &\overset{\text{Hölder Ugl.}}{\geq} \frac{1}{2}\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta v)^2 + \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla v|^2 - 24\left(\fint_{\mathbb{S}^4} (w-\bar{w})^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\fint_{\mathbb{S}^4} v^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(2.28)}{\geq} \frac{1}{2}\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta v)^2 + \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla v|^2 - 24c\left(\fint_{\mathbb{S}^4} (w-\bar{w})^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{\text{Young Ugl.}}{\geq} \frac{1}{2}\|v\|^2_{\hat{H}^2} - c\fint_{\mathbb{S}^4} (w-\bar{w})^2 .
\end{aligned}$$

Sei (v_k) eine Minimalfolge in $\hat{H}^2$, d.h. $\lim_{k\to\infty} F[v_k] = \min_{v\in H^2} F[v] =: \alpha$. Sei k so groß, dass $F[v_k] = \alpha + \varepsilon$. Dann folgt

$$\alpha + \varepsilon = F[v_k] \overset{F \text{ koerzitiv}}{\geq} \frac{1}{2}\|v_k\|^2_{H^2} - 24\fint_{\mathbb{S}^4} (w-\bar{w})^2 .$$

Also ist die Folge (v_k) beschränkt in $\hat{H}^2$ und mit der Poincaré Ungleichung auch in H^2. Nach Auswahl einer Teilfolge existiert ein $v \in H^2$, so dass $v_k \rightharpoonup v$ in H^2. Der Satz von Rellich-Kondrachov zeigt $v_k \to v$ in L^2 und die schwache Konvergenz in H^2 liefert $0 = \fint_{\mathbb{S}^4} v_k \to \fint_{\mathbb{S}^4} v$, also $v \in \hat{H}^2$. Da die Norm $\|.\|^2_{\hat{H}^2}$ schwach folgenunterhalbstetig ist, folgt:

$$\begin{aligned}
\alpha = \lim_{k\to\infty} F[v_k] &= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta v_k)^2 + \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla v_k|^2\right) - 24 \underbrace{\lim_{k\to\infty}\fint_{\mathbb{S}^4} (w-\bar{w})\, v_k}_{=\fint_{\mathbb{S}^4}(w-\bar{w})v,\ L^2\text{–Konvergenz}} \\
&\geq \frac{1}{2}\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta v)^2 + \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla v|^2 - 24\fint_{\mathbb{S}^4} (w-\bar{w})\, v \\
&= F[v] \geq \alpha.
\end{aligned}$$

Und schließlich gilt

$$F[v] = \alpha.$$

Zur Euler-Lagrange-Gleichung. Sei $\varphi \in \hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$.

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{dt} F[v+t\varphi]\Big|_{t=0} &\overset{(*)}{=} \Bigg(\fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\Delta(v+t\varphi)\Delta\varphi}_{|.|\leq|\Delta v||\Delta\varphi|+|\Delta\varphi|^2} + 2\fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\nabla(v+t\varphi)\nabla\varphi}_{|.|\leq|\nabla v||\nabla\varphi|+|\nabla\varphi|^2} \\
&\qquad -24\fint_{\mathbb{S}^4} (w-\bar{w})\,\varphi\Bigg)\Bigg|_{t=0} \\
&= \fint_{\mathbb{S}^4} \Delta v \Delta\varphi + 2\fint_{\mathbb{S}^4} \nabla v \nabla\varphi - 24\fint_{\mathbb{S}^4} (w-\bar{w})\,\varphi
\end{aligned}$$

Vertauschen von Differentiation und Integration in $(*)$ ist möglich mit Hilfe des Satzes über parameterabhängige Lebesgue-Integrale und für t nahe Null mit der Hölder-Ungleichung mit $v, \varphi \in \hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right)$. Für $\varphi \equiv$ konst. ist die Gleichung ebenfalls erfüllt, d.h. für v und für alle $\varphi \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ gilt die Gleichung

$$0 = \fint_{\mathbb{S}^4} \Delta v \Delta\varphi + 2\fint_{\mathbb{S}^4} \nabla v \nabla\varphi - 24\fint_{\mathbb{S}^4} (w-\bar{w})\,\varphi$$

mit

$$\fint_{\mathbb{S}^4} v = 0.$$

Zur Regularität: Aus $24\,(w-\bar{w}) \in C^{\infty}(M_n)$ folgt $24\,(w-\bar{w}) \in H^k(M_n)$ für alle k. Mit Satz 3.13 und den Spezialfällen $f = 24\,(w-\bar{w})$, $A = 2g$ und $a \equiv 0$ gilt für alle k:

$$v \in H^k(M_n).$$

Aus dem Satz von Rellich-Kondrachov folgt:

$$v \in C^{\infty}(M_n).$$

Zur Eindeutigkeit: Sei $\tilde{v}$ eine weitere Lösung der partiellen Differentialgleichung (3.28) mit $\fint_{\mathbb{S}^4} \tilde{v} = 0$. Dann gilt:

$$\Delta^2(v-\tilde{v}) - 2\Delta(v-\tilde{v}) = 0.$$

Multiplikation der Gleichung mit $(v-\tilde{v})$ und Integration über $\mathbb{S}^4$ mit anschließender partieller Integration liefert:

$$\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta(v-\tilde{v}))^2 + 2\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla(v-\tilde{v})|^2 = 0$$

Also ist $(v-\tilde{v}) \equiv$ konst. und nach Integration folgt $\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} v}_{=0} - \underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} \tilde{v}}_{=0} =$ konst. und somit $v \equiv \tilde{v}$. Außerdem gilt die Abschätzung

$$\sup_{x\in\mathbb{S}^4} |v(x)| \leq C\,\|w-\bar{w}\|_{L^2} \tag{3.30}$$

Beweis dazu: Angenommen Ungleichung (3.30) gilt nicht. Dann existiert eine Folge $(v_k) \in H^4$ mit $\|v_k\|_{L^2} = 1$ und $\left\|\Delta^2 v_k - 2\Delta v_k\right\|_{L^2} \to 0$. Nach der Ungleichung (3.27) ist die Folge (v_k) gleichmäßig beschränkt in H^4 und nach Auswahl einer Teilfolge (v_k) existiert ein $\tilde{v} \in H^4$, so dass $v_k \rightharpoonup \tilde{v}$ in H^4. Mit dem Satz von Rellich-Kondrachov folgt $\|\tilde{v}\|_{L^2} = 1$. Mit $v_k \rightharpoonup \tilde{v}$ und $\left\|\Delta^2 v_k - 2\Delta v_k\right\|_{L^2} \to 0$ ist $\tilde{v_k}$ eine schwache Lösung von $\Delta^2\tilde{v} - 2\Delta\tilde{v} = 0$. Da die Lösung eindeutig ist, folgt $\tilde{v} \equiv 0$. Dies widerspricht $\|\tilde{v}\|_{L^2} = 1$, d.h. die Abschätzung gilt.

<u>Schritt 2:</u> Sei $u := w - v$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta u)^2 + 2\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla u|^2 \\
=\;& \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 - 2\fint_{\mathbb{S}^4} \Delta w \Delta v + \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta v)^2 + 2\fint_{\mathbb{S}^4} \langle \nabla(w-v), \nabla(w-v)\rangle \\
\overset{\text{part. Int.}}{=}\;& \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 - 2\fint_{\mathbb{S}^4} w\Delta^2 v + \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta v)^2 + 2\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla v|^2 + 2\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 + 4\fint_{\mathbb{S}^4} w\Delta v \\
=\;& \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 + \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta v)^2 + 2\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla v|^2 + 2\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 - 2\fint_{\mathbb{S}^4} \left(\Delta^2 v - 2\Delta v\right) w \\
\overset{(3.28)}{=}\;& \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 + \underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta v) + 2\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla v|^2}_{=\fint_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 v) v} + 2\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 - 48\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} (w-\bar{w})\,w}_{=\fint_{\mathbb{S}^4} (w-\bar{w})^2}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Nach Satz 3.8 und Gleichung (3.23) mit $k = 1$ gilt für den ersten Eigenwert des Paneitz-Operators:

$$24 = \lambda_1 = \inf_{w\in\mathring{H}^2\setminus\{0\}} \frac{\fint_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w)\,w}{\fint_{\mathbb{S}^4} w^2} \leq \frac{\fint_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 v)\,v}{\fint_{\mathbb{S}^4} v^2}. \tag{3.32}$$

Damit folgt:

$$\fint_{\mathbb{S}^4}(\mathbb{P}_4 v)\,v \overset{\text{Hölder Ugl.}}{\leq} \left(\fint_{\mathbb{S}^4}(\mathbb{P}_4 v)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\fint_{\mathbb{S}^4} v^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(3.32)}{\leq} \left(\fint_{\mathbb{S}^4}(\mathbb{P}_4 v)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\fint_{\mathbb{S}^4}(\mathbb{P}_4 v)\,v}{24}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Es folgt

$$\fint_{\mathbb{S}^4}(\mathbb{P}_4 v)\,v \leq \frac{1}{24}\fint_{\mathbb{S}^4}(\mathbb{P}_4 v)^2 \overset{(3.28)}{=} 24\fint_{\mathbb{S}^4}(w-\bar{w})^2 .$$

Eingesetzt in Gleichung (3.31) liefert die Ungleichung:

$$\fint_{\mathbb{S}^4}(\Delta u)^2 + 2\fint_{\mathbb{S}^4}|\nabla u|^2 \leq \fint_{\mathbb{S}^4}(\Delta w)^2 + 2\fint_{\mathbb{S}^4}|\nabla w|^2 - 24\fint_{\mathbb{S}^4}(w-\bar{w})^2 . \tag{3.33}$$

<u>Schritt 3:</u> Mit $\bar{u} = \bar{w} - \underbrace{\bar{v}}_{=0} = \bar{w}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\log\fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4(w-\bar{w})} &\overset{w=u+v}{=} \log\fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4(u-\bar{u})}\mathrm{e}^{4v} \leq \log\fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4(u-\bar{u})} + \sup_{x\in\mathbb{S}^4}|v(x)| \\
&\overset{(3.9)}{\leq} \frac{1}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}(\Delta u)^2 + \frac{2}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}|\nabla u|^2 + \sup_{x\in\mathbb{S}^4}|v(x)| \\
&\overset{(3.33),(3.30)}{\leq} \frac{1}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}(\Delta w)^2 + \frac{2}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}|\nabla w|^2 - 8\fint_{\mathbb{S}^4}(w-\bar{w})^2 \\
&\qquad + C\left(\fint_{\mathbb{S}^4}(w-\bar{w})^2\right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Mit

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}C\left(\fint_{\mathbb{S}^4}(w-\bar{w})^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{\text{Young Ugl.}}{\leq} 4\fint_{\mathbb{S}^4}(w-\bar{w})^2 + \frac{1}{16}C^2$$

folgt die behauptete Ungleichung für alle $w \in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$ und wegen der Dichtheit von $C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$ in $H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ auch für alle $w \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$. □

Mit dieser Ungleichung lässt sich nun folgendes Resultat beweisen.

Korollar 3.15. *Sei $a \leq 1$. Das Funktional $J_a : H^2\left(\mathbb{S}^4\right) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch:*

$$J_a[w] := \log\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{4w} - \frac{1}{3}\left(a\fint_{\mathbb{S}^4}(\mathbb{P}_4 w)\,w + 12\fint_{\mathbb{S}^4} w\right)$$

sowie

$$\alpha_a := \sup_{w\in\mathscr{S}} J_a[w] .$$

Dann wird für alle a nahe 1 das Supremum α_a durch eine Funktion $w_a \in \mathscr{S}_0$ angenommen. Außerdem erfüllt w_a folgende Eigenschaften: $w_a \in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$ und es existieren Konstanten C und η, so dass gilt:

$$\fint_{\mathbb{S}^4}(\mathbb{P}_4 w_a)\,w_a \leq C, \qquad \textit{für} \quad 1 \geq a > 1-\eta, \tag{3.34}$$

$$-a\mathbb{P}_4 w_a + 6\mathrm{e}^{4w_a} = 6 + \sum_{j=1}^{5}\left(\beta_j^a x_j\right)\mathrm{e}^{4w_a}, \qquad \textit{auf}\ \mathbb{S}^4, \tag{3.35}$$

mit Konstanten $\beta_j^a,\ j = 1,2,\ldots,5$.

Bemerkung 3.16. In der Arbeit von Wei und Xu [34] wird dieses Resultat ohne Beweis für alle $a > \frac{1}{2}$ behauptet. Dies kann hier nicht bewiesen werden. Analoge Ungleichungen auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$ legen allerdings nahe, dass das Korollar auch für alle $a > \frac{1}{2}$ gilt. In Kapitel 5 wird der Parameter a näher diskutiert.

Beweis (Korollar 3.15). Schritt 1: Sei $w \in \mathscr{S}$.

Behauptung. Es existieren Konstanten C und η, so dass gilt:

$$\log \fint_{\mathbb{S}^4} e^{4w} \leq C + \left(\frac{1}{3} - \eta\right) \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 + \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 + 4 \fint_{\mathbb{S}^4} w. \tag{3.36}$$

Beweis dazu: Sei $C_2(\varepsilon)$ die Konstante aus Ungleichung (3.12). Dann folgt:

$$\begin{aligned}
C_2(\varepsilon) \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 &= \left(\frac{2}{3} - \varepsilon_1\right) \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 + \left(C_2(\varepsilon) - \frac{2}{3} + \varepsilon_1\right) \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 \\
&\overset{\text{part. Int.}}{\leq} \left(\frac{2}{3} - \varepsilon_1\right) \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 + \left(C_2(\varepsilon) - \frac{2}{3} + \varepsilon_1\right) \fint_{\mathbb{S}^4} \Delta w\,(w - \bar{w}) \\
&\overset{\text{Hölder Ugl.}}{\leq} \left(\frac{2}{3} - \varepsilon_1\right) \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 \\
&\quad + \left(C_2(\varepsilon) - \frac{2}{3} + \varepsilon_1\right) \left(\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\fint_{\mathbb{S}^4} (w - \bar{w})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{\text{Young Ugl.}}{\leq} \left(\frac{2}{3} - \varepsilon_1\right) \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 + \varepsilon_2 \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 \\
&\quad + C_3(\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \fint_{\mathbb{S}^4} (w - \bar{w})^2
\end{aligned}$$

mit $C_3(\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\left(C_2(\varepsilon) - \frac{2}{3} + \varepsilon_1\right)^2}{4\varepsilon_2}$. Eingesetzt in Ungleichung (3.12) folgt:

$$\begin{aligned}
\log \fint_{\mathbb{S}^4} e^{4w} \leq C_1(\varepsilon) + \left(\frac{1}{6} + \varepsilon + \varepsilon_2\right) \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 + \left(\frac{2}{3} - \varepsilon_1\right) \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 \\
+ C_3(\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \fint_{\mathbb{S}^4} (w - \bar{w})^2 + 4 \fint_{\mathbb{S}^4} w.
\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1}{24}$ und $\varepsilon_1 = \frac{1}{12}$ gilt:

$$J_1[w] \leq C_1 - \frac{1}{12} \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 - \frac{1}{12} \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 + C_3 \fint_{\mathbb{S}^4} (w - \bar{w})^2.$$

Proposition 3.14 liefert:

$$J_1[w] \leq -4 \fint_{\mathbb{S}^4} (w - \bar{w})^2 + C.$$

Mit dem gewichteten Mittelwert der beiden Ungleichungen folgt:

$$J_1[w] \leq C - \eta \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 - \eta \fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2,$$

und damit die Behauptung.
Schritt 2: Man zeigt für alle $w \in \mathscr{S}$:

$$\begin{aligned} J_a[w] &= \log \fint_{\mathbb{S}^4} e^{4w} - \frac{a}{3}\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 - \frac{2a}{3}\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 - 4\fint_{\mathbb{S}^4} w \\ &\overset{(3.36)}{\leq} C + \left(\frac{1}{3} - \eta - \frac{a}{3}\right)\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 + \left(\frac{2}{3} - \eta - \frac{2a}{3}\right)\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2, \end{aligned}$$

d.h. es existieren Konstanten c und η, so dass für $a > 1 - \eta$ gilt:

$$J_a[w] \leq C - c\,\|w\|^2_{\hat{H}^2}. \tag{3.37}$$

Sei nun $(w_\ell) \in \mathscr{S}$ eine maximierende Folge für J_a, das heißt:

$$\lim_{\ell \to \infty} w_\ell = \sup_{w \in \mathscr{S}} J_a[w] =: \alpha.$$

Es gilt $J_a[w] = J_a[w+c]$:

$$\begin{aligned} J_a[w+c] &= \log \fint_{\mathbb{S}^4} e^{4(w+c)} - \frac{1}{3}\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w + c)^2 - \frac{2}{3}\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w + c|^2 - 4\fint_{\mathbb{S}^4} (w+c) \\ &= \log \fint_{\mathbb{S}^4} e^{4(w)} + 4c - \frac{1}{3}\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 - \frac{2}{3}\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 - 4\fint_{\mathbb{S}^4} w - 4c\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} 1}_{=1} \\ &= J_a[w], \end{aligned}$$

und mit der Verschiebung $w \mapsto w - \fint_{\mathbb{S}^4} w$:

$$\sup_{w \in \mathscr{S}} J_a[w] = \sup_{w \in \mathscr{S},\ \fint_{\mathbb{S}^4} w = 0} J_a[w] = \alpha.$$

Gelte nun für alle ℓ: $\fint_{\mathbb{S}^4} w_\ell = 0$ und sei ℓ so groß, dass $J_a[w_\ell] + \delta \geq \alpha$. Aus Ungleichung (3.37) folgt:

$$c\,\|w_\ell\|^2_{\hat{H}^2} \leq C - J_a[w_\ell] \leq C + \delta - \alpha \tag{3.38}$$

Durch die Poincarésche Ungleichung ist die Folge (w_ℓ) auch in H^2 gleichmäßig beschränkt und mit der schwachen Folgenkompaktheit von H^2 existiert nach Auswahl einer Teilfolge (w_ℓ) ein $w_0 \in H^2(\mathbb{S}^4)$ als schwacher Grenzwert der Folge (w_ℓ):

$$w_\ell \rightharpoonup w_0, \quad \text{für } \ell \to \infty.$$

Der Satz von Rellich-Kondrachov sichert auch die starke Konvergenz von (w_ℓ) gegen w_0 in $L^2(\mathbb{S}^4)$ für $\ell \to \infty$.

Außerdem gilt:

1. $\fint_{\mathbb{S}^4} w_0 = 0$,
2. $w_0 \in \mathscr{S}$.

1.: Folgt mit der schwachen Konvergenz: $0 = \fint_{\mathbb{S}^4} w_\ell \to \fint_{\mathbb{S}^4} w_0$ für $\ell \to \infty$.

2.: Die schwache Folgenunterhalbstetigkeit der Norm zeigt:

$$\|\Delta w_0\|^2_{L^2} \leq \liminf_{\ell \to \infty} \|\Delta w_\ell\|^2_{L^2} \overset{(3.38)}{\leq} \text{konst.}.$$

Da für alle ℓ gilt: $\fint_{\mathbb{S}^4} w_\ell = 0$ und $x_i \in L^\infty(\mathbb{S}^4)$ für $i = 1, \ldots, 5$, folgt aus Lemma 3.4 für alle i:

$$0 = \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w_\ell} x_i \to \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w_0} x_i, \ \ell \to \infty.$$

Man zeigt nun: $\alpha = \sup_{w \in \mathscr{S}} J_a[w] = J_a[w_0]$:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{\ell\to\infty} J_a[w_\ell] \\
&= \lim_{\ell\to\infty}\Bigg(\log \underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w_\ell}}_{\text{s.o., } \to \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w_0}}\Bigg) - \lim_{\ell\to\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{a}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}(\Delta w_\ell)^2 + \frac{2a}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}|\nabla w_\ell|^2}_{\text{schwach folgenunterhalbstetig}} + 4\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} w_\ell}_{=0}\Bigg) \\
&\le \log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w_0} - \left(\frac{a}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}(\Delta w_0)^2 + \frac{2a}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}|\nabla w_0|^2\right) \\
&= J_a[w_0] \le \alpha.
\end{aligned}$$

Damit maximiert die Funktion w_0 das Funktional J_a in der Menge $\mathscr{S}$, d.h. unter den Nebenbedingungen:

$$N_i : H^2\left(\mathbb{S}^4\right) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad N_i[w] := \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} x_i \overset{!}{=} 0, \quad i = 1, \ldots, 5.$$

Außerdem folgt aus Ungleichung (3.38) die Behauptung (3.34).

Schritt 3: Die Euler-Lagrange-Gleichung folgt aus dem Satz über die Lagrange-Multiplikatoren [32, Seite 78].

Behauptung. Die ersten Variationen der Funktionale J_a und N_i existieren und sind schwach stetig nahe w_0, d.h. für $\varphi \to \varphi_0$ in H^2 folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varphi\to\varphi_0} \frac{d}{dt} J_a[w_0 + t\varphi]\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} J_a[w_0 + t\varphi_0]\Big|_{t=0}, \\
\lim_{\varphi\to\varphi_0} \frac{d}{dt} N_i[w_0 + t\varphi]\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} N_i[w_0 + t\varphi_0]\Big|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Zur Existenz: Sei $w, \varphi \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} J_a[w + t\varphi]\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\Bigg(\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4(w+t\varphi)} - \frac{a}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}(\Delta(w+t\varphi))^2 \\
&\qquad - \frac{2a}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}|\nabla(w+t\varphi)|^2 - 4\fint_{\mathbb{S}^4} w + t\varphi\Bigg)\Bigg|_{t=0} \\
&\overset{(*)}{=} \Bigg(\frac{4}{\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4(w+t\varphi)}}\fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\varphi \mathrm{e}^{4(w+t\varphi)}}_{|.| \le |\varphi| \mathrm{e}^{4(w+t\varphi)}} - \frac{2a}{3}\fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\Delta(w+t\varphi)\Delta\varphi}_{|.| \le |\Delta w||\Delta\varphi| + |\Delta\varphi|^2} \\
&\qquad - \frac{4a}{3}\fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\nabla(w+t\varphi)\nabla\varphi}_{|.| \le |\nabla w||\nabla\varphi| + |\nabla\varphi|^2} - 4\fint_{\mathbb{S}^4} \varphi\Bigg)\Bigg|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Vertauschen von Differentiation und Integration in $(*)$ erfolgt mit Hilfe des Satzes über paramterabhängige Lebesgueintegrale. Für die letzten drei Integrale benutzt man für t nahe Null noch die Hölder Ungleichung und $w_0, \varphi \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$. Für das erste Integral benötigt man noch zusätzlich Lemma 3.3. Daraus folgt die Existenz der ersten Variation von J_a und es gilt:

$$\frac{d}{dt}J_a[w+t\varphi]\bigg|_{t=0} = \frac{4}{\log \fint_{\mathbb{S}^4} e^{4w}}\fint_{\mathbb{S}^4}\varphi e^{4w} - \frac{2a}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}\Delta w\Delta\varphi - \frac{4a}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}\nabla w\nabla\varphi - 4\fint_{\mathbb{S}^4}\varphi. \tag{3.39}$$

Zu N_i:

$$\frac{d}{dt}N_i[w+t\varphi]\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\fint_{\mathbb{S}^4} e^{4(w+t\varphi)}x_i\bigg|_{t=0} = 4\fint_{\mathbb{S}^4}\underbrace{\varphi e^{4(w+t\varphi)}x_i}_{|.|\le|\varphi||x_i|e^{4(w+t\varphi)}}\Bigg|_{t=0}.$$

Vertauschen von Differentiation und Integration erfolgt analog mit der Hölder Ungleichung und Lemma 3.3. Es gilt:

$$\frac{d}{dt}N_i[w+t\varphi]\bigg|_{t=0} = 4\fint_{\mathbb{S}^4}\varphi e^{4w}x_i. \tag{3.40}$$

Zur schwachen Stetigkeit der Funktionale nahe der J_a maximierenden Funktion w_0. Gelte $\varphi \to \varphi_0$ in $H^2(\mathbb{S}^4)$, d.h. $\|\varphi-\varphi_0\|_{H^2} \to 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{d}{dt}J_a[w_0+t\varphi]\bigg|_{t=0} - \frac{d}{dt}J_a[w_0+t\varphi_0]\bigg|_{t=0}\right| \\
\overset{\text{Hölder Ugl.}}{\le}\ & \frac{4}{\log\fint_{\mathbb{S}^4}e^{4w_0}}\left(\left(\fint_{\mathbb{S}^4}e^{8w_0}\right)^{\frac{1}{2}}\|\varphi-\varphi_0\|_{L^2}\right) + \frac{2a}{3}\left(\|\Delta w_0\|_{L^2}\|\Delta(\varphi-\varphi_0)\|_{L^2}\right) \\
&+ \frac{4a}{3}\left(\|\nabla w_0\|_{L^2}\|\nabla(\varphi-\varphi_0)\|_{L^2}\right) + 4\|\varphi-\varphi_0\|_{L^2} \to 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{d}{dt}N_i[w_0+t\varphi]\bigg|_{t=0} - \frac{d}{dt}N_i[w_0+t\varphi_0]\bigg|_{t=0}\right| \\
\overset{\text{Hölder Ugl.}}{\le}\ & 4\left(\fint_{\mathbb{S}^4}e^{8w_0}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\|\varphi-\varphi_0\|_{L^2} \to 0.
\end{aligned}$$

Mit der Funktion $w \equiv 0$ ist die Menge $\mathscr{S}$ nichtleer und es bleibt zu zeigen, dass die Determinante

$$\det\begin{pmatrix} \fint_{\mathbb{S}^4}\varphi_1 e^{4w_0}x_1 & \dots & \fint_{\mathbb{S}^4}\varphi_5 e^{4w_0}x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \fint_{\mathbb{S}^4}\varphi_1 e^{4w_0}x_5 & \dots & \fint_{\mathbb{S}^4}\varphi_5 e^{4w_0}x_5 \end{pmatrix}$$

für Funktionen $\varphi_1,\dots,\varphi_5 \in H^2(\mathbb{S}^4)$ nicht verschwindet. Mit der Wahl $\varphi_i = x_i e^{-4w_0}$ folgt:

$$\begin{aligned}
i \ne j: \quad & \fint_{\mathbb{S}^4}\varphi_i e^{4w_0}x_j = \fint_{\mathbb{S}^4}x_ix_j \overset{\text{Lemma 3.10}}{=} 0 \\
i = j: \quad & \fint_{\mathbb{S}^4}\varphi_i e^{4w_0}x_i = \fint_{\mathbb{S}^4}x_i^2 = \frac{1}{5},
\end{aligned}$$

da

$$1 = \fint_{\mathbb{S}^4}1 = \fint_{\mathbb{S}^4}x_i^2 + \sum_{j\ne i}\fint_{\mathbb{S}^4}x_j^2 = 5\fint_{\mathbb{S}^4}x_i^2.$$

Dabei wurde benutzt, dass die Standardmetrik auf der Sphäre $g_0 = 4(1+|x|^2)^{-2}g_{\mathbb{R}^4}$ symmetrisch bezüglich der Koordinatenfunktionen x_i ist. Die Determinante ist somit ungleich Null und nach dem

Satz über die Lagrange-Multiplikatoren existieren Konstanten $\beta_i^a \in \mathbb{R}$, so dass für alle $\varphi \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ gilt:

$$\frac{d}{dt} J_a\left[w_0 + t\varphi\right]\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{5} \frac{\beta_i^a}{6} \frac{d}{dt} N_i\left[w_0 + t\varphi\right]\bigg|_{t=0}.$$

Sei nun $w_a := w_0 + c$. Mit der Wahl $c := -\frac{1}{4}\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w_0}$ folgt $\fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w_a} = 1$, d.h. $w_a \in \mathscr{S}_0$ maximiert das Funktional J_a und erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichung nach den Gleichungen (3.39) und (3.40):

$$6\fint_{\mathbb{S}^4} \varphi \mathrm{e}^{4w_a} - a\fint_{\mathbb{S}^4} \Delta w_a \Delta\varphi - 2a\fint_{\mathbb{S}^4} \nabla w_a \nabla\varphi - 6\fint_{\mathbb{S}^4} \varphi = \sum_{i=1}^{5} \beta_i^a \fint_{\mathbb{S}^4} \varphi \mathrm{e}^{4w_a} x_i.$$

Das heißt, w_a ist schwache Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$-a\Delta^2 w_a - 2a\Delta w_a + 6\mathrm{e}^{4w_a} = -a\mathbb{P}_4 w_a + 6\mathrm{e}^{4w_a} = 6 + \sum_{i=1}^{5}\left(\beta_i^a x_i\right)\mathrm{e}^{4w_a}.$$

<u>Schritt 4:</u> Man zeigt nun $w_a \in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$, d.h. w_a ist auch starke Lösung der Differentialgleichung. Beweis dazu: Da w_a das Funktional J_a maximiert, minimiert w_a das Funktional $-\frac{3}{a} vol\left(\mathbb{S}^4\right) \cdot J_a$, welches ein Spezialfall des Funktionals aus Satz 3.12 mit

$$\alpha = \beta = 0,\ A_{ij} = 2g_{ij}$$

und für alle $x \in \mathbb{R}$

$$E(x) = -\frac{3}{a}\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4x} = \text{konst.}$$

ist. Die Bedingungen

1. $|E(x)| = \text{konst.}$,
2. $2\left|\sum_{i,j} g_{ij} v_i v_j\right| = a_3 |v|^2$,
3. $|E'(x)| = 0$,

sind mit $a_1 = \text{konst.}$, $a_2 = 0$ und $a_3 = 2$ erfüllt. Aus Satz 3.12 folgt nun $w_a \in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$ und damit die Behauptung. □

3.3.2 Teil B

Beweis (verbesserte Beckner-Ungleichung). Sei w_a die Funktion aus Korollar 3.15. Falls $w_a \equiv 0$ mit $a < 1$ folgt die verbesserte Beckner-Ungleichung sofort: Für alle $u \in \mathscr{S}$ gilt:

$$J_a[u] \leq \alpha_a = J_a[w_a] \overset{w_a \equiv 0}{=} J_a[0] = \log \underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4\cdot 0}}_{=1} - \frac{1}{3}\left(a\fint_{\mathbb{S}^4} \left(\mathbb{P}_4 0\right)\cdot 0 + 12\fint_{\mathbb{S}^4} 0\right) = 0$$

und damit (3.13). Man zeigt nun $w_a \equiv 0$ für a hinreichend nah an 1.
<u>Schritt 1:</u>

Behauptung. Für die Konstanten β_j^a aus Korollar 3.15 gilt: $\beta_j^a = 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5$.

Beweis dazu: Sei

$$Q := \frac{1}{a}\left(6 - \sum_{k=1}^{5} \beta_k^a x_k\right) - 6\left(\frac{1}{a} - 1\right) \mathrm{e}^{-4w_a}.$$

Dann lässt sich Gleichung (3.35) schreiben als

$$\mathbb{P}_4 w_a + 6 = Q\mathrm{e}^{4w_a}.$$

Damit erfüllt w_a die Bedingungen von Satz 3.11 und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \fint_{\mathbb{S}^4} \left\langle \nabla Q, \nabla x_j \right\rangle \mathrm{e}^{4w_a} \\ &= -\frac{1}{a}\fint_{\mathbb{S}^4} \sum_{k=1}^{5} \beta_k^a \left\langle \nabla x_k, \nabla x_j \right\rangle \mathrm{e}^{4w_a} - 6\left(\frac{1}{a} - 1\right) \fint_{\mathbb{S}^4} \left\langle \nabla \mathrm{e}^{-4w_a}, \nabla x_j \right\rangle \mathrm{e}^{4w_a} \\ &= -\frac{1}{a}\fint_{\mathbb{S}^4} \sum_{k=1}^{5} \beta_k^a \left\langle \nabla x_k, \nabla x_j \right\rangle \mathrm{e}^{4w_a} + 24\left(\frac{1}{a} - 1\right) \fint_{\mathbb{S}^4} \left\langle \nabla w_a, \nabla x_j \right\rangle. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Für das zweite Integral auf der rechten Seite gilt:

$$\begin{aligned} \fint_{\mathbb{S}^4} \left\langle \nabla w_a, \nabla x_j \right\rangle &= -\fint_{\mathbb{S}^4} w_a \Delta x_j \\ &\overset{\text{Eigenfkt.}}{=} -\frac{1}{24}\fint_{\mathbb{S}^4} w_a \mathbb{P}_4 \left(\Delta x_j\right) \\ &= -\frac{1}{24}\fint_{\mathbb{S}^4} w_a \left(-\Delta\left(-\Delta + 2\right)\right)\left(\Delta x_j\right) \\ &= -\frac{1}{24}\fint_{\mathbb{S}^4} \left(w_a \Delta^2 \left(\Delta x_j\right) - 2 w_a \Delta\left(\Delta x_j\right)\right) \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} -\frac{1}{24}\fint_{\mathbb{S}^4} \left(\Delta^2 w_a \Delta x_j - 2\Delta w_a \Delta x_j\right) \\ &= -\frac{1}{24}\fint_{\mathbb{S}^4} \mathbb{P}_4\left(w_a\right)\Delta x_j \\ &\overset{\text{Eigenfkt.}}{=} \frac{1}{6}\fint_{\mathbb{S}^4} \mathbb{P}_4\left(w_a\right) x_j \\ &\overset{(3.35)}{=} \frac{1}{6a}\fint_{\mathbb{S}^4} \left(6\mathrm{e}^{4w_a} - 6 - \sum_{\ell=1}^{5} \left(\beta_\ell^a x_\ell\right)\mathrm{e}^{4w_a}\right) x_j \\ &= \underbrace{\frac{1}{a}\fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w_a} x_j}_{=0,\ w_a \in \mathscr{S}} - \underbrace{\frac{1}{a}\fint_{\mathbb{S}^4} x_j}_{=0} - \frac{1}{6a}\fint_{\mathbb{S}^4} x_j \sum_{\ell=1}^{5}\left(\beta_\ell^a x_\ell\right)\mathrm{e}^{4w_a} \\ &= -\frac{1}{6a}\fint_{\mathbb{S}^4} x_j \sum_{\ell=1}^{5}\left(\beta_\ell^a x_\ell\right)\mathrm{e}^{4w_a}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich Gleichung (3.41) zu

$$\frac{1}{a}\fint_{\mathbb{S}^4} \sum_{k=1}^{5} \beta_k^a \left\langle \nabla x_k, \nabla x_j \right\rangle \mathrm{e}^{4w_a} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\frac{4}{a}\fint_{\mathbb{S}^4} x_j \sum_{\ell=1}^{5}\left(\beta_\ell^a x_\ell\right)\mathrm{e}^{4w_a}.$$

Durch Multiplizieren dieser Gleichung mit β_j^a und Summieren über $j = 1$ bis 5 ergibt sich:

$$\frac{1}{a}\fint_{\mathbb{S}^4}\left|\sum_{k=1}^{5}\beta_k^a\nabla x_k\right|^2 \mathrm{e}^{4w_a}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{4}{a}\fint_{\mathbb{S}^4}\left(\sum_{k=1}^{5}\beta_k^a x_k\right)^2\mathrm{e}^{4w_a}$$

Falls $\sum_{k=1}^{5}\beta_k^a x_k\equiv 0$ ist nichts zu zeigen. Annahme: $\sum_{k=1}^{5}\beta_k^a x_k\neq 0$. Dann ist für $a=1$ die rechte Seite null und für $a<1$ immer negativ (man beachte: a nahe 1). In diesem Fall $(a<1)$ ist die linke Seite aber immer postiv, so dass die Gleichheit nur folgen kann, falls beide Seiten verschwinden. Das heißt, es folgt stets:

$$\sum_{k=1}^{5}\beta_k^a x_k\equiv 0.$$

Da die Eigenfunktionen x_k linear unabhängig sind, folgt für alle k: $\beta_k^a=0$. Damit ergibt sich für $a\leq 1$ Gleichung (3.35) zu:

$$a\mathbb{P}_4 w_a+6=Q\mathrm{e}^{4w_a}. \tag{3.42}$$

Schritt 2:

Behauptung. Für w_a gelten folgende Abschätzungen:

1. $\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{8\left(w_a-\fint_{\mathbb{S}^4}w_a\right)}\to 1$, für $a\to 1$;
2. $\fint_{\mathbb{S}^4}w_a\to 0$, für $a\to 1$;
3. für alle $y\in\mathbb{S}^4:\ w_a(y)\to 0$, für $a\to 1$.

Beweis dazu: 1. Sei $\varepsilon>0$ und $v_k:=w_{a_k}-\fint_{\mathbb{S}^4}w_{a_k}$. Dabei konvergiere die Folge (a_k) gegen 1 für $k\to\infty$. Für alle k gilt:

$$\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{8v_k}\overset{\text{Jensensche Ugl.}}{\geq}\mathrm{e}^{\fint_{\mathbb{S}^4}8v_k}=\mathrm{e}^{8\fint_{\mathbb{S}^4}\left(w_{a_k}-\fint_{\mathbb{S}^4}w_{a_k}\right)}=1.$$

Beweis der Konvergenz durch Widerspruch. Es gelte nach Auswahl einer Teilfolge:

$$\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{8v_k}\geq 1+\varepsilon\quad\text{für } k\to\infty \tag{3.43}$$

Nach Korollar 3.15 gilt: Für alle $\eta>0$ existiert ein C_η, so dass für alle $a_k\in\left[\frac{1}{2}+\eta,1\right]$ gilt:

$$C_\eta\geq\fint_{\mathbb{S}^4}(\mathbb{P}_4 w_{a_k})\,w_{a_k}=\fint_{\mathbb{S}^4}\left((\Delta w_{a_k})^2+2\,|\nabla w_{a_k}|^2\right)=\fint_{\mathbb{S}^4}\left((\Delta v_k)^2+2\,|\nabla v_k|^2\right).$$

Mit $\bar{v}_k=\fint_{\mathbb{S}^4}v_k=\fint_{\mathbb{S}^4}(w_{a_k}-\fint_{\mathbb{S}^4}w_{a_k})=0$ und der Poincaréschen Ungleichung (2.28) folgt: Es existiert eine Konstante C_η, so dass für alle k gilt:

$$\|v_k\|_{H^2}\leq C_\eta.$$

Nach Auswahl einer Teilfolge konvergiert v_k schwach gegen ein $v\in H^2(\mathbb{S}^4)$. Mit der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm folgt die Beschränktheit von $\|\Delta v\|_{L^2}$ und mit Lemma 3.4 für alle $c\in\mathbb{R}$ die Konvergenz von $\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{cv_k}$ gegen $\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{cv}$. Weiter mit der schwachen Unterhalbstetigkeit zeigt man:

$$\begin{aligned}\fint_{\mathbb{S}^4}\left((\Delta v)^2+2\,|\nabla v|^2\right)\leq\ &\liminf_{k\to\infty}\fint_{\mathbb{S}^4}\left((\Delta v_k)^2+2\,|\nabla v_k|^2\right)\\ \leq&\limsup_{k\to\infty}\fint_{\mathbb{S}^4}\left((\Delta v_k)^2+2\,|\nabla v_k|^2\right).\end{aligned}$$

Also

$$-\fint_{\mathbb{S}^4}\left((\Delta v)^2+2|\nabla v|^2\right)\geq -\limsup_{k\to\infty}\fint_{\mathbb{S}^4}\left((\Delta v_k)^2+2|\nabla v_k|^2\right).$$

Damit:

$$\begin{aligned}
J_1[v] &= \log\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{4v}-\frac{1}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}(\mathbb{P}_4 v)\,v-4\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4}v}_{=\lim_{k\to\infty}\bar{v}_k=0}\\
&= \log\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{4v}-\frac{1}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}\left((\Delta v)^2+2|\nabla v|^2\right)\\
&\geq \limsup_{k\to\infty}\left(\log\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{4v_k}-\frac{1}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}\left((\Delta v_k)^2+2|\nabla v_k|^2\right)\right)\\
&= \limsup_{k\to\infty}J_1[v_k]\\
&= \limsup_{k\to\infty}\left(J_{a_k}[v_k]-(1-a_k)\fint_{\mathbb{S}^4}\left((\Delta v_k)^2+2|\nabla v_k|^2\right)\right)\\
&= \limsup_{k\to\infty}J_{a_k}[v_k]-\limsup_{k\to\infty}\underbrace{\underbrace{(1-a_k)}_{\to 0}\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4}\left((\Delta v_k)^2+2|\nabla v_k|^2\right)}_{\leq C_\eta<\infty}}_{\to 0}\\
&= \limsup_{k\to\infty}\alpha_{a_k}.
\end{aligned}$$

Für alle $u\in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ gilt:

$$\alpha_{a_k}\geq J_{a_k}[u].$$

Speziell für $u\equiv 0$ folgt für alle k:

$$\alpha_{a_k}\geq J_{a_k}[0]=0$$

und damit $J_1[v]\geq 0$. Andererseits gilt nach Lemma 3.4 und $v_k\in\mathscr{S}$ für alle k:

$$0=\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{4v_k}x_j\to\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{4v}x_j$$

und damit $v\in\mathscr{S}$. Die Beckner-Ungleichung (3.9) zeigt, dass das Funktional J_1 maximal Null werden kann. Mit $J_1[v]\geq 0$ folgt $J_1[v]=0$ und die Funktion v ist ein optimales Element. Nach Korollar 3.15 erfüllt v die Differentialgleichung $\mathbb{P}_4 v+6=6\mathrm{e}^{4v}$ und nach Integration folgt:

$$\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4}\Delta^2 v}_{=0}-2\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4}\Delta v}_{=0}+6\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4}1}_{=1}=6\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{4v},$$

also $\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{4v}=1$. Da $J_1[v]=0$ und $\fint_{\mathbb{S}^4}v=0$ folgt:

$$0=J_1[v]=\underbrace{\log\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{4v}}_{=1}}_{=0}-\frac{1}{3}\fint_{\mathbb{S}^4}(\mathbb{P}_4 v)\,v-4\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4}v}_{=0}.$$

Weiter gilt mit

$$0 = \fint_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 v)\, v = \fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta v)^2 + 2\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla v|^2,$$

dass $v \equiv$ konst. und mit $\fint_{\mathbb{S}^4} v = 0$ folgt: $v \equiv 0$. Damit:

$$1 = \fint_{\mathbb{S}^4} e^{8v} = \lim_{k\to\infty} \fint_{\mathbb{S}^4} e^{8v_k} \overset{(3.43)}{\geq} 1 + \varepsilon$$

Mit diesem Widerspruch zur Behauptung ist 1. bewiesen.
Für den Beweis von 2. benutzt man folgende Aussagen:

(i) $\fint_{\mathbb{S}^4} e^{4w_a} \overset{(3.42)}{=} \fint_{\mathbb{S}^4} 1 - \frac{a}{6} \fint_{\mathbb{S}^4} \mathbb{P}_4 w_a \overset{\text{part. Int.}}{=} 1,$

(ii) $e^{\fint_{\mathbb{S}^4} 4w_a} \overset{\text{Jensensche Ugl.}}{\leq} \fint_{\mathbb{S}^4} e^{4w_a} \overset{(i)}{=} 1$ und damit $\fint_{\mathbb{S}^4} w_a \leq 0,$

(iii) $1 \overset{(a)}{=} \fint_{\mathbb{S}^4} e^{4w_a} \overset{\text{Hölder Ugl.}}{\leq} \left(\fint_{\mathbb{S}^4} e^{8w_a}\right)^{\frac{1}{2}} \fint_{\mathbb{S}^4} 1$ und damit $\fint_{\mathbb{S}^4} e^{8w_a} \geq 1.$

Damit und 1.:

$$1 \overset{(iii)}{\leq} \fint_{\mathbb{S}^4} e^{8w_a} = \underbrace{e^{\fint_{\mathbb{S}^4} 8w_a}}_{\leq 1 \text{ nach } (ii)} \fint_{\mathbb{S}^4} e^{8w_a - \fint_{\mathbb{S}^4} 8w_a} \leq \fint_{\mathbb{S}^4} e^{8\left(w_a - \fint_{\mathbb{S}^4} w_a\right)} \to 1, \text{ für } a \to 1.$$

Daraus folgt

$$e^{\fint_{\mathbb{S}^4} 8w_a} \to 1, \text{ für } a \to 1$$

und

$$\fint_{\mathbb{S}^4} w_a \to 0, \text{ für } a \to 1.$$

3. Für diese Abschätzung benötigt man den Integralkern des Paneitz-Operators $\mathbb{P}_4$ auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$. Nach Lemma 4.8 aus [13] ist der Kern für $x, y \in \mathbb{S}^4$ gegeben durch $\frac{1}{6\omega_4} \log \frac{1}{|1-\langle y,x\rangle|}$, d.h., es gilt für alle $w \in H^2(\mathbb{S}^4)$:

$$w(y) - \bar{w} = \frac{1}{6} \fint_{\mathbb{S}^4} \log \frac{1}{|1 - \langle y, x\rangle|} (\mathbb{P}_4 w)(x)\, dv(x). \tag{3.44}$$

Für die Funktion w_a gilt also:

$$\begin{aligned} w_a(y) - \fint_{\mathbb{S}^4} w_a &= \frac{1}{6} \fint_{\mathbb{S}^4} \log \frac{1}{|1 - \langle y, x\rangle|} (\mathbb{P}_4 w_a)(x)\, dv(x) \\ &\overset{(3.42)}{=} -\frac{1}{a} \fint_{\mathbb{S}^4} \left(1 - e^{4w_a(x)}\right) \log \frac{1}{|1 - \langle y, x\rangle|} dv(x). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
\left| w_a(y) - \fint_{\mathbb{S}^4} w_a \right| &\leq \frac{1}{a} \fint_{\mathbb{S}^4} \left| 1 - \mathrm{e}^{4w_a(x)} \right| \left| \log \frac{1}{|1 - \langle y, x \rangle|} \right| dv(x) \\
&\overset{\text{Hölder Ugl.}}{\leq} \frac{1}{a} \left(\fint_{\mathbb{S}^4} \left(1 - \mathrm{e}^{4w_a}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\fint_{\mathbb{S}^4} \left| \log \frac{1}{|1 - \langle y, x \rangle|} \right|^2 dv(x) \right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty, \text{ nach } (*)} \\
&\leq \text{konst.} \cdot \frac{1}{a} \left(\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} 1}_{=1} + \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{8w_a} - 2 \underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w_a}}_{=1, \text{ nach } (i)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \text{konst.} \cdot \frac{1}{a} \left(\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{8w_a}}_{\to 1, \text{ analog } 2.} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \text{ für } a \to 1.
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

Da nach 2. $\fint_{\mathbb{S}^4} w_a \to 0$ für a gegen 1 folgt die Behauptung.
Zu $(*)$: Bleibt zu zeigen, dass $\log |1 - \langle y, x \rangle|^{-1} \in L^2\left(\mathbb{S}^4\right)$: Man betrachte dazu die stereographische Projektion $\pi : \mathbb{S}^4 \to \mathbb{R}^4$ vom Nordpol der Sphäre mit der Standardmetrik g_0 aus. Ohne Einschränkung sei $y \in \mathbb{S}^4$ nicht der Nordpol. Dann gilt mit $\tilde{u}, u \in \mathbb{R}^4$:

$$
\begin{aligned}
1 - \langle y, x \rangle &= 1 - \langle \pi^{-1}(\tilde{u}), \pi^{-1}(u) \rangle = 1 - \langle \begin{pmatrix} \frac{2\tilde{u}}{|\tilde{u}|^2+1} \\ \frac{|\tilde{u}|^2-1}{|\tilde{u}|^2+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2u}{|u|^2+1} \\ \frac{|u|^2-1}{|u|^2+1} \end{pmatrix} \rangle \\
&= 1 - \frac{4\langle u, \tilde{u} \rangle_{\mathbb{R}^4} + \left(|u|^2 - 1\right)\left(|\tilde{u}|^2 - 1\right)}{\left(|u|^2 + 1\right)\left(|\tilde{u}|^2 + 1\right)} \\
&= \frac{2|u - \tilde{u}|^2}{\left(|u|^2 + 1\right)\left(|\tilde{u}|^2 + 1\right)}.
\end{aligned}
$$

Mit dem Transformationssatz und der Determinante der Jacobimatrix von π^{-1}: $J_{\pi^{-1}} = \left(\frac{2}{1+|u|^2}\right)^4$, folgt:

$$
\int_{\mathbb{S}^4} \left| \log \frac{1}{|1 - \langle y, x \rangle|} \right|^2 = \int_{\mathbb{R}^4} \left| \log \frac{2|u - \tilde{u}|^2}{\left(|u|^2 + 1\right)\left(|\tilde{u}|^2 + 1\right)} \right|^2 \left(\frac{2}{1 + |u|^2} \right)^4 du =: I.
$$

Da $y \in \mathbb{S}^4$ nicht der Nordpol ist, gilt: $|\tilde{u}| < \infty$ fest. Sei $|u - \tilde{u}|^2$ weg von der Null und $r^2 := |u|^2$. Dann gilt für r groß, bzw. klein: $|u - \tilde{u}|^2 \approx r^2$, bzw. $|u - \tilde{u}|^2 \approx |\tilde{u}|^2$, d.h.:

$$
\lim_{r \to \infty} \frac{2|u - \tilde{u}|^2}{\left(|u|^2 + 1\right)\left(|\tilde{u}|^2 + 1\right)} = \frac{2}{1 + |\tilde{u}|^2} < \infty
$$

und

$$
\lim_{r \to 0} \frac{2|u - \tilde{u}|^2}{\left(|u|^2 + 1\right)\left(|\tilde{u}|^2 + 1\right)} = \frac{2|\tilde{u}|^2}{1 + |\tilde{u}|^2} < \infty.
$$

Also ist $\frac{2|u-\tilde{u}|^2}{\left(|u|^2+1\right)\left(|\tilde{u}|^2+1\right)}$ für $|u-\tilde{u}|^2$ weg von der Null beschränkt und es gilt:

$$I \le \int_{\mathbb{R}^4} \text{konst.} \left(\frac{2}{1+|u|^2}\right)^4 du = \omega_4 \cdot \text{konst.} \int_0^\infty \left(\frac{2}{1+r^2}\right)^4 r^3 dr < \infty.$$

Für $|u-\tilde{u}|^2 \le \varepsilon$ mit ε klein, gilt: $r^2 = |u|^2 \to |\tilde{u}|^2$ für $\varepsilon \to 0$. Das heißt $\left(\frac{2}{1+r^2}\right)^4 r^3 \le$ konst. und für den Bereich $|u-\tilde{u}|^2 \le \varepsilon$ mit der Translation $\tilde{u} \mapsto 0$ gilt:

$$I \le \omega_4 \cdot \text{konst.} \int_0^\varepsilon \left|\log \frac{r^2}{\text{konst.}}\right|^2 r^3 dr < \infty$$

<u>Schritt 3:</u> Sei $v_a := w_a - \fint_{\mathbb{S}^4} w_a$. Es gilt:

$$\frac{\mathrm{e}^{4v_a}-1}{4v_a} \to 1, \text{ gleichmäßig für } a \to 1. \tag{3.46}$$

Beweis dazu: Nach (3.45) konvergiert $4\left(w_a(y) - \fint_{\mathbb{S}^4} w_a\right)$ gleichmäßig in $y \in \mathbb{S}^4$ gegen 0 für a gegen 1. Also konvergiert $\mathrm{e}^{4\left(w_a(y)-\fint_{\mathbb{S}^4} w_a\right)} = \mathrm{e}^{4v_a(y)}$ gleichmäßig in $y \in \mathbb{S}^4$ gegen 1 für a gegen 1 und nach der Regel von l'Hospital mit $w_a \in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$ folgt die Behauptung. Weiter sieht man, dass $\fint_{\mathbb{S}^4} v_a = 0$, sowie für alle $j = 1,2,\ldots,5$:

$$\begin{aligned}
\fint_{\mathbb{S}^4} v_a x_j &= \fint_{\mathbb{S}^4} w_a x_j - \fint_{\mathbb{S}^4} w_a \underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} x_j}_{=0} \overset{\text{Eigenfkt.}}{=} \frac{1}{24}\fint_{\mathbb{S}^4} \left(\mathbb{P}_4 x_j\right) w_a \\
&= \frac{1}{24}\fint_{\mathbb{S}^4} \left(\Delta^2 x_j - 2\Delta x_j\right) w_a \overset{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{24}\fint_{\mathbb{S}^4} \left(\mathbb{P}_4 w_a\right) x_j \\
&\overset{(3.42)}{=} \frac{1}{4a}\left(\underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w_a} x_j}_{=0,\ w_a \in \mathscr{S}} - \underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} x_j}_{=0}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$v_a \in \operatorname{span}\left\{x_j,\ j = 1\ldots 5\right\}^\perp \subset \hat{H}^2\left(\mathbb{S}^4\right).$$

Nach Satz 3.8 und Gleichung (3.23) mit $k = 2$ gilt für den zweiten Eigenwert des Paneitz-Operators:

$$120 = \lambda_2 = \inf_{w \in \operatorname{span}\left\{x_j,\ j=1\ldots 5\right\}^\perp \subset \hat{H}^2,\ w \neq 0} \frac{\fint_{\mathbb{S}^4} \left(\mathbb{P}_4 w\right) w}{\fint_{\mathbb{S}^4} w^2} \le \frac{\fint_{\mathbb{S}^4} \left(\mathbb{P}_4 v_a\right) v_a}{\fint_{\mathbb{S}^4} v_a^2}.$$

Also:

$$\begin{aligned}
120 \fint_{\mathbb{S}^4} v_a^2 &\le \fint_{\mathbb{S}^4} \left(\mathbb{P}_4 v_a\right) v_a = \fint_{\mathbb{S}^4} \left(\mathbb{P}_4 w_a\right) v_a - \fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\mathbb{P}_4 \left(\fint_{\mathbb{S}^4} w_a\right)}_{=0} v_a \\
&\overset{(3.42)}{=} \frac{6}{a}\fint_{\mathbb{S}^4} \left(\mathrm{e}^{4w_a} - 1\right) v_a \overset{\fint_{\mathbb{S}^4} v_a = 0}{=} \frac{6}{a} \mathrm{e}^{4\fint_{\mathbb{S}^4} w_a} \fint_{\mathbb{S}^4} \left(\mathrm{e}^{4v_a} - 1\right) v_a.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\fint_{\mathbb{S}^4} v_a^2 \leq \underbrace{\frac{6}{120}}_{<1} \frac{\mathrm{e}^{4\fint_{\mathbb{S}^4} w_a}}{a} \underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} \left(\mathrm{e}^{4v_a} - 1\right) v_a}_{\to 4\fint_{\mathbb{S}^4} v_a^2,\ \text{für } a \to 1}. \tag{3.47}$$

Das Integral verhält sich im Grenzwert $a \to 1$ mit (3.46) wie $\fint_{\mathbb{S}^4} v_a^2$, d.h. wegen Ungleichung (3.47) muss schon $\fint_{\mathbb{S}^4} v_a^2 \equiv 0$ für a hinreichend nah an 1 gelten. Also

$$v_a \equiv 0 \quad \text{bzw. } w_a \equiv \fint_{\mathbb{S}^4} w_a, \text{ für } a \text{ nahe } 1.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung (3.42) ergibt sich mit a nahe 1

$$6 = -a\mathbb{P}_4 w_a + 6\mathrm{e}^{4w_a} = -a\underbrace{\mathbb{P}_4\left(\fint_{\mathbb{S}^4} w_a\right)}_{=0,\ \text{für alle } a} + 6\mathrm{e}^{4\fint_{\mathbb{S}^4} w_a} = 6\mathrm{e}^{4\fint_{\mathbb{S}^4} w_a}.$$

Daraus folgt für a nahe 1

$$\fint_{\mathbb{S}^4} w_a \equiv w_a \equiv 0$$

und damit die verbesserte Beckner-Ungleichung. □

Kapitel 4
Der Satz von Moser für die Q-Krümmung

In diesem Kapitel soll nun die vierdimensionale Variante des Satzes von Moser für die Q-Krümmung bewiesen werden:

Satz 4.1. *Sei $Q \in C^\infty(\mathbb{S}^4, g)$ mit $Q(x) = Q(-x)$. Falls $\sup_{x\in\mathbb{S}^4} Q > 0$ dann existiert eine Lösung $w \in C^\infty(\mathbb{S}^4)$ für die Differentialgleichung:*

$$\Delta_g^2 w - 2\Delta_g w + 6 = Q\mathrm{e}^{4w}. \tag{4.1}$$

4.1 Notwendige Bedingungen

Die zwingende Positivitätseigenschaft der Funktion Q folgt aus der Gauß-Bonnet-Chern-Formel:

$$8\pi^2\chi(M_4) = \int_{M_4}\left(\frac{1}{4}|W_g|_g^2 + 2Q_g\right)dv_g. \tag{4.2}$$

Dabei ist W_g der Weyl-Tensor, dessen Komponenten sich aus den Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors R, der Ricci-Krümmung Ric und der skalaren Krümmung S wie folgt ergeben:

$$W_{ijk\ell} := R_{ijk\ell} - \frac{1}{2}\left(R_{ik}g_{j\ell} - R_{i\ell}g_{jk} + R_{j\ell}g_{ik} - R_{jk}g_{i\ell}\right) + \frac{S}{6}\left(g_{j\ell}g_{ik} - g_{jk}g_{i\ell}\right).$$

Nun wird die Situation auf der vierdimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^4$ mit der Standardmetrik $g = g_0$ und dem Metrikwechsel $g_w = \mathrm{e}^{2w}g_0$ betrachtet. Die Komponenten des Weyl-Tensors $W_{ijk\ell}$ auf $\mathbb{S}^4$ mit g_0 verschwinden. Nach den Gleichungen (2.15), (2.16) und (2.3) gilt:

$$\begin{aligned}
W_{ijk\ell} =& \frac{16}{\left(1+|x|^2\right)^4}\left(\delta_{\ell j}\delta_{ki} - \delta_{\ell i}\delta_{kj}\right) - \frac{3}{2}\left(g_{ik}g_{j\ell} - g_{i\ell}g_{jk} + g_{j\ell}g_{ik} - g_{jk}g_{i\ell}\right)\\
&+ 2\left(g_{j\ell}g_{ik} - g_{jk}g_{i\ell}\right)\\
=& \frac{16}{\left(1+|x|^2\right)^4}\Big(\delta_{\ell j}\delta_{ki} - \delta_{\ell i}\delta_{kj} - \frac{3}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk} + \delta_{j\ell}\delta_{ik} - \delta_{jk}\delta_{i\ell}\right)\\
&+2\left(\delta_{j\ell}\delta_{ik} - \delta_{jk}\delta_{i\ell}\right)\Big)\\
=&0.
\end{aligned}$$

Das Verschwinden des Weyl-Tensors ist nicht überraschend, da für Mannigfaltigkeiten M_n mit Dimension größer als 3 gilt [14, Proposition 1.62]:

$$M_n \text{ ist lokal konform flach, genau dann, wenn } W \equiv 0.$$

In Kapitel 2 wurde mit Hilfe der stereographischen Projektion gezeigt, dass die Sphäre lokal konform so flach ist, wie der euklidische Raum. Außderdem ist der Weyl-Tensor konform invariant, denn es gilt [23, Kapitel 8.30]:

$$W_{ijk\ell}^{g_w} = \mathrm{e}^{2w} W_{ijk\ell}^{g_0}.$$

Das heißt, der Weyl-Tensor verschwindet für jede Metrik, also wird die Gauss-Bonnet-Chern-Formel (1.6) zu:

$$8\pi^2 \chi\left(\mathbb{S}^4\right) = \int_{\mathbb{S}^4} 2Q_g dv_g. \tag{4.3}$$

Damit folgt nun die notwendige Bedingung $\sup_{x\in\mathbb{S}^4} Q > 0$ aus Satz 4.1 mit $Q = 2Q_{g_w}$:

$$\int_{\mathbb{S}^4} Q = 8\pi^2 \underbrace{\chi\left(\mathbb{S}^4\right)}_{=2} = 16\pi^2 > 0,$$

und somit $\sup_{x\in\mathbb{S}^4} Q > 0$. Die Positivität allein reicht allerdings nicht aus, da die Kazdan-Warner-Bedingung 3.11 für jedes $\varepsilon > 0$ mit $Q = 1 + \varepsilon x_j$ verletzt ist: Für alle $j = 1, \dots, 5$ gilt

$$0 \overset{!}{=} \fint_{\mathbb{S}^4} \left\langle \nabla Q, \nabla x_j \right\rangle \mathrm{e}^{4w} = \varepsilon \fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\left|\nabla x_j\right|^2}_{>0} \underbrace{\mathrm{e}^{4w}}_{>0} > 0.$$

4.2 Der Beweis

Der Satz soll mit direkten Methoden der Variationsrechnung bewiesen werden. Dazu betrachtet man folgendes Funktional:

$$J_Q[w] := -\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 - 2\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 - 12\fint_{\mathbb{S}^4} w + 3\log \fint_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w}. \tag{4.4}$$

Satz 4.2. *Sei* $Q \in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right), Q(x) = Q(-x)$ *und* $\sup_{x\in\mathbb{S}^4} Q > 0$. *Für*

$$w \in S := \left\{ f \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right) | f(x) = f(-x) \text{ f. ü.}, \fint_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4f} > 0 \right\}$$

ist $J_Q[w]$ *wohldefiniert und nach oben beschränkt.*

Beweis. $S \neq \emptyset$: Da $\sup_{x\in\mathbb{S}^4} Q > 0$ und Q glatt, existieren glatte w, so dass $\fint_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w} > 0$ (z.B. durch Skalieren der Funktion Q: $w(x) = \lambda(x) Q(x)$, $\lambda(x)$ glatt).
Zur Wohldefiniertheit: Da $w \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$, sind die ersten drei Integrale des Funktionals $J_Q[w]$ wohldefiniert. Bleibt zu zeigen, dass $Q\mathrm{e}^{4w}$ integrierbar ist:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^4} \left| Q e^{4w} \right| &\overset{Q \in C^\infty(\mathbb{S}^4)}{\leq} \max_{x \in \mathbb{S}^4} |Q| \int_{\mathbb{S}^4} |\underbrace{e^{4w}}_{>0}| \\
&\overset{\text{Lemma (3.3)}}{\leq} \max_{x \in \mathbb{S}^4} |Q| \left(\frac{3}{8\pi^2} \exp\left(c \frac{1}{8\pi^2} \underbrace{\|\Delta w\|_2^2}_{<\infty} \right) \exp\left(4 \underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} w}_{<\infty} \right) \right) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

$J_Q[w]$ ist nach oben beschränkt: Dazu betrachtet man $\fint_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w) w$:

$$
\begin{aligned}
\fint_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w) w &= \fint_{\mathbb{S}^4} (-\Delta(-\Delta + 2) w) w = \fint_{\mathbb{S}^4} \left(\left(\Delta^2 w - 2\Delta w \right) w \right) \\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \fint_{\mathbb{S}^4} \left((\Delta w)^2 + 2 |\nabla w|^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Mit Hilfe der Beckner-Ungleichung kann nun gezeigt werden:

$$
\begin{aligned}
3 \log \fint_{\mathbb{S}^4} Q e^{4w} &\leq 3 \log \left(\max_{x \in \mathbb{S}^4} Q \fint_{\mathbb{S}^4} e^{4w} \right) = 3 \log \max_{x \in \mathbb{S}^4} Q + 3 \log \fint_{\mathbb{S}^4} e^{4w} \\
&\overset{(3.9),\,(4.5)}{\leq} 3 \log \max_{x \in \mathbb{S}^4} Q + \fint_{\mathbb{S}^4} \left((\Delta w)^2 + 2 |\nabla w|^2 \right) + 12 \fint_{\mathbb{S}^4} w.
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$
J_Q[w] \leq 3 \log \max_{x \in \mathbb{S}^4} Q = konst. < \infty. \tag{4.6}
$$

Das heißt: $J_Q[w]$ ist nach oben beschränkt. □

Lemma 4.3. *Sei $w \in L^2(\mathbb{S}^4)$ und $w(x)$ eine ungerade Funktion, d.h. $w(x) = -w(-x)$ für fast alle $x \in \mathbb{S}^4$. Dann gilt:*

$$
\int_{\mathbb{S}^4} w = 0 \tag{4.7}
$$

Beweis.

$$
\int_{\mathbb{S}^4} w(x) = -\int_{\mathbb{S}^4} w(-x) = -\int_{\mathbb{S}^4} w(x). \tag{4.8}
$$

Also $\int_{\mathbb{S}^4} w = 0$. □

Mit der Beschränktheit von J_Q existiert ein Supremum für J_Q. Der folgende Satz soll nun zeigen, dass dieses auch tatsächlich von einer Funktion angenommen wird, d.h. aus dem Supremum ein Maximum wird.

Satz 4.4. *Sei $Q \in C^\infty(\mathbb{S}^4)$ mit $Q(x) = Q(-x)$ und $\sup_{x \in \mathbb{S}^4} Q > 0$.Sei*

$$
S := \left\{ f \in H^2(\mathbb{S}^4) \,|\, f(x) = f(-x) \text{ f.ü.}, \fint_{\mathbb{S}^4} Q e^{4f} > 0 \right\}.
$$

Dann existiert ein $w_0 \in S$ so dass:

$$
\sup_{w \in S} J_Q[w] = J_Q[w_0]. \tag{4.9}
$$

Beweis. Das Supremum existiert, da nach Satz 4.2 J_Q nach oben beschränkt ist. Um zu zeigen, dass dieses auch angenommen wird, benötigt man ein Kompaktheitsresultat, welches nur mit der verbesserten Beckner-Ungleichung zu erreichen ist. Sei also (w_ℓ) eine maximierende Folge in S:

$$\lim_{\ell\to\infty} w_\ell = \sup_{w\in S} J_Q[w] =: \alpha. \tag{4.10}$$

Für alle ℓ ist (w_ℓ) gerade, und somit folgt $⨍_{\mathbb{S}^4} \underbrace{e^{4w_\ell}}_{\text{gerade}} \underbrace{x_j}_{\text{ungerade}} \overset{\text{Lemma 4.3}}{=} 0,\ j=1\dots 5$. Analog zum Beweis der Beschränktheit von J_Q folgt nun mit der verbesserten Beckner Ungleichung und einem $a<1$:

$$3\log ⨍_{\mathbb{S}^4} Q e^{4w_\ell} \le 3\log \max_{x\in\mathbb{S}^4} Q + a ⨍_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w_\ell)\, w_l + 12 ⨍_{\mathbb{S}^4} w_\ell.$$

Also

$$\begin{aligned}\underbrace{(1-a)}_{>0} ⨍_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w_\ell)\, w_\ell &\le 3\log \max_{x\in\mathbb{S}^4} Q + ⨍_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w_\ell)\, w_\ell + 12 ⨍_{\mathbb{S}^4} w_\ell - 3\log ⨍_{\mathbb{S}^4} Q e^{4w_\ell}\\ &= 3\log \max_{x\in\mathbb{S}^4} Q - J_Q[w_\ell].\end{aligned}$$

Sei ℓ so groß, dass $J_Q[w_\ell]+\varepsilon \ge \alpha$. Dann folgt

$$\begin{aligned}(1-a) ⨍_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w_\ell)\, w_\ell &\le 3\log \max_{x\in\mathbb{S}^4} Q - (\alpha-\varepsilon)\\ &= \quad \text{konst.} \quad < \infty.\end{aligned}$$

Sei $S_0 := \{f\in S \mid ⨍_{\mathbb{S}^4} f = 0\}$. Durch die Verschiebung $S \ni w \mapsto w - ⨍_{\mathbb{S}^4} w$ wird $w\in S_0$ erreicht. Es gilt $J_Q[w] = J_Q[w+c]$:

$$\begin{aligned}J_Q[w+c] &= -⨍_{\mathbb{S}^4} (\Delta w + c)^2 - 2⨍_{\mathbb{S}^4} |\nabla w + c|^2 - 12 ⨍_{\mathbb{S}^4} (w+c) + 3\log ⨍_{\mathbb{S}^4} Q e^{4(w+c)}\\ &= -⨍_{\mathbb{S}^4} (\Delta w)^2 - 2⨍_{\mathbb{S}^4} |\nabla w|^2 - 12⨍_{\mathbb{S}^4} w - 12c \underbrace{⨍_{\mathbb{S}^4} 1}_{=1} + 3\log ⨍_{\mathbb{S}^4} Q e^{4(w)} + 12c\\ &= J_Q[w],\end{aligned}$$

und damit $\sup_{w\in S} J_Q[w] = \sup_{w\in S_0} J_Q[w]$.
Sei jetzt also $w_\ell \in S_0$:

$$\begin{aligned}\text{konst.} \quad &\ge \quad \int_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w_\ell)\, w_\ell \overset{(4.5)}{=} \int_{\mathbb{S}^4} (\Delta w_\ell)^2 + 2\int_{\mathbb{S}^4} |\nabla w_\ell|^2\\ &\overset{(2.28),\ ⨍_{\mathbb{S}^4} w_\ell = 0}{\ge} \int_{\mathbb{S}^4} (\Delta w_\ell)^2 + \int_{\mathbb{S}^4} |\nabla w_\ell|^2 + \frac{1}{C}\int_{\mathbb{S}^4} |w_\ell|^2.\end{aligned}$$

Also existiert ein $c>0$, so dass $\|w_\ell\|_{H^2} \le c < \infty$. Da der Vektorraum H^2 schwach folgenkompakt ist, existiert eine Teilfolge von (w_ℓ), welche wieder mit (w_ℓ) bezeichnet wird, die schwach gegen ein $w_0 \in H^2(\mathbb{S}^4)$ konvergiert:

$$w_\ell \rightharpoonup w_0,\ \ell\to\infty.$$

Mit dem Satz von Rellich-Kondrachov 2.11 folgt die starke Konvergenz von (w_ℓ) in $L^2(\mathbb{S}^4)$:

$$w_\ell \to w_0,\ \ell \to \infty.$$

Behauptung. $w_0 \in S_0$.

Beweis dazu:

- Es gilt $w_0(x) = w_0(-x)$ fast überall. Folgt analog zur Abgeschlossenheit in Lemma 4.6 und mit der L^2-Konvergenz.
- Es gilt $\int_{\mathbb{S}^4} w_0 = 0$. Das Integral $\int_{\mathbb{S}^4}$ ist ein lineares Funktional auf $H^2(\mathbb{S}^4)$. Dann folgt mit schwacher Konvergenz, da für alle ℓ gilt $\int_{\mathbb{S}^4} w_\ell = 0$, dass $\int_{\mathbb{S}^4} w_0 = 0$.
- Es gilt $⨍_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_0} > 0$: Aus der Definition von $J_Q[w]$ folgt:

$$\left|3\log ⨍_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_\ell}\right| \le \alpha + C\|w_\ell\|_{H^2}^2 \le \tilde{C}.$$

  Fallunterscheidung:

  – $\int_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_\ell} > 1$

  oder

  – $⨍_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_\ell} \le 1$: Dann folgt $-3\log ⨍_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_\ell} \le \tilde{C}$ und damit $\int_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_\ell} \ge \frac{8\pi^2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-\tilde{C}}{3}}$.

  Zusammen gilt für alle ℓ

$$\int_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_\ell} \ge \min\left\{1, \frac{8\pi^2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-\tilde{C}}{3}}\right\} =: c_0 > 0. \tag{4.11}$$

  Aus der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit der Norm folgt: es existiert ein c, so dass $\|w_0\|_{H^2} \le c$. Mit (4.11) und Lemma 3.4 folgt:

$$0 < c_0 \le \int_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_\ell} \to \int_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_0}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.
Man zeigt nun weiter: $\alpha = \sup_{w\in S_0} J_Q[w] = J_Q[w_0]$.

$$\begin{aligned}
\alpha = \lim_{\ell\to\infty} J_Q[w_\ell] = &\lim_{\ell\to\infty}\Bigg(-\left(⨍_{\mathbb{S}^4}(\Delta w_\ell)^2 + 2⨍_{\mathbb{S}^4}|\nabla w_\ell|^2\right)\\
&- 12\underbrace{⨍_{\mathbb{S}^4} w_\ell}_{=0} + 3\log ⨍_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_\ell}\Bigg)\\
=&-\underbrace{\lim_{\ell\to\infty}\left(⨍_{\mathbb{S}^4}(\Delta w_\ell)^2 + 2⨍_{\mathbb{S}^4}|\nabla w_\ell|^2\right)}_{\text{wie } \|.\|_{H^2} \text{ schwach folgenunterhalbstetig}}\\
&+\lim_{\ell\to\infty}\Bigg(3\log \underbrace{⨍_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_\ell}}_{\text{wie oben}\to ⨍_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_0}}\Bigg)\\
\le&-\left(⨍_{\mathbb{S}^4}(\Delta w_0)^2 + 2⨍_{\mathbb{S}^4}|\nabla w_0|^2\right) + 3\log ⨍_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_0}\\
=&J_Q[w_0] \le \alpha.
\end{aligned}$$

Somit gilt $J_Q[w_0] = \alpha = \sup_{w\in S_0} J_Q[w]$ und damit die Behauptung des Satzes. □

Definition 4.5. Sei $w \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$. Dann heißt w schwache Lösung der Differentialgleichung (4.1):

$$\Delta^2 w - 2\Delta w + 6 = Q\mathrm{e}^{4w},$$

falls für alle $\varphi \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ gilt:

$$\fint_{\mathbb{S}^4} \Delta w \Delta \varphi + 2\fint_{\mathbb{S}^4} \nabla w \nabla \varphi + 6\fint_{\mathbb{S}^4} \varphi = \fint_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w}\varphi. \tag{4.12}$$

Lemma 4.6. *Der Hilbertraum $H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ lässt sich als direkte Summe der zueinander orthogonalen, linearen und abgeschlossenen Unterräume U, G darstellen, d.h. $H^2\left(\mathbb{S}^4\right) = U \oplus G$ mit*

$$\begin{aligned} U &:= \left\{ w \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right) \middle| w(x) = -w(-x) \text{ für fast alle } x \in \mathbb{S}^4 \right\}, \\ G &:= \left\{ w \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right) | w(x) = w(-x) \text{ für fast alle } x \in \mathbb{S}^4 \right\}. \end{aligned}$$

Beweis. Die Tatsache, dass die beiden Teilmengen U, G lineare Unterräume von $H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ sind, ist leicht zu sehen.
Zur Abgeschlossenheit. Sei $w_k \in G$ eine konvergente Folge in $H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$: $\lim\limits_{k\to\infty} w_k = \widetilde{w}$. Zu zeigen ist: $\widetilde{w} \in G$, d.h. $\widetilde{w}(x) = \widetilde{w}(-x)$ fast überall.

$$\begin{aligned} \|\widetilde{w}(x) - \widetilde{w}(-x)\|_{L^2}^2 &\leq \|\widetilde{w}(x) - \widetilde{w}(-x)\|_{H^2}^2 \\ &= \left\| \widetilde{w}(x) + \lim_{k\to\infty} w_k(x) - \lim_{k\to\infty} w_k(x) - \widetilde{w}(-x) \right\|_{H^2}^2 \\ &\leq \left(\left\| \widetilde{w}(x) - \lim_{k\to\infty} w_k(x) \right\|_{H^2} + \left\| \lim_{k\to\infty} \underbrace{w_k(x)}_{=w_k(-x)} - \widetilde{w}(-x) \right\|_{H^2} \right)^2 \\ &= 0 + 0, \text{ da } \lim_{k\to\infty} w_k = \widetilde{w}. \end{aligned}$$

Zur Orthogonalität: Sei $w \in G$. Zu zeigen ist für alle $v \in U$: $\langle w, v \rangle = 0$. Mit Lemma (4.3) folgt

$$\begin{aligned} \langle w, v \rangle = &\int_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\underbrace{\Delta w}_{\text{gerade}} \underbrace{\Delta v}_{\text{ungerade}}}_{\text{ungerade}} + \int_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\underbrace{\nabla w}_{\text{ungerade}} \underbrace{\nabla v}_{\text{gerade}}}_{\text{ungerade}} + \int_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\underbrace{w}_{\text{gerade}} \underbrace{v}_{\text{ungerade}}}_{\text{ungerade}} \\ =&0. \end{aligned}$$

Somit $U \subset G^\perp$ und $G \subset U^\perp$. Zur direkten Summe. Man betrachtet folgende Projektion $P : H^2\left(\mathbb{S}^4\right) \to G^\perp$, $w \mapsto \frac{1}{2}(w(x) - w(-x))$. Es gilt:

- Für alle $w \in G : Pw = 0$.
- Für alle $w \in U : Pw = w$.
- Für alle $w \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right) : -Pw(x) = Pw(-x)$, also $Pw \in U$.
- Für alle $w \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right) : (w - Pw) \in G$.

Damit besitzt w die Zerlegung $w = \underbrace{w - Pw}_{\in G} + \underbrace{Pw}_{\in U}$. Diese ist nach dem Projektionssatz eindeutig, daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.7. Sei $w \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ gerade. Damit w schwache Lösung der Differentialgleichung (4.1) ist, reicht es, die Gültigkeit von Gleichung (4.12) allein für die geraden $\varphi \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ nachzuweisen: Einerseits kann nach Lemma 4.6 der Vektorraum $H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ in die Unterräume der geraden und ungeraden Funktionen zerlegt werden und andererseits ist Gleichung (4.12) mit w gerade und φ ungerade immer erfüllt: Mit Lemma 4.3 folgt:

$$\fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\underbrace{\Delta w}_{gerade} \underbrace{\Delta \varphi}_{ungerade}}_{ungerade} + 2\fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\underbrace{\nabla w}_{ungerade} \underbrace{\nabla \varphi}_{gerade}}_{ungerade} + 6\fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\varphi}_{ungerade} = 0 = \fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\underbrace{Q\mathrm{e}^{4w}}_{gerade} \underbrace{\varphi}_{ungerade}}_{ungerade}. \tag{4.13}$$

Satz 4.8. *Die Differentialgleichung (4.1) besitzt eine schwache Lösung.*

Beweis. Sei $w_0 \in S$ mit $J_Q[w_0] = \max_{w \in S} J_Q[w]$ und $\varphi \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ gerade. Dann gilt $w_0 + t\varphi \in S$ für t nahe 0:

- Sicherlich ist $w_0 + t\varphi$ gerade.
- $\fint_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4(w_0+t\varphi)} > 0$: Für t nahe 0 exisitiert ein $\delta(t) > 0$, s.d. $\mathrm{e}^{4t\varphi} \in [1-\delta, 1+\delta]$. Damit folgt:

$$\fint_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4(w_0+t\varphi)} = \fint_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_0} \underbrace{\mathrm{e}^{4t\varphi}}_{\geq 1-\delta} \geq (1-\delta) \underbrace{\fint_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4w_0}}_{>0} > 0.$$

Da das Funktional J_Q in w_0 maximal ist, verschwindet die erste Variation:

$$0 = \frac{d}{dt} J_Q[w_0 + t\varphi]\Big|_{t=0}. \tag{4.14}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} J_Q[w_0 + t\varphi]\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\Bigg(-\fint_{\mathbb{S}^4} (\Delta(w_0 + t\varphi))^2 - 2\fint_{\mathbb{S}^4} |\nabla(w_0 + t\varphi)|^2 \\ &\qquad - 12\fint_{\mathbb{S}^4} (w_0 + t\varphi) + 3\log \fint_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4(w_0+t\varphi)}\Bigg)\Bigg|_{t=0} \\ &\overset{(*)}{=} \Bigg(-2\fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\Delta(w_0 + t\varphi)\Delta\varphi}_{|.| \leq |\Delta w_0||\Delta\varphi| + |\Delta\varphi|^2} - 4\fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{\nabla(w_0 + t\varphi)\nabla\varphi}_{|.| \leq |\nabla w_0||\nabla\varphi| + |\nabla\varphi|^2} \\ &\qquad - 12\fint_{\mathbb{S}^4} \varphi + \frac{3}{\fint_{\mathbb{S}^4} Q\mathrm{e}^{4(w_0+t\varphi)}} \fint_{\mathbb{S}^4} \underbrace{Q\mathrm{e}^{4(w_0+t\varphi)} 4\varphi}_{|.| \leq 4|\varphi||Q|\mathrm{e}^{4(w_0+\varphi)}}\Bigg)\Bigg|_{t=0} \end{aligned}$$

Zu $(*)$: Vertauschung von Differentiation und Integration ist erlaubt mit Hilfe des Satzes über paramterabhängige Lebesgueintegrale. Hierfür wird für die ersten drei Integrale für t nahe Null die Hölder Ungleichung benutzt und $w_0, \varphi \in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$. Lemma 3.3 hilft für das letzte Integral. Weiter gilt

$$0=-2\fint_{\mathbb{S}^4}\Delta w_0\Delta\varphi-4\fint_{\mathbb{S}^4}\nabla w_0\nabla\varphi-12\fint_{\mathbb{S}^4}\varphi+\frac{12}{\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4w_0}}\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4w_0}\varphi,$$

und damit folgt für alle geraden φ

$$\fint_{\mathbb{S}^4}\Delta w_0\Delta\varphi+2\fint_{\mathbb{S}^4}\nabla w_0\nabla\varphi+6\fint_{\mathbb{S}^4}\varphi=\frac{6}{\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4w_0}}\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4w_0}\varphi.$$

Sei $v_0:=w_0+c$. Man wählt c so, dass $\frac{6}{\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4v_0}}=1$:

$$1=\frac{6}{\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4v_0}}=\frac{6}{\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4(w_0+c)}}=\frac{6}{\mathrm{e}^{4c}\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4w_0}}.$$

Damit

$$c=\frac{1}{4}\log\frac{6}{\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4w_0}}=-\frac{1}{4}\log\frac{1}{6}\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4w_0}.$$

Also erfüllt v_0 für alle geraden φ:

$$\fint_{\mathbb{S}^4}\Delta v_0\Delta\varphi+2\fint_{\mathbb{S}^4}\nabla v_0\nabla\varphi+6\fint_{\mathbb{S}^4}\varphi=\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4v_0}\varphi. \tag{4.15}$$

Somit ist v_0 eine schwache Lösung von (4.1). □

Es bleibt zu zeigen, dass die schwache Lösung v_0 tatsächlich auch eine starke Lösung der Differentialgleichung (4.1) ist. Dies zeigt folgendes Lemma:

Lemma 4.9. *Sei v_0 die schwache Lösung aus Satz 4.8, d.h. in der Form $v_0=w_0+c$ wobei $w_0\in H^2\left(\mathbb{S}^4\right)$ das Funktional J_Q maximiert. Dann ist $v_0\in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$ und damit starke Lösung der Differentialgleichung*

$$\Delta^2 w-2\Delta w+6=Q\mathrm{e}^{4w}.$$

Beweis. Es gilt $w_0\in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$, daraus folgt dann die Behauptung. Nach Vorraussetzung maximiert w_0 das Funktional J_Q also minimiert w_0 das Funktional $-J_Q$.

$$\begin{aligned}-J_Q[w]&=\fint_{\mathbb{S}^4}(\Delta w)^2+2\fint_{\mathbb{S}^4}|\nabla w|^2+12\fint_{\mathbb{S}^4}w-3\log\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4w}\\&=\fint_{\mathbb{S}^4}(\Delta w)^2+2\fint_{\mathbb{S}^4}|\nabla w|^2-3\log\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4(w-\bar{w})}.\end{aligned}$$

Also ist $-\operatorname{vol}\left(\mathbb{S}^4\right)\cdot J_Q$ ein Spezialfall des Funktionals aus Satz 3.12. In diesem Fall sind $\alpha=\beta=0$, $A_{ij}=2g_{ij}$ und für alle $x\in\mathbb{R}$ ist

$$E(x)=-3\operatorname{vol}\left(\mathbb{S}^4\right)\log\fint_{\mathbb{S}^4}Q\mathrm{e}^{4x}=\text{konst.}$$

Die Bedingungen 1.–3. sind erfüllt:

1. $|E(x)|=\text{konst.}$.
2. $2\left|\sum_{i,j}g_{ij}v_iv_j\right|=a_3|v|^2$ mit $a_3=2$.
3. $|E'(x)|=0$.

Das heißt, die Bedingungen sind erfüllt mit $a_1=\text{konst.}$, $a_2=0$, $a_3=2$. Da w_0 auch das Funktional $-\operatorname{vol}\left(\mathbb{S}^4\right)\cdot J_Q$ minimiert, folgt mit Satz 3.12: $w_0\in C^\infty\left(\mathbb{S}^4\right)$ und damit ist $v_0=w_0+c$ starke Lösung. □

Kapitel 5
Der Parameter a in der verbesserten Beckner-Ungleichung

In diesem Kapitel soll der Parameter a in der verbesserten Beckner-Ungleichung

$$\log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} \leq \frac{1}{3}\left(a \fint_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w)\, w + 12 \fint_{\mathbb{S}^4} w\right)$$

näher betrachtet werden. Analog zu Korrolar 3.15 bezeichne J_a das zur verbesserten Beckner-Ungleichung zugehörige Funktional

$$J_a[w] := \log \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} - \frac{1}{3}\left(a \fint_{\mathbb{S}^4} (\mathbb{P}_4 w)\, w + 12 \fint_{\mathbb{S}^4} w\right),$$

dessen Supremum für a nahe 1 durch glatte Funktionen w_a aus

$$\mathscr{S}_0 := \left\{ w \in H^2(\mathbb{S}^4) \,|\, \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} = 1,\ \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} x_j = 0, j = 1 \ldots 5 \right\}$$

angenommen wird. Außerdem erfüllen die kritischen Punkte des Funktionals J_a die partielle Differentialgleichung

$$-a\mathbb{P}_4 w_a + 6\mathrm{e}^{4w_a} = 6 + \sum_{j=1}^{5} \left(\beta_j^a x_j\right) \mathrm{e}^{4w_a} \tag{5.1}$$

auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$. Die verbesserte Beckner-Ungleichung wurde dann in Kapitel 3.3 wie folgt bewiesen: Für ein a hinreichend nah an 1 folgt $w_a \equiv 0$. Falls die Koerzitivität des Funktionals J_a für $a > \frac{1}{2}$, wie von Wei und Xu behauptet, gezeigt werden kann, liegt folgende Vermutung nahe:

Hypothese 5.1. Sei $\mathscr{S} = \left\{ w \in H^2(\mathbb{S}^4) \,|\, \fint_{\mathbb{S}^4} \mathrm{e}^{4w} x_j = 0, j = 1 \ldots 5 \right\}$.

1. Falls $a \geq \frac{1}{2}$, dann gilt: $\sup_{w \in \mathscr{S}} J_a[w] = 0$, d.h. $w_a \equiv 0$.
2. Falls $a < \frac{1}{2}$, dann ist das Funktional J_a nach oben unbeschränkt.

Untermauert wird die Vermutung, dass diese, für eine analoge Situation auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$, annähernd bewiesen werden konnte:

5.1 Die Strategie auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$

In den Untersuchungen über die vorgeschriebene Gaußrümmung K auf der zweidimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^2$ stößt man auf folgende partielle Differentialgleichung auf der $\mathbb{S}^2$:

$$\Delta u + K\mathrm{e}^{2u} = 1$$

Mit Hilfe der sogenannten Moser-Onofri-Ungleichung:
Es existiert ein $a < 1$, so dass für alle $u \in H^1\left(\mathbb{S}^2\right)$ mit $⨍_{\mathbb{S}^2} \mathrm{e}^{2u} x_j = 0,\ j = 1,2,3$ gilt

$$\log ⨍_{\mathbb{S}^2} \mathrm{e}^{2u} \leq a ⨍_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 + 2 ⨍_{\mathbb{S}^2} u,$$

kann unter Benutzung direkter Methoden der Variationsrechung eine Lösung der Differentialgleichung gefunden werden. Die Moser-Onofri-Ungleichung wurde von Chang und Yang in [12] analog wie die Verbesserung der Beckner-Ungleichung bewiesen, an deren Ende Chang und Yang eine, der obigen entsprechenden Vermutung für das Funktional

$$F_a[u] = \log ⨍_{\mathbb{S}^2} \mathrm{e}^{2u} - a ⨍_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 - 2 ⨍_{\mathbb{S}^2} u$$

äußerten. Entsprechend zum vierdimensionalen Fall erfüllen die kritischen Punkte u_a des Funktionals F_a die partielle Differentialgleichung

$$a\Delta u + \mathrm{e}^{2u} = 1 + \sum_{j=1}^{3} \beta_j^a x_j \mathrm{e}^{2u} \tag{5.2}$$

auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$. Für die Konstanten β_j^a kann wiederum analog gezeigt werden: $\beta_j^a = 0$. Für gerade Funktionen, d.h. $u(x) = u(-x)$, zeigten Osgood, Phillips und Sarnak in [29, Korollar 2.2], dass die Vermutung gilt.
Im Fall von achsensymmetrischen Funktionen auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$ mit den üblichen Winkelkoordinaten θ und φ, d.h. für Funktionen $u(x_1,x_2,x_3) = u(x_3) = u(\cos\theta)$, ergibt sich das Funktional F_a mit $x := x_3$ zu:

$$F_a[u] = \log \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{2u(x)} dx - \frac{a}{2} \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) \left|u'(x)\right|^2 dx - \int_{-1}^{1} u(x)\, dx.$$

Für achsensymmetrische Funktionen $u(x)$, bzw. für Funktionen $u(x)$ auf $(-1,1)$ mit

$$\|u\|_{H^1(-1,1)} = \left(\int_{-1}^{1} \left|u'(x)\right|^2 \left(1 - x^2\right) dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ und } \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{2u(x)} x dx = 0 \tag{$*$}$$

konnten Feldman, Froese, Ghoussoub und Gui in [15] folgenden Satz beweisen:

Satz 5.2. *Sei $\mathscr{S}_r$ der Raum der Funktionen auf $(-1,1)$, die die Bedingung $(*)$ erfüllen. Dann gilt:*

1. *Falls $a \geq \frac{16}{25} - \varepsilon$ mit ε klein genug, dann gilt $\sup_{u \in \mathscr{S}_r} F_a[u] = 0$.*
2. *Falls $a < \frac{1}{2}$, dann ist das Funktional F_a nach oben unbeschränkt.*

Die Unbeschränktheit des Funktionals F_a für $a < \frac{1}{2}$ konnte mit der folgenden, auf $(-1,1)$ gerade fortgesetzen Funktion gezeigt werden:

$$u(x) = \begin{cases} c\log(1-x), & \text{für } 0 < x < 1-\delta, \\ c\log(\delta), & \text{für } 1-\delta < x < 1. \end{cases}$$

In [19] wurde Satz 5.2 von Gui und Wei auf das vermutete $a \geq \frac{1}{2}$ für die achsensymmetrischen Funktionen verbessert. Mit Hilfe dieses Resultates konnten Ghoussoub und Lin [17] die Vermutung für $a \geq \frac{2}{3}$ auf alle Funktionen $u \in H^1\left(\mathbb{S}^2\right)$ mit $⨍_{\mathbb{S}^2} \mathrm{e}^{2u} x_j = 0,\ j = 1,2,3,$ verallgemeinern. Dabei benutzten sie die Klassifikation der Lösungen einer, zur partiellen Diffenrentialgleichung (5.2), äquivalenten Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^2$. Das Verfahren soll im vierdimensionalen Fall vorgestellt werden:

5.2 Die Strategie auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$

Mit Hilfe der stereographischen Projektion $\pi : \mathbb{S}^4 \to \mathbb{R}^4$ bezüglich des Nordpols der Sphäre soll eine zur Gleichung (5.1) äquivalente Differentialgleichung auf dem $\mathbb{R}^4$ gefunden werden.
Sei dazu die Sphäre $\mathbb{S}^4$ mit der Standardmetrik g_0 und der $\mathbb{R}^4$ mit der euklidischen Metrik $\bar{g}$ ausgestattet. Dann gilt nach Gleichung (2.3) für $x \in \mathbb{R}^4$:

$$g_0 = \frac{4}{\left(1+|x|^2\right)^2}\bar{g} =: u^2\bar{g}.$$

Mit diesem konformen Metrikwechsel errechnet man für eine glatte Funktion w auf $\mathbb{S}^4$ den Zusammenhang:

$$\mathbb{P}_4 w = \left(\Delta_{g_0}^2 - 2\Delta_{g_0}\right) w = u^{-4}\left(-\Delta_{\bar{g}}\right)^2\left(w \circ \pi^{-1}\right). \tag{5.3}$$

Sei nun w_a eine glatte Lösung der Differentialgleichung (5.1), dann folgt für alle j: $\beta_j^a = 0$ (man vgl. Schritt 1 im Beweis der verbesserten Beckner-Ungleichung). Damit erfüllt w_a für alle glatten φ auf der Sphäre die Gleichung:

$$-a\int_{\mathbb{S}^4}\left(\mathbb{P}_4 w_a\right)\varphi + 6\int_{\mathbb{S}^4}\mathrm{e}^{4w_a}\varphi = 6\int_{\mathbb{S}^4}\varphi \tag{5.4}$$

Mit den Notationen $\tilde{w}_a(x) := w_a\left(\pi^{-1}(x)\right),\ \tilde{\varphi}(x) := \varphi\left(\pi^{-1}(x)\right)$ und dem Transformationssatz mit der Funktionaldeterminante $\det\left(J_{\pi^{-1}}\right) = u^4$ sowie Gleichung (5.3) folgt aus Gleichung (5.4):

$$-a\int_{\mathbb{R}^4} u^{-4}\left(\left(-\Delta_{\bar{g}}\right)^2\tilde{w}_a\right)\tilde{\varphi}\ u^4 dx + 6\int_{\mathbb{R}^4}\mathrm{e}^{4\tilde{w}_a}\tilde{\varphi}\ u^4 dx = 6\int_{\mathbb{R}^4}\tilde{\varphi}\ u^4 dx$$

und damit

$$-a\int_{\mathbb{R}^4}\left(\left(-\Delta_{\bar{g}}\right)^2\tilde{w}_a\right)\tilde{\varphi}\ dx + 6\int_{\mathbb{R}^4}\mathrm{e}^{4\tilde{w}_a}\tilde{\varphi}\ u^4 dx = 6\int_{\mathbb{R}^4}\tilde{\varphi}\ u^4 dx.$$

Daraus folgt

$$\Delta_{\bar{g}}^2\tilde{w}_a + \frac{6}{a}u^4\left(1-\mathrm{e}^{4\tilde{w}_a}\right) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^4. \tag{5.5}$$

Setzt man

$$v_a := \tilde{w}_a + \frac{1}{a}\log\frac{2}{1+|x|^2} + \frac{1}{4}\log\frac{2^{4\left(1-\frac{1}{a}\right)}\cdot 6}{a} \tag{5.6}$$

in die Gleichung (5.5) ein, folgt:

$$\Delta_{\tilde{g}}^2 v_a - \frac{1}{a}\Delta_{\tilde{g}}^2 \log\frac{2}{1+|x|^2} + \frac{6}{a}u^4 - \frac{6}{a}u^4 \mathrm{e}^{4v_a+\log\left(\frac{1+|x|^2}{2}\right)^{\frac{4}{a}}+\log\frac{a}{6}2^{4\left(\frac{1}{a}-1\right)}} = 0.$$

Mit

$$\Delta_{\tilde{g}}^2 \log\frac{2}{1+|x|^2} = \frac{96}{\left(1+|x|^2\right)^4} = 6u^4$$

folgt

$$\Delta_{\tilde{g}}^2 v_a - \left(1+|x|^2\right)^{4\left(\frac{1}{a}-1\right)} \mathrm{e}^{4v_a} = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^4. \tag{5.7}$$

Dies bedeutet: Gilt $w_a \equiv 0$, dann besitzt die Gleichung (5.7) die speziellen axialsymmetrischen Lösungen

$$v_a = \frac{1}{a}\log\frac{2}{1+|x|^2} + \frac{1}{4}\log\frac{2^{4\left(1-\frac{1}{a}\right)}\cdot 6}{a}$$

Damit sieht man: Lassen sich die Lösungen von der Differentialgleichung (5.7) für $a \geq \frac{1}{2}$ entsprechend klassifizieren, dann sind Rückschlüsse auf die Lösung der Differentialgleichung (5.1) möglich und somit eine eventuelle Bestätigung der Vermutung. Hätte man wie im zweidimensionalen Fall die Vermutung für die axialsymmetrischen Funktionen $w(\cos\theta)$ auf der Sphäre $\mathbb{S}^4$ gezeigt und die Lösungen von Gleichung (5.1) unter gewissen Vorraussetzungen als axialsymmetrisch klassifiziert, würde mit Gleichung (5.6) die Axialsymmetrie für alle Lösungen von (5.1) folgen und damit die Vermutung. Diese Probleme sind allerdings noch offen.

Für den speziellen Fall $a = 1$ konnte Lin [26] die Lösungen für die partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} \Delta_{\tilde{g}} w = 6\mathrm{e}^{4w} \text{ auf } \mathbb{R}^4 \\ \mathrm{e}^{4w} \in L^1\left(\mathbb{R}^4\right) \end{cases} \tag{5.8}$$

klassifizieren:

Satz 5.3. *Sei w eine Lösung von (5.8) mit $|w(x)| = o\left(|x|^2\right)$ in ∞. Dann existiert ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^4$ und $\lambda > 0$, so dass w radialsymmetrisch um x_0 ist und für alle $x \in \mathbb{R}^4$ gilt:*

$$w(x) = \log\frac{2\lambda}{1+\lambda^2|x-x_0|^2}.$$

Literaturverzeichnis

1. D.R. Adams. A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives. *Ann. of Math.*, (2) 128:385–398, 1988.
2. Th. Aubin. Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théoréme de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire. *J. Funct. Anal.*, 32:148–174, 1979.
3. Th. Aubin. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin etc., 1998.
4. Th. Aubin. *A course in differential geometry*. Graduate Studies in Mathematics, 27. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
5. W. Beckner. Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser–Trudinger inequality. *Ann. of Math.*, (2) 138:213–242, 1993.
6. M. Berger, P. Gauduchon und E. Mazet. *Le spectre d'une variété Riemannienne.* Lecture Notes in Mathematics, 194. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
7. T.P. Branson. Group representations arising from Lorentz conformal geometry. *J. Funct. Anal.*, 74:199–291, 1987.
8. T.P. Branson, S.–Y.A. Chang und P.C. Yang. Estimates and extremals for zeta function determinants on four–manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 149:241–262, 1992.
9. T.P. Branson und B. Ørsted. Explicit functional determinants in four dimensions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 113:669–682, 1991.
10. S. Brendle. Convergence of the Q-curvature flow on $\mathbb{S}^4$. *Adv. Math.*, 205:1–32, 2006.
11. S.–Y.A. Chang, M.J. Gursky und P.C. Yang. Regularity of a fourth order nonlinear PDE with critical exponent. *Amer. J. Math.*, 121:215–257, 1999.
12. S.–Y.A. Chang und P.C. Yang. Prescribing Gaussian curvature on $\mathbb{S}^2$. *Acta Math.* 159:215–259, 1987.
13. S.–Y.A. Chang und P.C. Yang. Extremal metrics of zeta function determinants on 4-manifolds. *Ann. of Math.*, (2) 142:171–212, 1995.
14. B. Chow, P. Lu und L. Ni. *Hamilton's Ricci flow*. Graduate Studies in Mathematics, 77. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
15. J. Feldman, R. Froese, N. Ghoussoub und C. Gui. An improved Moser–Aubin–Onofri inequality for axially symmetric functions on $\mathbb{S}^2$. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 6:95–104, 1998.
16. L. Fontana. Sharp borderline Sobolev inequalities on compact Riemannian manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 68:415–454, 1993.
17. N. Ghoussoub und C.S. Lin. On the best constant in the Moser–Onofri–Aubin inequality. *preprint*, 2009.

18. D. Gilbarg und N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 224, Springer–Verlag, Berlin etc., zweite Auflage, 1983.
19. C. Gui und J. Wei. On a sharp Moser–Aubin–Onofri inequality for functions on $\mathbb{S}^2$ with symmetry. *Pacific J. Math.*, 194:349–358, 2000.
20. E. Hebey. *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*. Lecture Notes in Math., 1635. Springer–Verlag, Berlin etc., 1996.
21. E. Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*. Courant Lecture Notes in Math., 5. New York Univ. Courant Inst. of Math. Sciences, New York, 1999.
22. J.L. Kazdan und F.W. Warner. Curvature functions for compact 2-manifolds. *Ann. of Math.*, (2) 99:14–47, 1974.
23. W. Kühnel. *Differential geometry: curves–surfaces–manifolds*. Student Mathematical Library, 16. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
24. J.M. Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. Graduate Texts in Mathematics, 176, Springer-Verlag, New York, 1997.
25. J.M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 218, Springer-Verlag, New York, 2003.
26. C.S. Lin. A classification of solutions of a conformally invariant fourth order equation in $\mathbb{R}^n$. *Comment. Math. Helv.*, 73:206–231, 1998.
27. J. Moser. A sharp form of an inequality by N. Trudinger. *Indiana Univ. Math. J.*. 20:1077–1092, 1971.
28. J. Moser. On a nonlinear problem in differential geometry. *Dynamical systems Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971*, 273–280. Academic Press, New York, 1973.
29. B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak. Extremals of determinants of Laplacian. *J. Funct. Anal.*, 80:148–211, 1988.
30. S. Paneitz. A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo–Riemannian manifolds. *preprint*, 1983.
31. F. Robert. *Fourth Order Equations with critical growth in Riemannian Geometry*. Notes from a course given at the University of Wisconsin at Madison and at the Technische Universität in Berlin, persönliche Notizen, 2009.
32. D.R. Smith. *Variational methods in optimization*. Reprint of the 1974 original, Dover Publications Inc., Mineola, NY, 1998.
33. N.S. Trudinger. On imbeddings into Orlicz spaces and some applications. *J. Math. Mech.*, 17:473–483, 1967.
34. J. Wei und X. Xu. On conformal deformations of metrics on $\mathbb{S}^n$. *J. Funct. Anal.*, 157:292–325, 1998.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass diese Diplomarbeit selbstständig von mir verfasst wurde. Ich habe außer den im Literaturverzeichnis genannten Quellen keine weiteren Hilfsmittel verwendet. Des Weiteren wurde diese Diplomarbeit bisher keiner Prüfungskommission vorgelegt.

Ludwig Pulst