

KONVEXITÄT UND GLEICHMÄSSIGE ABSCHÄTZUNGEN
BEI DER KAPILLARITÄTSGLEICHUNG

DIPLOMARBEIT*

vorgelegt der
Fakultät für Mathematik
Otto-von-Guericke-Universität zu Magdeburg

von

Stephan Lenor

geboren
am 30. Januar 1986 in Dessau.

Betreuer und erster Gutachter: Prof. Dr. Hans-Christoph Grunau

zweiter Gutachter: Prof. Dr. Miles Simon

*gemäß den Hinweisen der Gutachter überarbeitete Version vom 19.07.2012

ALLEN PERSONEN, DIE MICH BEI DIESER ARBEIT UNTERSTÜTZT HABEN,
DANKE ICH VON GANZEM HERZEN:

Prof. Dr. Hans-Christoph Grunau für die gute Betreuung und zahlreiche Schlüsselideen.
Dr. Anna Dall'Acqua für ihre Zeit und viele Antworten.
Regina Lenor und Mirjam Kny für das aufwändige Korrekturlesen.
Meiner Familie für deren Unterstützung in allen Belangen.

INHALTSVERZEICHNIS

I. EINLEITUNG	4
KAPILLARE OBERFLÄCHEN	4
RANDWINKEL UND KONVEXITÄT	5
NOTATION	6
CHARAKTER DES PROBLEMS	8
II. VERGLEICHSPRINZIP	10
VERGLEICHSPRINZIP	10
EINDEUTIGKEIT	14
III. A-PRIORI-SCHRANKEN	15
ABSCHÄTZUNGEN DER SUPREMUMSNORM	15
INNERE GRADIENTEN-SCHRANKEN	25
MAXIMUMPRINZIP FÜR GRADIENTEN	29
GLOBALE GRADIENTEN-SCHRANKEN	32
$C^{1,\alpha}$ -SCHRANKEN	43
IV. EXISTENZ UND REGULARITÄT	57
V. KONVEXITÄT	60
RADIALSYMMETRISCHE LÖSUNGEN	60
$\gamma = 0$ ÜBER STRIKT KONVEXEN GEBIETEN	63
FÄLLE VON NICHT-KONVEXITÄT	63
VI. STÖRUNGSRESULTAT	65
GLEICHMÄSSIGE A-PRIORI-SCHRANKEN	69
STÖRUNGSRESULTAT	79
LITERATURVERZEICHNIS	89

I. EINLEITUNG

Diese Diplomarbeit hat zum Ziel, ein Störungsresultat für die Konvexität symmetrischer Kapillarflächen zu zeigen. Modifiziert man ein C^4 -berandetes und beschränktes Gebiet durch hinreichend kleine C^4 -Störungen, kann für die Lösungen der Kapillaritätsgleichungen eine gleichmäßige $C^{1,\alpha}$ -Schranke gefunden werden. Eine Schlüsselrolle werden hierbei gleichmäßige innere und äußere Kugelbedingungen einnehmen. Durch ein Widerspruchsargument kann dann auch eine gleichmäßige $C^{2,\alpha}$ -Schranke und mit ihr eine Ähnlichkeit der zweiten Ableitungen festgestellt werden. Da kapillare Oberflächen über einem symmetrischen Grundgebiet konvex sind, sind es somit auch Lösungen über (im C^4 -Sinne) kreisähnlichen Gebieten.

KAPILLARE OBERFLÄCHEN

Kapillare Oberflächen beschreiben die Grenzschicht zwischen Gas und Flüssigkeit im Drei-Phasen-System einer Röhre (sog. *Kapillare*, engl. *capillary tube*). Wird eine Kapillare mit Querschnitt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, einem beschränkten und C^1 -berandeten Gebiet, in einen Flüssigkeitsbehälter gebracht, so wird die Flüssigkeit infolge der Grenzflächenwirkung heraufgezogen oder heruntergedrückt. Die sich dabei ausbildende Grenzschicht zwischen Gas und Flüssigkeit in der Kapillare soll im Folgenden als *Kapillarfläche* bzw. *kapillare Oberfläche* bezeichnet werden. Sie hängt im Wesentlichen vom Verhältnis der Adhäsions- und Kohäsionskräfte am Röhrenrand, und damit dem Tripel (Gas, Flüssigkeit, Feststoff), aber auch von Temperatur und Gravitationskräften, welche die Oberflächenspannung beeinflussen, ab.

Zwei prototypische Situationen sind hier Wasser und Quecksilber in einem kreisrunden Glasröhrchen unter normaler Atmosphäre und Raumtemperatur auf der Erdoberfläche. Während Wasser wegen der überlegenen Adhäsionskräfte am Röhrenrand nach oben gezogen wird, überwiegen beim Quecksilber die Kohäsionskräfte. Wasser bildet so eine konvexe Oberfläche oberhalb des äußeren Flüssigkeitspegels, und Quecksilber eine konkave Fläche unterhalb des äußeren Flüssigkeitspegels aus (vgl. [Rec65, 10.10 und 10.11]).

Gauß stellte 1830 eine Modellierung der Situation als quasilineares elliptisches Randwertproblem zweiter Ordnung vor (vgl. [Fin86, Chapter 1]). Die Kapillarfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ wird hierbei als Graph

$$S := \{(x^1, x^2, u(x))^T \in \mathbb{R}^3 : x = (x^1, x^2)^T \in \Omega\}$$

über dem Grundgebiet Ω parametrisiert, wobei $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die Höhe der Flüssigkeit über dem Flüssigkeitsspiegel des umliegenden Gefäßes ist. Dazu wird das äußere Gefäß hinreichend groß und kreisrund gewählt und die Flüssigkeit als inkompressibel angenommen.

Die Randbedingung des Problems wird durch den Winkel $\theta : \partial\Omega \rightarrow [0, \pi]$ zwischen unterer Kapillarflächennormale und äußerer Röhrennormale gegeben. Dieser Winkel hängt vom Verhältnis zwischen Adhäsions- und Kohäsionskräften am Rand ab; es soll von homogenen Randverhältnissen ausgegangen werden, sodass θ konstant als $\gamma \in [0, \pi]$ gewählt werden kann. Die Kapillaritätskonstante κ ist eine rein physikalische Konstante, welche im Wesentlichen durch die Oberflächenspannung bestimmt wird und hier stets als $\kappa > 0$ angenommen werden soll. Es bezeichne außerdem $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$

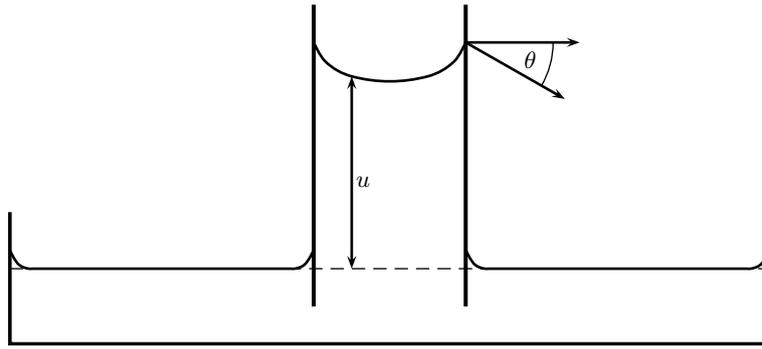


Abbildung 1: Kapillare im Flüssigkeitsbehälter

die äußere Normale an Ω .

Das resultierende Randwertproblem (vgl. [Fin86, 1.9]) besteht nun aus der Gleichung

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = \kappa u, \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

und der Randwertvorgabe

$$\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \cdot \nu = \cos(\gamma), \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (2)$$

RANDWINKEL UND KONVEXITÄT

In dieser Arbeit wird, vor dem Hintergrund Konvexität zu untersuchen, stets $\gamma \in [0, \pi/2]$ betrachtet, da sich Konvexität im Fall $\gamma \in (\pi/2, \pi]$ ausschließt. Allerdings gilt:

Bemerkung 1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und C^1 -berandetes Gebiet, $\kappa > 0$ und $\gamma \in [0, \pi]$. Es ist u genau dann Lösung des dazugehörigen Kapillaritätsproblems (1) \wedge (2), wenn $-u$ Lösung des Problems für Ω , κ und $\pi - \gamma$ ist.

Beweis. Offenbar gilt die Gleichung (1) für u genau dann, wenn sie für $-u$ gilt. Da außerdem

$$\forall \gamma \in [0, \pi]: \quad \cos(\gamma) = -\cos(\pi - \gamma),$$

ist die Randbedingung (2) für u und γ genau dann erfüllt, wenn sie für $-u$ und $\pi - \gamma$ erfüllt ist. \square

Damit werden Aussagen von Existenz, Regularität und A-priori-Abschätzungen von Intervallen $I \subset [0, \pi/2]$ auf die gespiegelten Intervalle $\pi - I \subset [\pi/2, \pi]$ übertragen. Nur die Positivität von Lösungen aus Korollar 2 wird auf $[\pi/2, \pi]$ zur Negativität, und (strikte) Konvexität wird auf $[\pi/2, \pi]$ zur (strikten) Konkavität; entsprechend ändert sich das Störungsresultat. Die formelle Einschränkung vermeidet also nur umständliche Doppelformulierungen und ist zu keinem Zeitpunkt eine inhaltliche Einschränkung.

NOTATION

Es sollen in der Arbeit folgende erwähnenswerte Konventionen gelten:

Zu einem metrischen Raum (\mathcal{M}, d) und einer Menge $U \subset \mathcal{M}$ bezeichnen U° das Innere, \bar{U} den Abschluss und ∂U den Rand von U in \mathcal{M} .

Es bezeichne \mathbb{N} die natürlichen Zahlen ohne Null und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Zu $n \in \mathbb{N}$ und $p, q \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $p \cdot q$ stets das euklidische Skalarprodukt zwischen p und q .

Zu $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $|x| := \sqrt{x \cdot x}$ die euklidische Norm von x .

Zu $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $(x^1, \dots, x^n) := x$ die Komponentenschreibweise von x .

Zu $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ und $x_M \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $B_r(x_M) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_M| < r\}$ die offene Kugel mit Radius r um den Mittelpunkt x_M .

Zu $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die $(n-1)$ -dimensionale Standard-Sphäre im \mathbb{R}^n .

Zu $n \in \mathbb{N}$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, bezeichne $\mathcal{L}^n(M)$ das n -dimensionale Lebesgue-Maß von M .

Zu $n \in \mathbb{N}$ heißt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Gebiet*, wenn es nicht-leer, offen und zusammenhängend ist.

Zu $n \in \mathbb{N}$ heißt $M \subset \mathbb{R}^n$ *konvex*, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ und $\lambda \in (0, 1)$ auch $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in M$ ist. M heißt *streng konvex*, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ und $\lambda \in (0, 1)$ sogar $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in M^\circ$ gilt. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein C^2 -berandetes Gebiet mit Randkurve $c \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, $c(\mathbb{R}) = \partial\Omega$, $(-c^2, c^1)^T$ stets innere Normale und $\mathcal{K} \in C^0(\mathbb{R})$ die durch

$$\begin{pmatrix} \ddot{c}^1 \\ \ddot{c}^2 \end{pmatrix} = \mathcal{K} \begin{pmatrix} -\dot{c}^2 \\ \dot{c}^1 \end{pmatrix}$$

gegebene Randkrümmung, dann ist Ω konvex genau dann, wenn $\mathcal{K} \geq 0$ ist. Ω heißt *gleichmäßig konvex*, falls überall $\mathcal{K} > 0$ ist. Ein gleichmäßig konvexes Ω ist insbesondere streng konvex; die Umkehrung gilt i.A. nicht.

Zu $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < \infty$ bezeichne $\Omega_{\varepsilon_1 \leq \text{dist} \leq \varepsilon_2} := \{x \in \bar{\Omega} : \varepsilon_1 \leq \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon_2\}$. Analog werden $\Omega_{\text{dist}=\varepsilon_1}$, $\Omega_{\varepsilon_1 < \text{dist} < \varepsilon_2}$ etc. definiert. Für $\text{dist} < \varepsilon_2$ wird $\varepsilon_2 = \infty$ zugelassen.

Zu einem normierten Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ und $\emptyset \neq M_1, M_2 \subset X$ heißt M_1 *kompakt enthalten* in M_2 (engl. *compactly contained*), geschrieben $M_1 \Subset M_2$, falls \bar{M}_1 kompakt und $\bar{M}_1 \subseteq M_2$ ist.

Ein C^1 -berandetes und beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls es wegweise zusammenhängend und nullhomotop ist. Insbesondere besitzt ein solches Gebiet entsprechend des Riemannschen Abbildungssatzes genau eine Randkomponente, d.h. dass der Rand zusammenhängend ist. In diesem Fall heißt die Randkurve $c \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ mit $c(\mathbb{R}) = \partial\Omega$ und $|\dot{c}| > 0$ *mathematisch positiv orientiert*, falls $(-\dot{c}^2, \dot{c}^1)^T / |\dot{c}|$ stets der inneren Normale an Ω entspricht.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $r > 0$. Es heißt, dass Ω eine *innere Kugelbedingung* mit

Radius r erfüllt, falls für alle $x \in \partial\Omega$

$$\exists x_M \in \Omega : B_r(x_M) \subset \Omega, \overline{B_r(x_M)} \cap \partial\Omega = \{x\}.$$

Es heißt, dass Ω eine *äußere Kugelbedingung mit Radius r* erfüllt, falls für alle $x \in \partial\Omega$

$$\exists x_M \in \mathbb{R}^2 : B_r(x_M) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \overline{B_r(x_M)} \cap \partial\Omega = \{x\}.$$

Zu $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichne $\text{supp } v := \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}$ den Träger (engl. *support*) von v .

Zu $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 1]$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt bezeichnen $C^m(\Omega)$, $C^m(\overline{\Omega})$ und $C_0^m(\Omega)$ die üblichen Räume stetig differenzierbarer Funktionen über Ω (vgl. [GT01, S. 10]) und $C^{m,\alpha}(\Omega)$ und $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ die üblichen Hölder- bzw. Lipschitzräume (vgl. [GT01, S. 52]). Es sei für $v \in C^0(\Omega)$ und $V \subset \Omega$

$$[v]_{\alpha,V} := \sup_{x_1, x_2 \in V} \frac{|v(x_1) - v(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} \in [0, \infty].$$

Mit den üblichen Normen

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{C^m(\overline{\Omega})} : C^m(\overline{\Omega}) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n=0 \\ k_1 + \dots + k_n \leq m}}^n \sup_{\Omega} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{k_n} v \right|, \\ \|\cdot\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} : C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n=0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}}^n \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{k_n} v \right]_{\alpha,\Omega} \end{aligned}$$

werden $C^m(\overline{\Omega})$ und $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ zu Banachräumen. Sie sind äquivalent zu den in [GT01] verwendeten Normen (vgl. [GT01, S. 53]).

Zu $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{N}_0$ und $0 < p \leq \infty$ bezeichne $L^p(\Omega)$ die Menge der p -integrierten Funktionen über Ω mit Norm

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{falls } p \neq \infty, \\ \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \inf_{\substack{\mathcal{N} \subset \Omega \\ \mathcal{L}^n(\mathcal{N})=0}} \sup_{\Omega \setminus \mathcal{N}} |v|, \quad \text{falls } p = \infty. \end{aligned}$$

Mit $W^{m,p}(\Omega)$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ seien die üblichen Räume m -fach schwach differenzierbarer Funktionen mit p -integrierten schwachen Ableitungen bezeichnet (vgl. [GT01, 7.5]).

Auf Produkträumen

$$X := X_1 \times \cdots \times X_m$$

von $m \in \mathbb{N}$ normierten Räumen $(X^1, \|\cdot\|_{X^1}), \dots, (X^m, \|\cdot\|_{X^m})$, sei mit $\|\cdot\|_X$ stets die Maximums-

norm bezeichnet, d.h.

$$\|\cdot\|_X : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x^1, \dots, x^m) \mapsto \max \{ \|x^1\|_{X^1}, \dots, \|x^m\|_{X^m} \}. \quad (3)$$

Durch diese Norm werden die meisten gemeinsamen Eigenschaften der Teilräume, wie Vollständigkeit, an X vererbt.

Zu $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt $u \in C^2(\Omega)$ *konvex*, falls überall $\text{Hess } u \geq 0$, d.h. positiv semidefinit, ist. u heißt *strikt konvex*, falls überall sogar $\text{Hess } u > 0$, d.h. positiv definit, ist. Existiert weiter ein $\delta > 0$ so, dass sogar $\text{Hess } u > \delta$ überall, dann heißt u *gleichmäßig konvex*.

Zu $i, j \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = j \\ 0 & , \text{ falls } i \neq j \end{cases}$$

das Kroneker-Symbol.

ν wird, wenn nicht ausdrücklich anders gekennzeichnet, ausschließlich zur Bezeichnung äußerer Normalen an C^1 -Gebiete verwendet.

Es wird dem Leser nicht verborgen bleiben, dass eine Reihe an Abschätzungen sehr explizit dargestellt werden. Da es am Ende der Arbeit zu einem Widerspruchsbeweis kommt und wiederholt externe Größen genutzt werden, bleibt das hier ohne größeren Nutzen und kann im Wesentlichen überlesen werden. Für eine Weiterverwendung jedoch sollte es nützlich sein direkt zu sehen, in welcher Ordnung bestimmte Größen in die Abschätzungen einfließen.

CHARAKTER DES PROBLEMS

Offenbar handelt es sich bei (1) um eine quasilineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Koeffizienten vor den Termen zweiter Ordnung lassen sich dabei beschreiben durch

$$a_{ij} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \frac{\delta_{i,j}}{\sqrt{1 + |p|^2}} - \frac{p^i p^j}{(1 + |p|^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4)$$

wobei $i, j \in \{1, 2\}$. Die Gleichung (1) wird so zu

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\nabla u) u_{x^i x^j} = \kappa u.$$

Es zeigt sich, dass die Gleichung elliptisch, aber weder gleichmäßig noch strikt elliptisch, ist (vgl. [GT01, S. 31, S. 259]), da für $\xi = (\xi^1, \xi^2)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(p) \xi^i \xi^j = \frac{\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2}{\sqrt{1 + |p|^2}} - \frac{(\xi \cdot p)^2}{(1 + |p|^2)^{\frac{3}{2}}},$$

was sich abschätzen lässt zu

$$\lambda(p)|\xi|^2 := \frac{|\xi|^2}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1+|p|^2)|\xi|^2 - |p|^2|\xi|^2}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(p)\xi^i\xi^j \leq \frac{|\xi|^2}{\sqrt{1+|p|^2}} =: \Lambda(p)|\xi|^2, \quad (5)$$

wobei offenbar $\lambda(p), \Lambda(p) \rightarrow 0$ und $\Lambda(p)/\lambda(p) = 1 + |p|^2 \rightarrow \infty$ für $|p| \rightarrow \infty$.

Interessant wird das Problem auch durch seine nicht-lineare Neumann-Randbedingung (2), die einen Zugang mittels Schauder-Theorie zu verhindern scheint.

II. VERGLEICHSPRINZIP

VERGLEICHSPRINZIP

Das folgende Resultat von Paul Concus und Robert Finn (vgl. [CF74b]) ist in [Fin86, Theorem 5.1] nachzulesen und erlaubt es, durch die Wahl günstiger Vergleichsfunktionen, verschiedene Eigenschaften kapillarer Oberflächen zu zeigen. So ergeben sich, neben den hier gezeigten C^0 -a-priori-Schranken und der Eindeutigkeit, verschiedene Aussagen über die Gebiets-Abhängigkeit der Höhe und des darunterliegenden Volumens der in der Kapillare aufgestiegenen Flüssigkeit (vgl. [Fin86, 5.3]).

Es bezeichne im folgenden Abschnitt stets

$$a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto \frac{p}{\sqrt{1 + |p|^2}}.$$

Satz 1 (Concus, Finn, 1974). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und C^1 -berandetes Gebiet mit äußerer Normale $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$ und $\kappa > 0$. Für eine Zerlegung $\partial\Omega = \Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta$ und $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ gelte*

$$\left\{ \begin{array}{ll} Nu := \operatorname{div}(a(\nabla u)) - \kappa u \geq \operatorname{div}(a(\nabla v)) - \kappa v =: Nv & , \quad \text{in } \Omega \\ u \leq v & , \quad \text{auf } \Sigma_\alpha \\ a(\nabla u) \cdot \nu \leq a(\nabla v) \cdot \nu & , \quad \text{auf } \Sigma_\beta \end{array} \right.$$

Weiter seien Nu und Nv über Ω integrierbar.

Dann ist $u \leq v$ in Ω . Existiert außerdem ein $x \in \Omega$ mit $u(x) = v(x)$, so ist $u \equiv v$.

Zum Beweis der letzten Aussage greifen Concus und Finn auf das Maximumprinzip von Eberhard Frederich Ferdinand Hopf (vgl. [Hop52]) zurück. Hier wird eine etwas allgemeinere aber bekannte Formulierung verwendet, wie sie sich beispielsweise in [HL00, Theorem 2.5] findet.

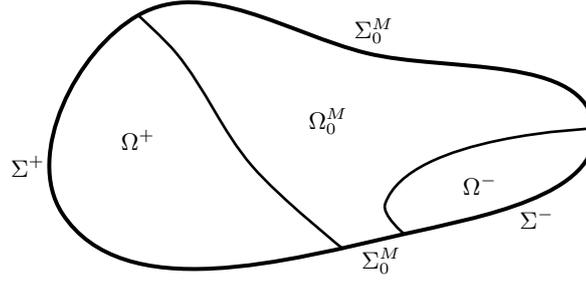
Hilfssatz 1 (Hopf, 1952). *Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Kreisscheibe und $w \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$. Es gelte in D die Ungleichung*

$$\tilde{a}_{11}w_{x^1x^1} + 2\tilde{a}_{12}w_{x^1x^2} + \tilde{a}_{22}w_{x^2x^2} + \tilde{b}_1w_{x^1} + \tilde{b}_2w_{x^2} - \tilde{c}w \geq 0, \quad (6)$$

wobei für $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ gerade $\tilde{c} \geq 0$, sowie für $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{22}, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2 \in C^0(\bar{D})$ und einem $\delta > 0$ gerade eine gleichmäßige Elliptizitätsbedingung $\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}^2 > \delta$ gelte. Ferner sei $w < 0$ in D und $w(x_0) = 0$ an einem Randpunkt $x_0 \in \partial D$.

Dann ist die Normalenableitung bzgl. äußerer Normale ν_D an D von w in x_0 strikt positiv, d.h. $(\partial w / \partial \nu_D)(x_0) > 0$.

Beweis zu Satz 1. Angenommen $\{x \in \Omega : u(x) > v(x)\} \neq \emptyset$. Für beliebiges $M > 0$ ist dann wegen der Stetigkeit von u und v die Menge $\{x \in \Omega : 0 < u(x) - v(x) < M\}$ keine Nullmenge. Für $M > 0$

Abbildung 2: Zerlegung von Ω

beliebig, aber fest, bezeichne

$$\begin{aligned}\Omega^- &:= \{x \in \Omega : u(x) - v(x) \leq 0\}, \\ \Omega_0^M &:= \{x \in \Omega : 0 < u(x) - v(x) < M\}, \\ \Omega^+ &:= \{x \in \Omega : M \leq u(x) - v(x)\}.\end{aligned}$$

Wie oben erwähnt ist $\mathcal{L}^2(\Omega_0^M) > 0$. Es sei nun

$$w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad w := \begin{cases} 0 & , \text{ in } \Omega^- \\ u - v & , \text{ in } \Omega_0^M \\ M & , \text{ in } \Omega^+ \end{cases}.$$

Der Rand von Ω setzt sich zusammen aus den drei Abschnitten

$$\Sigma^- := \partial\Omega^- \cap \partial\Omega, \quad \Sigma_0^M := \partial\Omega_0^M \cap \partial\Omega \quad \text{und} \quad \Sigma^+ := \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega.$$

Mit Nu und Nv sind wegen der Beschränktheit von w auch $(Nu - Nv)w$ und $(u - v)w$ über Ω integrierbar. Es ergibt sich so unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{\Omega} (Nu - Nv) w dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} (a(\nabla u) - a(\nabla v)) w dx - \kappa \int_{\Omega} (u - v) w dx \\ &= - \int_{\Omega} (a(\nabla u) - a(\nabla v)) \cdot \nabla w dx - \kappa \int_{\Omega} (u - v) w dx + \int_{\partial\Omega} (a(\nabla u) - a(\nabla v)) \cdot \nu w dS(x) \\ &= - \underbrace{\int_{\Omega} (a(\nabla u) - a(\nabla v)) \cdot \nabla w dx}_{=: Q} - \underbrace{\kappa \int_{\Omega} (u - v) w dx}_{=: W} + \underbrace{\int_{\Sigma^-} (a(\nabla u) - a(\nabla v)) \cdot \nu w dS(x)}_{=0} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Sigma_0^M} (a(\nabla u) - a(\nabla v)) \cdot \nu w dS(x)}_{=: S_0^M} + \underbrace{\int_{\Sigma^+} (a(\nabla u) - a(\nabla v)) \cdot \nu w dS(x)}_{=: S^+}.\end{aligned}$$

Es ist $W \geq 0$ und da Ω_0^M keine Nullmenge, ist sogar $W > 0$. Weiter ist $\Sigma^+ \subset \partial\Omega \setminus \Sigma_{\alpha} \subset \Sigma_{\beta}$; analog

$\Sigma_0^M \setminus \{x \in \Sigma_0^M : w(x) = 0\} \subset \Sigma_\beta$. Damit sind $S_0^M, S^+ \leq 0$. Für Q gilt

$$Q = \int_{\Omega_0^M} (a(\nabla u) - a(\nabla v)) \cdot \nabla(u - v) dx.$$

Da $a(p) = p/\sqrt{1 + |p|^2}$ der starken Elliptizitätsbedingung

$$\forall p, q \in \mathbb{R}^2 : \quad p \neq q \Rightarrow (a(p) - a(q)) \cdot (p - q) > 0 \quad (7)$$

genügt, ist also auch $Q \geq 0$, wobei $Q = 0$ nur im Fall $\nabla u \equiv \nabla v$ in Ω_0^M auftritt. Zum Beweis von (7) betrachte für $p \neq q$ aus \mathbb{R}^2

$$F(t) := (p - q) \cdot (a(q + t(p - q)) - a(q)).$$

Da $F(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} F'(t) &= (p - q) \cdot \left(\frac{d}{dt} \frac{q + t(p - q)}{\sqrt{1 + |q + t(p - q)|^2}} \right) \\ &= (p - q) \cdot \left(\frac{p - q}{\sqrt{1 + |q + t(p - q)|^2}} - \frac{(q + t(p - q)) [(q + t(p - q)) \cdot (p - q)]}{(1 + |q + t(p - q)|^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{|p - q|^2}{(1 + |q + t(p - q)|^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{|q + t(p - q)|^2 |p - q|^2}{(1 + |q + t(p - q)|^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{|(q + t(p - q)) \cdot (p - q)|^2}{(1 + |q + t(p - q)|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\geq \frac{|p - q|^2}{(1 + |q + t(p - q)|^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \end{aligned}$$

gilt tatsächlich

$$(a(p) - a(q)) \cdot (p - q) = F(1) > 0.$$

Somit ist

$$0 \leq -Q - W + 0 + S_0^M + S^+ < 0,$$

ein Widerspruch. Also ist $\{x \in \Omega : u(x) > v(x)\} = \emptyset$.

Mit Hilfe des Hilfssatzes 1 bleibt zu zeigen, dass $u \equiv v$ schon aus der Gleichheit in einem Punkt folgt. Dazu betrachte man $w := u - v$ und die üblichen Koeffizienten

$$a_{ij} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \frac{\delta_{i,j}}{\sqrt{1 + |p|^2}} - \frac{p^i p^j}{(1 + |p|^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Es ergibt sich auf ganz Ω eine Ungleichung der Form (6) an w :

$$0 \leq N u - N v = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) - \kappa u - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) + \kappa v$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij}(\nabla u)u_{x^i x^j} - a_{ij}(\nabla v)v_{x^i x^j}) - \kappa w \\
&= - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\nabla u)w_{x^i x^j} + \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v))v_{x^i x^j} - \kappa w \\
&= \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\nabla u)w_{x^i x^j} + \sum_{i,j=1}^2 \int_0^1 \frac{d}{dt} [a_{ij}(\nabla v + t(\nabla u - \nabla v))] dt v_{x^i x^j} - \kappa w \\
&= \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\nabla u)w_{x^i x^j} + \sum_{l=1}^2 \left(\sum_{i,j=1}^2 \int_0^1 \frac{\partial a_{ij}}{\partial p^l} (\nabla v + t(\nabla u - \nabla v)) dt v_{x^i x^j} \right) w_{x^l} - \kappa w,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{ij} &:= a_{ij}(\nabla u), \quad (i, j) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}, \\
\tilde{b}_l &:= \sum_{i,j=1}^2 \int_0^1 \frac{\partial a_{ij}}{\partial p^l} (\nabla v + t(\nabla u - \nabla v)) dt v_{x^i x^j}, \quad l \in \{1, 2\}, \\
\tilde{c} &:= \kappa > 0.
\end{aligned}$$

Mit $c := \max_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla u|$ ist auch

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}^2 &= a_{11}(\nabla u)a_{22}(\nabla u) - a_{12}(\nabla u)a_{21}(\nabla u) \\
&= \left(\frac{1}{1 + |\nabla u|^2} - \frac{|\nabla u|^2}{(1 + |\nabla u|^2)^2} + \frac{u_{x_1}^2 u_{x_2}^2}{(1 + |\nabla u|^2)^3} \right) - \left(\frac{u_{x_1}^2 u_{x_2}^2}{(1 + |\nabla u|^2)^3} \right) \quad (8) \\
&= \frac{1}{(1 + |\nabla u|^2)^2} \geq \frac{1}{(1 + c^2)^2} =: \delta > 0
\end{aligned}$$

erfüllt.

Angenommen $P := \{x \in \Omega : w(x) = 0\} \neq \emptyset$, aber $w \leq 0$ und $w \not\equiv 0$. Dann ist $\Omega \setminus P = w^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ offen. Man kann also $q \in \Omega \setminus P$ so wählen, dass $\text{dist}(q, \partial\Omega) > \text{dist}(q, P)$. Nun wählt man unter den offenen Kreisscheiben um q , die noch ganz in $\Omega \setminus P$ enthalten sind, das maximale Exemplar D aus, also

$$D := B_r(q), \quad \text{mit } r := \max \{\tilde{r} > 0 : B_{\tilde{r}}(q) \subset \Omega \setminus P\}.$$

Nun ist $w < 0$ auf D und es existiert ein Punkt $x_0 \in \partial D \cap \Omega$ mit $w(x_0) = 0$. Da außerdem $\bar{D} \subset \Omega$, sind die Koeffizienten $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{22}, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ stetig auf \bar{D} und $w \in C^2(\bar{D})$. Nach Hilfssatz 1 ist also $(\partial w / \partial \nu_D)(x_0) > 0$, sodass es in Ω Punkte mit $w(x) > 0$ geben müsste, ein Widerspruch. \square

Bemerkung 2. Für $u, v \in C^2(\Omega)$ welche in Ω die Kapillaritätsgleichung erfüllen, sind die Voraussetzungen $Nu \geq Nv$ und $Nu, Nv \in L^1(\Omega)$ aus Satz 1 offenbar stets erfüllt, da $Nu = 0 = Nv$.

EINDEUTIGKEIT

Aus dem soeben gezeigten Vergleichsprinzip lässt sich nun, für alle in dieser Arbeit betrachteten Formulierungen des Kapillaritätsproblems, die Eindeutigkeit folgern.

Korollar 1. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und C^1 -berandetes Gebiet mit äußerer Normale $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\kappa > 0$ und $\gamma \in [0, \pi/2]$ gegeben. Sind $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ Lösungen des dazugehörigen Problems (1) \wedge (2), so gilt $u \equiv v$ in Ω .*

Beweis. Zur Anwendung von Satz 1 seien $\Sigma_\alpha = \emptyset$ und $\Sigma_\beta = \partial\Omega$ gewählt. Entsprechend Bemerkung 2 ist $Nu = Nv$. Die Randbedingung (2) liefert $a(\nabla u) \cdot \nu = a(\nabla v) \cdot \nu$ auf Σ_β . Also sind $u \geq v$ und $v \geq u$ in Ω . \square

III. A-PRIORI-SCHRANKEN

ABSCHÄTZUNGEN DER SUPREMUMSNORM

An dieser Stelle soll eine Randwinkel-unabhängige Abschätzung des Supremums von Lösungen des Problems (1)^(2) als Folgerung des Vergleichsprinzips aus Satz 1 gegeben werden. In [CF74a] zeigen Concus und Finn einen alternativen Weg, ohne die direkte Nutzung des Vergleichsprinzips.

Im Verlauf der Arbeit soll wiederholt auf die folgende Aussage zurückgegriffen werden.

Hilfssatz 2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und C^1 -berandetes Gebiet mit äußerer Normale $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$. Sind $x \in \Omega$ und $p \in \partial\Omega$ so, dass $\text{dist}(x, \partial\Omega) = |x - p|$, dann gilt*

$$\nu(p) \cdot \frac{p - x}{|p - x|} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \nu(p) = \frac{p - x}{|p - x|}.$$

Beweis. Wegen der C^1 -Berandung des Gebiets, lässt sich $\partial\Omega$ lokal um p als Nullstellenmenge einer C^1 -Funktion darstellen, d.h. es existiert eine in \mathbb{R}^2 offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von p und eine Funktion $g \in C^1(U)$ mit

$$\forall x \in U : \nabla g(x) \neq 0, \quad U \cap \Omega = \{x \in U : g(x) > 0\},$$

bzw. $U \cap \partial\Omega = g^{-1}(0)$. Offenbar ist der Tangentialraum an $\partial\Omega$ in p 1-dimensional; er werde durch $\tau \in \mathbb{S}^1$ aufgespannt. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon); \partial\Omega)$ so, dass $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = \tau$. Da für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$|x - p|^2 = \text{dist}(x, \partial\Omega)^2 \leq |x - c(s)|^2$$

gilt, ergibt sich

$$0 = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} |c(s) - x|^2 \right) \Big|_{s=0} = (c(0) - x) \cdot \dot{c}(0) = (p - x) \cdot \tau,$$

also dank der 2-dimensionalen Situation

$$\nu(p) \cdot \frac{p - x}{|p - x|} \in \{-1, 1\}.$$

Angenommen, es wäre $\nu(p) \cdot (p - x)$ negativ. Dann gäbe es $t > 0$ mit $p + t\nu(p) = x$. Da aber für $s > 0$ klein genug $p + s\nu(p) \in U$ und $g(p + s\nu(p)) < 0$ sein muss, da ν als äußere Normale gewählt wurde, wäre nicht die gesamte Verbindungsstrecke $[0, t] \ni s \mapsto p + s\nu(p) \in \mathbb{R}^2$ von p und x aus $\bar{\Omega}$, also p nicht die beste Approximation über $\partial\Omega$ an x , ein Widerspruch. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Der folgende Hilfssatz zeigt unter anderem, dass die Klasse der Gebiete, welche eine innere und eine äußere Kugelbedingung erfüllen, hinreichend groß für die spätere Anwendung ist. Außerdem sollen einige wiederholt verwendete Hilfsaussagen festgehalten werden.

Hilfssatz 3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet.*

- (a) Ist zusätzlich $\partial\Omega \in C^2$, dann existiert $r > 0$ so, dass Ω eine innere Kugelbedingung mit Radius r und eine äußere Kugelbedingung mit Radius r erfüllt.
- (b) Ist zusätzlich $\partial\Omega \in C^1$ und erfüllt Ω eine innere Kugelbedingung mit Radius r , so gilt für alle $x \in \Omega$

$$\exists x_M \in \Omega : B_r(x_M) \subset \Omega, x \in B_r(x_M).$$

- (c) Erfüllt das Gebiet Ω eine innere (bzw. äußere) Kugelbedingung mit Radius $R > 0$, so erfüllt es auch für jedes $0 < r \leq R$ eine innere (bzw. äußere) Kugelbedingung mit Radius r .
- (d) Ist $\partial\Omega \in C^m$ für $m \in \mathbb{N}$, dann existieren endlich viele nach Bogenlänge parametrisierte periodische Kurven $c_1, \dots, c_N \in C^m(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, $N \in \mathbb{N}$, mit

$$\partial\Omega = c_1(\mathbb{R}) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} c_N(\mathbb{R}).$$

- (e) Es sei Ω außerdem streng konvex und $c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\partial\Omega = c(\mathbb{R})$ und einer solchen Orientierung, dass $(-\dot{c}^2, \dot{c}^1)^T$ der inneren Normale von Ω entspricht. Bezeichnet $\mathcal{K} \in C^2(\mathbb{R})$ die Krümmung von c , d.h.

$$\begin{pmatrix} \ddot{c}^1 \\ \ddot{c}^2 \end{pmatrix} = \mathcal{K} \begin{pmatrix} -\dot{c}^2 \\ \dot{c}^1 \end{pmatrix},$$

dann erfüllt Ω für jedes $R < 1/(\max_{\mathbb{R}} \mathcal{K})$ eine innere Kugelbedingung mit Radius R .

Beweis. Die Teilaussagen werden in abgeänderter Reihenfolge bewiesen.

- (d) Der Rand von Ω besteht aus endlich vielen nicht-leeren, disjunkten und zusammenhängenden Randabschnitten. Dazu nehme man $x_1 \in \partial\Omega \neq \emptyset$ und betrachte die dazugehörige Zusammenhangskomponente Σ_1 . Weiter wählt man jeweils $x_k \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} \Sigma_l$ solange bis $\partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^k \Sigma_l = \emptyset$. Käme das Verfahren nicht zum Stillstand, gäbe es unendlich viele nicht-leere, disjunkte und zusammenhängende Randkomponente $(\Sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und dazu $x_k \in \Sigma_k \subset \partial\Omega$. Da $\partial\Omega$ aber kompakt ist, existiert nach Auswahl einer Teilfolge $x \in \partial\Omega$, mit $x_k \rightarrow x$. Da $x \in \partial\Omega$ und $\partial\Omega \in C^m$ ist, existiert eine Umgebung U von x in der $\partial\Omega \cap U$ zusammenhängend durch eine C^m -Kurve dargestellt werden kann. Insbesondere liegt nur eine Zusammenhangskomponente von $\partial\Omega$ in der Nähe von x , ein Widerspruch zu $x_k \rightarrow x$. Damit gibt es nur endlich viele Randabschnitte.

Nun sei $\Sigma \in \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_N\}$ beliebig, aber fest, gewählt. Als 1-dimensionale, zusammenhängende und kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand ist Σ homöomorph zu \mathbb{S}^1 , also geschlossen. Zu jedem $x \in \Sigma$ existiert wegen der C^m -Berandung und nach dem Satz von der impliziten Funktion ein $\varepsilon_x > 0$ und eine offene Umgebung $U_x \subset \mathbb{R}^2$ von x so, dass $\Sigma \cap U_x$ Spur einer Kurve $c_x \in C^m((-\varepsilon_x, \varepsilon_x); \mathbb{R}^2)$ mit $c_x(0) = x$ ist. Nach einer Umparametrisierung nach Bogenlänge und einer ggf. Einschränkung von U_x und c_x (vgl. [Bär10, Proposition 2.1.13]), kann o.B.d.A. c_x als nach Bogenlänge parametrisiert angenommen werden. Außerdem sei c_x o.B.d.A. so parametrisiert, dass $(-\dot{c}_x^2, \dot{c}_x^1)$ lokal der inneren Normale an Ω entspricht. Da Σ

kompakt ist, lässt sich eine endliche Teilmenge $P \subset \Sigma$ so finden, dass

$$\Sigma \subset \bigcup_{x \in P} U_x.$$

Die globale C^m -Kurve kann nun als Aneinanderkettung von lokalen Randkurven definiert werden: Es lassen sich $x_1, \dots, x_M \in P$, $M \in \mathbb{N}$, und dazu Intervalle $[a_k, b_k] \subset (-\varepsilon_{x^k}, \varepsilon_{x^k})$ so finden, dass $c_{x_k}(a_k) = c_{x_{k-1}}(b_{k-1})$ für alle $k \in \{2, \dots, M\}$ und $c_{x_1}(a_1) = c_{x_M}(b_M)$. Es seien dazu

$$\tilde{a}_k := \sum_{l=1}^{k-1} (b_l - a_l), \quad \tilde{b}_k := \tilde{a}_k + (b_k - a_k).$$

c kann nun auf $[0, \tilde{b}_M]$ stückweise definiert werden durch

$$c : [\tilde{a}_k, \tilde{b}_k] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto c_{x^k}(s + a_k - \tilde{a}_k), \quad k \in \{1, \dots, M\}.$$

Es sei $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$ die äußere Normale an Ω . Da c außerdem stückweise in C^4 ist, lässt es sich, für $s \in [\tilde{a}_k, \tilde{b}_k]$, darstellen durch

$$\begin{aligned} c(s) &= c(0) + \int_0^{\tilde{b}_1} \dot{c}(\tau) d\tau + \dots + \int_{\tilde{a}_k}^s \dot{c}(\tau) d\tau \\ &= c(0) + \int_0^s \dot{c}(\tau) d\tau = c(0) + \int_0^s \begin{pmatrix} -\nu^2(c(\tau)) \\ \nu^1(c(\tau)) \end{pmatrix} d\tau. \end{aligned}$$

Daher ist c nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch in den Übergangspunkten so glatt wie es ν zulässt. Insgesamt ist also $c \in C^m([0, \tilde{b}_M]; \mathbb{R}^2)$, $c(0) = c(\tilde{b}_M)$ und $c([0, \tilde{b}_M]) = \Sigma$.

- (c) Es erfülle Ω eine innere Kugelbedingung mit Radius R , wobei $R \geq r > 0$. Es sei $p \in \partial\Omega$ beliebig gegeben. Dann gibt es nach Voraussetzung $x_R \in \Omega$ mit

$$B_R(x_R) \subset \Omega, \quad \overline{B_R(x_R)} \cap \partial\Omega = \{p\}.$$

Man setze $x_r := p + (r/R)(x_R - p)$. Offenbar gilt

$$|x_r - p| = \left| p + \frac{r}{R}(x_R - p) - p \right| = \frac{r}{R}|x_R - p| = r,$$

sodass $p \in \overline{B_r(x_r)} \cap \partial\Omega$. Außerdem gilt für alle $x \in B_r(x_r)$

$$|x_R - x| \leq |x_R - x_r| + |x_r - x| < (R - r) + r = R,$$

sodass $x \in B_R(x_R)$, also $B_r(x_r) \subset B_R(x_R) \subset \Omega$. Daraus folgt auch, dass

$$\overline{B_r(x_r)} \cap \partial\Omega \subset B_R(x_R) \cap \partial\Omega = \{p\},$$

also $\{p\} = \overline{B_r(x_r)} \cap \partial\Omega$. Also ist $B_r(x_r)$ eine geeignete innere Kugel mit Radius r für p , sodass insgesamt Ω eine innere Kugelbedingung mit Radius r erfüllt.

Die gleiche Aussage folgt analog für eine äußere Kugelbedingung.

- (a) Die Aussage wird hier nur für die innere Kugelbedingung gezeigt. Die äußere Kugelbedingung folgt analog, oder indem man für eine Ω umgebende Kugel D eine innere Kugelbedingung für $D \setminus \overline{\Omega}$ sucht.

Entscheidend für diese Aussage wird die Beschränktheit von Ω und damit Kompaktheit von $\partial\Omega$ sein. Zunächst soll durch ein Kompaktheitsargument die bei lokaler Betrachtung schwer kontrollierbare globale Struktur des Randes unter Kontrolle gebracht werden. Ist dies geschehen, so können an jeden Randpunkt innere Kugeln mit Krümmung größer als die der Randkrümmung angelegt werden. Der Schritt zur Kontrolle globaler Strukturen könnte durch qualitative Vorgaben an Ω , wie beispielsweise dessen Konvexität (vgl. (e)), umgangen werden.

Wie in (d) gezeigt wurde, gibt es $N \in \mathbb{N}$ und dazu N nach Bogenlänge parametrisierte Randabschnitte $c_1, \dots, c_N \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, welche o.B.d.A. so orientiert seien, dass $(-\dot{c}_k^2, \dot{c}_k^1)^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ für $k \in \{1, \dots, N\}$ die jeweils inneren Normalen an $\partial\Omega$ sind; das ist durch gegebenenfalls vorzunehmende Umparametrisierungen $\mathbb{R} \ni t \mapsto -t \in \mathbb{R}$ zu erreichen. Für diese gilt

$$\partial\Omega = c_1(\mathbb{R}) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} c_N(\mathbb{R}).$$

Es seien für $k \in \{1, \dots, N\}$ jeweils $\mathcal{K}_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die zu c_k gehörigen Krümmungen, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \ddot{c}_k^1 \\ \ddot{c}_k^2 \end{pmatrix} = \mathcal{K}_k \begin{pmatrix} -\dot{c}_k^2 \\ \dot{c}_k^1 \end{pmatrix},$$

sowie

$$S_{\mathcal{K}} := \sup \{ |\mathcal{K}_k(t)| : k \in \{1, \dots, N\}, t \in \mathbb{R} \}.$$

Offenbar sind die c_k periodisch, also auch die \mathcal{K}_k , sodass $S_{\mathcal{K}} < \infty$.

Es sei $p \in \partial\Omega$ gegeben. Ferner sei $k \in \{1, \dots, N\}$ so, dass $p \in c_k(\mathbb{R})$. Dann existiert eine offene Umgebung U_p um p so, dass

$$\forall x_1, x_2 \in \partial\Omega \cap U_p : \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : c_k(t_1) = x_1, c_k(t_2) = x_2, |t_1 - t_2| < \frac{1}{2S_{\mathcal{K}}}. \quad (9)$$

Zunächst sei dazu \tilde{U}_p eine Umgebung von p so, dass $\partial\Omega \cap \tilde{U}_p = c_k(\mathbb{R}) \cap \tilde{U}_p$. Dies ist möglich, da es zwischen je zwei Randabschnitten $k_1, k_2 \in \{1, \dots, N\}$ mit $k_1 \neq k_2$ einen echten Abstand gibt, d.h. $\text{dist}(c_{k_1}(\mathbb{R}), c_{k_2}(\mathbb{R})) > 0$; vgl. dazu Teil (d). Außerdem kann für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U_\varepsilon \subset B_\varepsilon(p) \cap \tilde{U}_p$ von p so gewählt werden, dass $c_k(\mathbb{R}) \cap U_\varepsilon$ zusammenhängend ist; dafür schneide man alle Kurvenabschnitte aus $B_\varepsilon(p)$ heraus, die nicht mit p zusammenhängen. Angenommen es gäbe keine Umgebung $U_p \subset \tilde{U}_p$ von p mit (9), dann gäbe es zu jedem $\varepsilon > 0$ Randpunkte $x_1, x_2 \in U_\varepsilon$ so, dass für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_k(t_1) = x_1$ und $c_k(t_2) = x_2$ gelten würde, dass $|t_1 - t_2| > 1/(2S_k)$. Also wäre wegen der Parametrisierung nach Bogenlänge von c_k für alle $\varepsilon > 0$ in $B_\varepsilon(p)$ ein p beinhaltender Kurvenabschnitt der Mindestlänge $\inf \{|t_1 - t_2| : c_k(t_1) = x_1, c_k(t_2) = x_2\} \geq 1/(2S_k) > 0$ enthalten. Es gibt außerdem zwei Punkte p_1 und p_2 und dazu $t_{p_1} < t_p < t_{p_2}$ so, dass $p = c_k(t_p)$, $p_1 = c_k(t_{p_1})$, $p_2 = c_k(t_{p_2})$ und $|t_{p_1} - t_p|, |t_{p_2} - t_p| < 1/(4S_k)$. Offenbar muss für jedes $\varepsilon > 0$ mindestens einer

der $\{p_1, p_2\}$ in U_ε enthalten sein. Also gibt es eine Folge $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$ und ein $j \in \{1, 2\}$ so, dass $p_j \in U_{\varepsilon_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch zu $|p - p_j| \neq 0$.

Es existiert eine offene Umgebung $V_p \subset U_p$ um p so, dass $R_p := \text{dist}(V_p, \partial U_p)/2 > 0$. Über V_p lässt sich nun eine innere Kugelbedingung mit Radius $r_p := \min\{R_p, 1/(4S_{\mathcal{K}})\}$ formulieren: Es sei $q \in V_p \cap \partial\Omega$ beliebig gegeben und dazu $s \in \mathbb{R}$ mit $c_k(s) = q$. Als Mittelpunkt der potentiellen inneren Kugel für q sei

$$x_M := c_k(s) + r_p \begin{pmatrix} -\dot{c}_k^2(s) \\ \dot{c}_k^1(s) \end{pmatrix}$$

gewählt. Da $q \in V_p \subset U_p$ und $|x_M - q| = r_p \leq R_p = \text{dist}(V_p, \partial U_p)/2$, ist

$$\text{dist}(x_M, \partial U_p) \geq \text{dist}(q, \partial U_p) - |x_M - q| \geq \text{dist}(V_p, \partial U_p) - \text{dist}(V_p, \partial U_p)/2 = R_p \geq r_p,$$

also $B_{r_p}(x_M) \subset U_p$. Außerdem gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} c_k(t) &= c_k(s) + \int_s^t \dot{c}_k(\tau) d\tau = c_k(s) + \int_s^t \left(\dot{c}_k(s) + \int_s^\tau \ddot{c}_k(\xi) d\xi \right) d\tau \\ &= c_k(s) + (t-s)\dot{c}_k(s) + \int_s^t \int_s^\tau \mathcal{K}_k(\xi) \begin{pmatrix} -\dot{c}_k^2(\xi) \\ \dot{c}_k^1(\xi) \end{pmatrix} d\xi d\tau, \end{aligned}$$

sodass

$$|c_k(t) - (c_k(s) + (t-s)\dot{c}_k(s))| \leq \frac{1}{2}|t-s|^2 S_{\mathcal{K}} \leq |t-s|^2 S_{\mathcal{K}}.$$

Für $x \in \partial\Omega \cap \overline{B_{r_p}(x_M)} \subset \partial\Omega \cap U_p$ gibt es wie oben gezeigt $t \in \mathbb{R}$ so, dass $c_k(t) = x$ und $|t-s| \leq 1/(2S_{\mathcal{K}})$. Damit ist im Fall $t \neq s$

$$\begin{aligned} |x - x_M| &= |c_k(t) - x_M| \geq \inf_{\tilde{x} \in B_{|t-s|^2 S_{\mathcal{K}}}(c_k(s) + (t-s)\dot{c}_k(s))} |\tilde{x} - x_M| \\ &= \max\{0, |x_M - (c_k(s) + (t-s)\dot{c}_k(s))| - |t-s|^2 S_{\mathcal{K}}\} \\ &= \max\left\{0, \sqrt{r_p^2 + |t-s|^2} - |t-s|^2 S_{\mathcal{K}}\right\}, \end{aligned}$$

also wegen $|t-s|^2 S_{\mathcal{K}}^2 \leq 1/4 < 1/2 \leq 1 - 2r_p S_{\mathcal{K}}$

$$\begin{aligned} r_p &= \sqrt{r_p^2 + 2r_p|t-s|^2 S_{\mathcal{K}} + |t-s|^4 S_{\mathcal{K}}^2 - |t-s|^2 S_{\mathcal{K}}} \\ &< \sqrt{r_p^2 + 2r_p|t-s|^2 S_{\mathcal{K}} + (1 - 2r_p S_{\mathcal{K}})|t-s|^2} - |t-s|^2 S_{\mathcal{K}} \\ &= \sqrt{r_p^2 + |t-s|^2} - |t-s|^2 S_{\mathcal{K}} \leq |x - x_M|. \end{aligned}$$

Da $(-\dot{c}^2(s), \dot{c}^1(s))$ innere Normale an $\partial\Omega$ in q ist, muss also $\overline{B_{r_p}(x_M)} \setminus \{q\} \subset \Omega$. Nach Definition ist außerdem $|q - x_M| = r_p$, also $\overline{B_{r_p}(x_M)} \cap \partial\Omega = \{q\}$.

Insgesamt gibt es also für jeden Punkt $p \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung V_p , auf welcher die innere Kugelbedingung mit Radius r_p erfüllt wird. Wegen der Überdeckungskompaktheit von $\partial\Omega$ kann man endlich viele Randpunkte p_1, \dots, p_L , $L \in \mathbb{N}$ aussuchen, um den ganzen

Rand mit $V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_L}$ zu überdecken. Mit der Argumentation aus dem Beweis zu Teil (c) wird in jedem der Abschnitte eine innere Kugelbedingung mit Radius $\min\{r_{p_1}, \dots, r_{p_L}\} > 0$ erfüllt, also auf ganz $\partial\Omega$.

- (b) Ω erfülle eine innere Kugelbedingung mit Radius r . Nun sei $x \in \Omega$ beliebig gegeben. Ist $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq r$, so kann $x_M = x$ gewählt werden. Ist allerdings $\text{dist}(x, \partial\Omega) < r$ so existiert wegen der Kompaktheit von $\partial\Omega$ und der Stetigkeit der euklidischen Norm ein $p \in \partial\Omega$ mit $\text{dist}(x, \partial\Omega) = |x - p|$. Da Ω eine innere Kugelbedingung mit Radius r erfüllt, existiert ein $x_M \in \Omega$ mit $B_r(x_M) \subset \Omega$ und $|x_M - p| = r$. Somit gilt nach Hilfssatz 2 für x_M und x , dass

$$\frac{p - x_M}{|p - x_M|} = \nu(p) = \frac{p - x}{|p - x|}.$$

Weiter ist

$$\frac{(p - x_M)(|x - p| - r)}{r} = \frac{(p - x)(|x - p| - r)}{|p - x|} = (p - x) - r \frac{p - x_M}{|p - x_M|} = x_M - x,$$

also $|x_M - x| = r - |x - p| < r$ und damit $x \in B_r(x_M) \subset \Omega$.

- (e) Zunächst sei angemerkt, dass die Konvexität von Ω und die Geschlossenheit der Randkurve $\mathcal{K} \geq 0$ und $S_{\mathcal{K}} := \max_{\mathbb{R}} \mathcal{K} > 0$ sicherstellen. Um zu zeigen, dass Ω die genannte innere Kugelbedingung erfüllt, soll hier \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} identifiziert und die Situation im Komplexen dargestellt werden.

Angenommen Ω erfüllte die innere Kugelbedingung mit Radius R nicht, dann gäbe es ein $s_0 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\overline{B_R\left(c(s_0) + R \begin{pmatrix} -\dot{c}^2(s_0) \\ \dot{c}^1(s_0) \end{pmatrix}\right)} \cap \partial\Omega \setminus \{c(s_0)\} \neq \emptyset.$$

O.B.d.A. seien $s_0 = 0$, $c(s_0) = 0$ und $\dot{c} = (1, 0)^T$. Außerdem sei $x \in \mathbb{R}^2$ mit $x^1 + ix^2 \in \mathbb{C}$ identifiziert; es ist hier stets $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit und $\Re(x) = x^1$ der Realteil von x , sowie $\Im(x) = x^2$ der Imaginärteil von x . Weiter bezeichne $x_M := (0, R)^T$ den Mittelpunkt der verletzten inneren Kugel $B_R(x_M)$. Die Kurve c lässt sich bekanntlich beschreiben durch die Winkelgeschwindigkeit θ von \dot{c}

$$\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \int_0^s \kappa(\sigma) d\sigma,$$

sodass

$$c(s) = \int_0^s \dot{c}(\tau) d\tau = \int_0^s e^{i\theta(\tau)} d\tau = \int_0^s e^{i \int_0^\tau \kappa(\sigma) d\sigma} d\tau.$$

Man beachte, dass in dieser Darstellung die innere Normale ein i -faches des Tangentialvektors ist, d.h.

$$\begin{pmatrix} -\dot{c}^2 \\ \dot{c}^1 \end{pmatrix} = -\dot{c}^2 + i\dot{c}^1 = i(\dot{c}^1 + i\dot{c}^2) = i \begin{pmatrix} \dot{c}^1 \\ \dot{c}^2 \end{pmatrix},$$

sodass für $s \in \mathbb{R}$ tatsächlich

$$\ddot{c}(s) = i\kappa(s)e^{i \int_0^s \kappa(\sigma) d\sigma} = \kappa(s)i\dot{c}(s) = \kappa(s) \begin{pmatrix} -\dot{c}^2(s) \\ \dot{c}^1(s) \end{pmatrix}.$$

Es existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von 0 so, dass $\partial\Omega \cap \overline{B_R(x_M)} \cap U = \{0\}$. Dazu betrachte man in einer offenen Umgebung $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ von 0 die Kurve c als Funktion $g \in C^4$ und $\partial B_R(x_M)$ als Bild der Funktion $t \mapsto f(t) := R - \sqrt{R^2 - t^2}$. Offenbar sind $g(0) = f(0) = 0$, $g'(0) = f'(0) = 0$ und $g''(0) = \mathcal{K}(0) \leq S_{\mathcal{K}} < 1/R = f''(0)$. Damit ist $0 < g'' < f''$ in einer ggf. verkleinerten Umgebung $U \subset \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$, sodass für t mit $(t, g(t)), (t, f(t)) \in U$

$$g(t) = \int_{\min\{0,t\}}^{\max\{0,t\}} \int_{\min\{0,\tau\}}^{\max\{0,\tau\}} g''(\sigma) d\sigma d\tau < \int_{\min\{0,t\}}^{\max\{0,t\}} \int_{\min\{0,\tau\}}^{\max\{0,\tau\}} f''(\sigma) d\sigma d\tau = f(t).$$

Es bezeichne $L > 0$ die minimale Periode der Kurve c . Da die innere Kugelbedingung verletzt wird, müssen nun $0 < s_1 \leq s_2 < L$ so existieren, dass $c((0, s_1)) \cap \overline{B_R(x_M)} = \emptyset$, $c(s_1) \in \partial B_R(x_M)$ und $c((s_2, L)) \cap \overline{B_R(x_M)} = \emptyset$, $c(s_2) \in \partial B_R(x_M)$. Die Anordnung garantiert, dass mindestens einer der Fälle auftritt:

$$c^1(s_1) = \Re(c(s_1)) > 0, \quad c^1(s_2) = \Re(c(s_2)) < 0, \quad c(s_1) = c(s_2) = (0, 2R)^T.$$

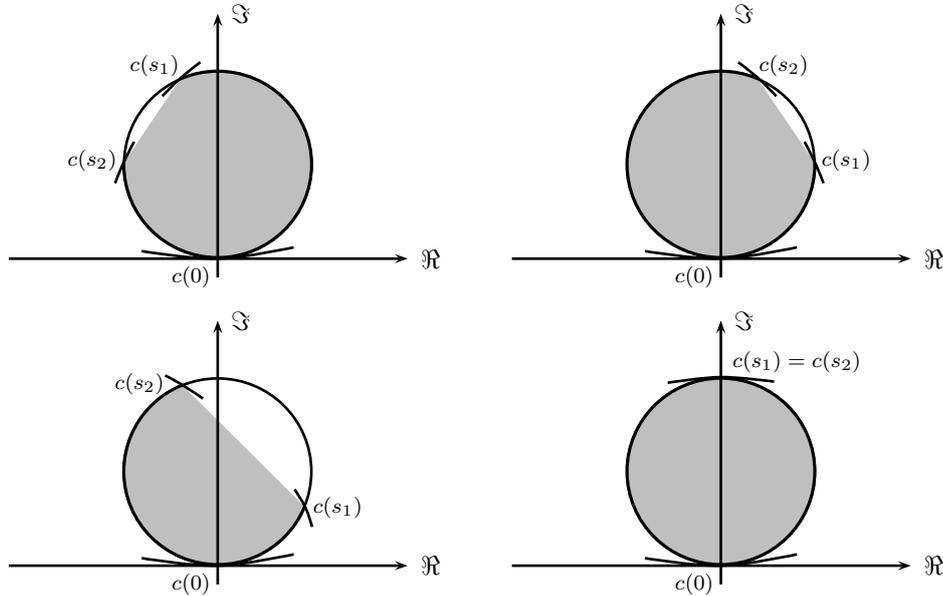


Abbildung 3: Anordnung von $c(s_1)$ und $c(s_2)$

Die strenge Konvexität von Ω garantiert, dass das abgeschlossene Kreissegment unterhalb der Sekantenstrecke von $c(s_1)$ bis $c(s_2)$ ganz in $\Omega \cup \{c(0), c(s_1), c(s_2)\}$ enthalten ist (vgl.

Abbildung 3). Es tritt also mindestens einer der folgenden Fälle ein:

$$\begin{aligned} \Re(c(s_1)) \geq 0 \quad \wedge \quad \theta(s_1) \leq \pi, \\ \Re(c(s_2)) \leq 0 \quad \wedge \quad \theta(s_2) \geq \pi. \end{aligned}$$

Nach ggf. einer Spiegelung der Situation kann hier o.B.d.A. $\Re(c(s_1)) \geq 0$ mit $\theta(s_1) \leq \pi$ angenommen werden.

Genau hier zeigt sich die Widersprüchlichkeit der Situation. Es wird nun möglich sein zu zeigen, dass c mit maximaler Krümmung $S_{\mathcal{K}}$ nicht hinreichend gekrümmt ist, um auf dem Weg von $c(0)$ bis $c(s_1)$ nicht die Konvexität zu verletzen. Die Kurve kann auf der verfügbaren Höhe die „Wendung“ um den Winkel $\theta(s_1)$ nicht vollziehen. Zunächst soll gezeigt werden, dass die sparsamste Variante die Winkeldifferenz zu überwinden, die Wendung mit voller Krümmung $S_{\mathcal{K}}$ wäre. Es ist

$$\theta_{\min} : \left[0, \frac{\theta(s_1)}{S_{\mathcal{K}}} \right] \rightarrow [0, \theta(s_1)], \quad \tau \mapsto S_{\mathcal{K}}\tau$$

die Winkelgeschwindigkeit einer Kurve mit voller Krümmung $S_{\mathcal{K}}$. Die Umparametrisierung

$$\varphi : [0, s_1] \rightarrow \left[0, \frac{\theta(s_1)}{S_{\mathcal{K}}} \right], \quad \xi \mapsto \theta_{\min}^{-1}(\theta(\xi)) = \frac{\theta(\xi)}{S_{\mathcal{K}}}$$

erfüllt offenbar $\theta_{\min} \circ \varphi = \theta$ auf $[0, s_1]$. Es ist $\varphi'(\xi) = \theta'(\xi)/S_{\mathcal{K}} = \mathcal{K}(\xi)/S_{\mathcal{K}} \in (0, 1]$ für alle $\xi \in [0, s_1]$. Damit ergibt sich

$$\int_0^{\frac{\theta(s_1)}{S_{\mathcal{K}}}} \sin(\theta_{\min}(\tau)) d\tau = \int_0^{s_1} \sin(\theta(\xi)) \varphi'(\xi) d\xi \leq \int_0^{s_1} \sin(\theta(\xi)) d\xi. \quad (10)$$

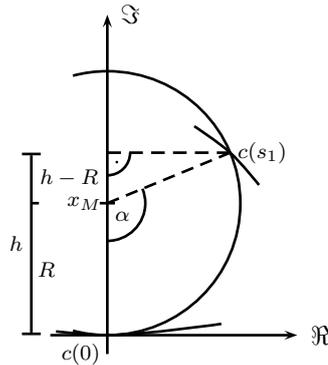


Abbildung 4: Höhe h

Die Höhe soll nun definiert sein als $h := \Im(c(s_1)) - \Im(c(0)) = \Im(c(s_1))$. Einerseits ist ent-

sprechend (10)

$$\begin{aligned} h &= \Im(c(s_1)) = \Im\left(\int_0^{s_1} e^{i\theta(\xi)} d\xi\right) = \int_0^{s_1} \sin(\theta(\xi)) d\xi \geq \int_0^{\frac{\theta(s_1)}{S_{\mathcal{K}}}} \sin(\theta_{\min}(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^{\frac{\theta(s_1)}{S_{\mathcal{K}}}} \sin(S_{\mathcal{K}}\tau) d\tau = \frac{1}{S_{\mathcal{K}}} \int_0^{\theta(s_1)} \sin(\xi) d\xi = \frac{1}{S_{\mathcal{K}}} (1 - \cos(\theta(s_1))), \end{aligned}$$

andererseits lässt sich h direkt aus der geometrischen Situation abschätzen. Es bezeichne α den Winkel $\sphericalangle(0, x_M, c(s_1))$ (vgl. Abbildung 4). Offenbar ist $\alpha \leq \theta(s_1)$, da $c((0, s_1)) \cap \overline{B_R(x_M)} = \emptyset$. Außerdem ist

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{h - R}{R}$$

und damit

$$h = R(1 + \cos(\pi - \alpha)) = R(1 - \cos(\alpha)) \leq R(1 - \cos(\theta(s_1))) < \frac{1}{S_{\mathcal{K}}}(1 - \cos(\theta(s_1))).$$

Insgesamt wäre also

$$\frac{1}{S_{\mathcal{K}}}(1 - \cos(\theta(s_1))) \leq h < \frac{1}{S_{\mathcal{K}}}(1 - \cos(\theta(s_1))),$$

ein Widerspruch.

□

Dass im Folgenden die Abschätzung des Supremums einer Lösung u ausreicht um $|u|$ abzuschätzen, liegt an der Beobachtung, dass für $\gamma \in [0, \pi/2]$ Lösungen von (1) \wedge (2) nicht negativ sind.

Korollar 2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und C^1 -berandetes Gebiet, $\kappa > 0$, $\gamma \in [0, \pi/2]$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ Lösung des dazugehörigen Kapillaritätsproblems (1) \wedge (2). Dann ist entweder $u > 0$ in Ω oder $u \equiv 0$ in Ω .*

Beweis. Als Vergleichsfunktion sei $v \equiv 0$ in Ω gewählt. Offenbar ist $Nv = 0 = Nu$. Weiter ist

$$Tv \cdot \nu = 0 \leq \underbrace{\cos(\gamma)}_{\in [0,1]} = Tu \cdot \nu.$$

Mit der Wahl $\Sigma_\beta := \partial\Omega$, $\Sigma_0 := \emptyset$, $\Sigma_\alpha := \emptyset$ zeigt nun Satz 1 das gewünschte Resultat. □

Das Korollar zur Abschätzung des Supremums gliedert sich in drei Teile, wobei (a) die eigentliche Aussage ist und (b) und (c) die Aufbereitung von (a) für die spätere Anwendung darstellen.

Korollar 3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und C^1 -berandetes Gebiet, $\kappa > 0$, $\gamma \in [0, \pi/2]$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ Lösung des dazugehörigen Kapillaritätsproblems (1) \wedge (2).*

(a) Es seien $x_M \in \Omega$ und $r > 0$ so, dass $B_r(x_M) \subset \Omega$. Dann gilt

$$\sup_{x \in B_r(x_M)} |u(x)| \leq \frac{2}{\kappa r} + r.$$

(b) Erfüllt Ω eine innere Kugelbedingung mit Radius r , dann gilt

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq \frac{2}{\kappa r} + r.$$

(c) Ist $\partial\Omega \in C^2$, so existiert eine von γ unabhängige Konstante $C = C(\Omega, \kappa)$ mit

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq C.$$

Beweis.

(a) Diese Folgerung des Vergleichsprinzips stammt von Concus und Finn, nachzulesen in [Fin86] oder [CF74a]. Zunächst seien $0 < \tilde{r} < r$ betrachtet. Als Vergleichsfunktion wählt man eine untere Hemisphäre \tilde{v} über $B_{\tilde{r}}(x_M)$, deren tiefstliegender Punkt auf Höhe $\tilde{v}_0 := 2/(\kappa\tilde{r})$ liegt, also

$$\tilde{v} : B_{\tilde{r}}(x_M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tilde{v}_0 + \tilde{r} - \sqrt{\tilde{r}^2 - |x_M - x|^2}.$$

Offenbar ist nun $B_{\tilde{r}}(x_M) \subset \Omega$. Weiter sind in $B_{\tilde{r}}(x_M)$

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{v}(x) &= \frac{x - x_M}{\sqrt{\tilde{r}^2 - |x_M - x|^2}}, \\ \operatorname{div}(\mathbb{T} \tilde{v}) &= \operatorname{div} \left(\frac{x - x_M}{\sqrt{\tilde{r}^2 - |x_M - x|^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|x - x_M|^2}{\tilde{r}^2 - |x_M - x|^2}}} \right) \\ &= \frac{1}{\tilde{r}} \operatorname{div}(x - x_M) = \frac{2}{\tilde{r}} = \kappa \tilde{v}_0 \leq \kappa \tilde{v}, \end{aligned}$$

also $Nu = 0 = N\tilde{v}$, und auf $\partial B_{\tilde{r}}(x_M)$

$$\tilde{v} \cdot \mathbb{T}u < 1 = \tilde{v} \cdot \mathbb{T}\tilde{v},$$

wobei $\tilde{\nu}$ die äußere Normale von $B_{\tilde{r}}(x_M)$ bezeichne. Die Anwendung des Vergleichsprinzips aus Satz 1, mit der Wahl $\Sigma_\beta = \partial B_{\tilde{r}}(x_M)$, $\Sigma_0 := \emptyset$, $\Sigma_\alpha := \emptyset$, liefert nun in $B_{\tilde{r}}(x_M)$

$$u < \tilde{v} < \frac{2}{\kappa \tilde{r}} + \tilde{r}.$$

$\tilde{r} \rightarrow r$ und Korollar 2 liefern die Aussage.

(b) Teil (b) aus Hilfssatz 3 und die Anwendung von (a) in jedem $x \in \Omega$ liefern die Aussage.

(c) Da ein Gebiet mit C^2 -Rand nach Teil (a) aus Hilfssatz 3 immer eine innere Kugelbedingung erfüllt, folgt die Aussage aus (b). \square

INNERE GRADIENTEN-SCHRANKEN

Um globale C^1 -Abschätzungen an Lösungen des Kapillaritätsproblems zu erhalten soll zunächst eine lokale Gradienten-Schranke eingeführt werden. Angenehmerweise kann diese Schranke unabhängig von der konkreten Gestalt des Gebiets Ω und unabhängig von jeglichen Randvorgaben gewählt werden. Auf diese Weise werden sich die globalen C^1 -Schranken gleichmäßig über ganzen Klassen von Gebieten formulieren lassen.

Die meisten Arbeiten zu inneren Gradienten-Schranken (engl. *interior gradient bounds*) stammen von den russischen Mathematikerinnen Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya und Nina Nikolaevna Ural'tseva. In einer Reihe von Arbeiten fanden sie zunächst Schranken für gleichmäßig-elliptische und parabolische quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung (vgl. [LU69] und [LU68b]) der Form

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) u_{x^i x^j} = a(x, u(x), \nabla u(x))$$

und konnten diese in [LU70] auf nicht-gleichmäßig-elliptische Gleichungen, mit Nicht-Gleichmäßigkeit der quadratischen Form $\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, z, p) \xi^i \xi^j$ bis hin zur Ordnung 2, ausdehnen. Diese Arbeit soll hier Grundlage der inneren Gradienten-Schranken sein.

Hilfssatz 4. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und C^2 -berandetes Gebiet, $\kappa > 0$ und $u \in C^2(\bar{\Omega})$ eine Lösung der Kapillaritätsgleichung*

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = \kappa u, \quad \text{in } \bar{\Omega}.$$

Ferner sei $\Omega' \Subset \Omega$ und $\sup_{\Omega} |u| \leq M \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine, von Ω und Ω' nur durch $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ abhängige, Konstante $C_I = C_I(\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega), M, \kappa)$ so, dass

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u| \leq C_I.$$

Beweis. Entsprechend [LU70, Theorem 4] lässt sich für klassische Lösungen u einer Gleichung der Form

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^i} a_i(x, u(x), \nabla u(x)) = a(x, u(x), \nabla u(x)), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (11)$$

welche für $|u| \leq M$ die Voraussetzungen [LU70, (2.2)], [LU70, (2.3)], [LU70, (2.4)], [LU70, (2.5)], [LU70, (2.22)] mit geeigneten Konstanten μ_0, \dots, μ_7 erfüllt, eine Abschätzung der Form

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u| \leq C(\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega), \mu_0, \dots, \mu_7)$$

angeben. Es reicht also zu zeigen, dass im Fall der Kapillaritätsgleichung die genannten Voraussetzungen mit ausschließlich von M und κ abhängigen Konstanten μ_0, \dots, μ_7 erfüllt werden. Offenbar

sind hier

$$\begin{aligned} a_i : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & (x, z, p) &\mapsto \frac{p^i}{\sqrt{1+|p|^2}}, \\ a : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & (x, z, p) &\mapsto \kappa z. \end{aligned}$$

Zu [LU70, (2.2)]: Es wird gefordert, dass für $\mu_0 \geq 0$ gilt, dass

$$\forall (x, z, p) \in \bar{\Omega} \times [-M, M] \times \mathbb{R}^2 : \quad \sum_{i=1}^2 |a_i(x, z, p)| \leq \mu_0.$$

Offenbar wird dies von der Kapillaritätsgleichung mit $\mu_0 = \sqrt{2}$ erfüllt:

$$\sum_{i=1}^2 |a_i(x, z, p)| = \frac{|p^1| + |p^2|}{\sqrt{1+|p|^2}} \leq \frac{|p^1| + |p^2|}{\sqrt{\frac{|p^1|^2}{2} + |p^1||p^2| + \frac{|p^2|^2}{2}}} = \frac{|p^1| + |p^2|}{\sqrt{2\left(\frac{|p^1|}{2} + \frac{|p^2|}{2}\right)^2}} = \sqrt{2}.$$

Zu [LU70, (2.3)]: Es wird gefordert, dass für $\mu_1 > 0$ und $\mu_2 \geq 0$ gilt, dass

$$\forall (x, z, p) \in \bar{\Omega} \times [-M, M] \times \mathbb{R}^2 : \quad \sum_{i=1}^2 a_i(x, z, p)p^i \geq \mu_1 \sqrt{1+|p|^2} - \mu_2.$$

Die Kapillaritätsgleichung erfüllt dies mit den Konstanten $\mu_1 = \mu_2 = 1$:

$$\sum_{i=1}^2 a_i(x, z, p)p^i = \frac{|p|^2}{\sqrt{1+|p|^2}} = \frac{1+|p|^2}{\sqrt{1+|p|^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}} \geq \sqrt{1+|p|^2} - 1.$$

Zu [LU70, (2.4)]: Es wird gefordert, dass für $\mu_3 \geq 0$ gilt, dass

$$\forall (x, z, p) \in \bar{\Omega} \times [-M, M] \times \mathbb{R}^2 : \quad |a(x, z, p)| \leq \mu_3.$$

Dies ist mit $\mu_3 = \kappa M$ erfüllt:

$$|a(x, z, p)| = \kappa |z| \leq \kappa M.$$

Zu [LU70, (2.5)]: Diese Eigenschaft ersetzt die nicht vorhandene Gleichmäßigkeit der elliptischen Differentialgleichung. Zunächst seien dazu

$$a_{ij} : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, z, p) \mapsto a_{i,p^j}(x, z, p), \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Es wird gefordert, dass für u die quadratische Form

$$\mathbb{R}^2 \ni \xi \mapsto \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \xi^i \xi^j$$

positiv definit ist und für Konstanten $\mu_4 > 0$ und $\mu_5 > 0$ trotz Nicht-Gleichmäßigkeit einer Abschätzung

$$\mu_4 \frac{|\xi'|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \leq \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \xi^i \xi^j \leq \mu_5 \frac{|\xi'|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \quad (12)$$

genügt. Dabei sollen $\xi' = \xi'(\xi)$ aus ξ durch Einbettung in den \mathbb{R}^3 und anschließende Projektion auf den Tangentialraum des Graphen von u (hier Kapillarfläche), d.h.

$$\hat{\xi} := (\xi^1, \xi^2, 0)^T \quad \text{und} \quad \xi' := \hat{\xi} - (\hat{\xi} \cdot \tilde{\nu}) \tilde{\nu},$$

gewonnen werden. Dabei ist

$$\tilde{\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} (u_{x^1}(x), u_{x^2}(x), -1)$$

die untere Einheitsnormale an die Kapillarfläche im Punkt $(x^1, x^2, u(x))^T$ und $x \in \bar{\Omega}$. In dem Fall, dass man es wie bei der Kapillaritätsgleichung linksseitig mit dem Minimalflächenoperator zu tun hat, sind offenbar

$$a_{ij}(x, z, p) = a_{ji}(x, z, p) = \frac{\delta_{i,j}}{\sqrt{1 + |p|^2}} - \frac{p^i p^j}{(1 + |p|^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Dass die zugehörige quadratische Form positiv definit ist, wurde bereits in (5) gezeigt. Es zeigt sich auch, dass die Forderung (12) mit $\mu_4 = \mu_5 = 1$ erfüllt wird: Dazu seien $\xi \in \mathbb{R}^2$ und $x \in \bar{\Omega}$ beliebig. Ist $\nabla u(x) = 0$, dann gilt offenbar $\hat{\xi} \cdot \tilde{\nu} = 0$ und damit

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \xi^i \xi^j = |\xi|^2 = |\hat{\xi}|^2 = |\hat{\xi} - (\hat{\xi} \cdot \tilde{\nu}) \tilde{\nu}|^2 = \frac{|\xi'|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.$$

Ist $\nabla u(x) \neq 0$, so ist offenbar

$$\left\{ \tilde{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \begin{pmatrix} u_{x^1} \\ u_{x^2} \\ -1 \end{pmatrix}, \tau_1 := \frac{1}{|\nabla u| \sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \begin{pmatrix} u_{x^1} \\ u_{x^2} \\ |\nabla u|^2 \end{pmatrix}, \tau_2 := \frac{1}{|\nabla u|} \begin{pmatrix} -u_{x^2} \\ u_{x^1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 und

$$\left\{ \frac{1}{|\nabla u|} \nabla u, \frac{1}{|\nabla u|} \nabla^\perp u := \frac{1}{|\nabla u|} \begin{pmatrix} -u_{x^2} \\ u_{x^1} \end{pmatrix} \right\}$$

Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 . Die wiederholte Anwendung vom Satz des Pythagoras ergibt so auch in diesem Fall

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \xi^i \xi^j = \frac{|\xi|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} - \frac{(\xi \cdot \nabla u)^2}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\xi|^2 (1 + |\nabla u|^2)}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{|\nabla u|^2 \left(\xi \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)^2}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|\xi|^2 (1 + |\nabla u|^2)}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{|\nabla u|^2 |\xi|^2 - (\xi \cdot \nabla^\perp u)^2}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\xi|^2 + (\xi \cdot \nabla^\perp u)^2}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{(\xi \cdot \nabla u)^2 + (\xi \cdot \nabla^\perp u)^2 + |\nabla u|^2 (\xi \cdot \nabla^\perp u)^2}{|\nabla u|^2 (1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \left(\frac{(\xi \cdot \nabla u)^2}{|\nabla u|^2 (1 + |\nabla u|^2)} + \frac{(\xi \cdot \nabla^\perp u)^2}{|\nabla u|^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \left((\hat{\xi} \cdot \tau_1)^2 + (\hat{\xi} \cdot \tau_2)^2 \right) = \frac{|\xi'|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.
\end{aligned}$$

Zu [LU70, (2.22)]: Es wird gefordert, dass für $\mu_6 > 0$ und $\mu_7 > 0$ gilt, dass mit $v := |\nabla u|^2$ in $(x, z, p) = (x, u(x), \nabla u(x))$

$$A := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 a_{i,z} v_{x^i} + v \sum_{i=1}^2 \frac{d}{dx^i} a_{i,z} + \sum_{i,l=1}^2 u_{x^l} \frac{d}{dx^i} a_{i,x^l} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 a_{p^j} v_{x^j} - a_z v - \sum_{l=1}^2 u_{x^l} a_{x^l}$$

für alle $x \in \bar{\Omega}$ die Abschätzung

$$A \leq \mu_6 |\delta \nabla u| + \mu_7 \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$$

gilt, wobei für $w \in C^2(\bar{\Omega})$ die Abbildung $\delta \nabla w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben ist durch Einbettung des Gradienten in den \mathbb{R}^3 und anschließende Projektion auf den Tangentialraum des Graphen von u , d.h.

$$\hat{w} := (w_{x^1}, w_{x^2}, 0)^T, \quad \delta w := \hat{w} - (\hat{w} \cdot \tilde{\nu}) \tilde{\nu}.$$

Im Fall der Kapillaritätsgleichung können $\mu_6 > 0$ und $\mu_7 > 0$ beliebig gewählt werden, beispielsweise als $\mu_6 = \mu_7 = 1$, da

$$A = -a_z v = -\kappa |\nabla u|^2 \leq 0 \leq |\delta \nabla u| + \sqrt{1 + |\nabla u|^2}.$$

□

Bemerkung 3. Eine mögliche Alternative um innere Gradientenschranken zu gewinnen, stellt Neil Sidney Trudinger in [Tru72] und [Tru73] vor, der dort Gleichungen vorgeschriebener mittlerer Krümmung \mathcal{H} behandelt, d.h.

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = n \mathcal{H}(x),$$

wobei allerdings die A-priori-Schranke abhängig von $\nabla \mathcal{H}$ und damit unbrauchbar für die Kapillaritätsgleichung ist. Es bleibt offen, ob dieser Zugang auf die hier behandelte Situation übertragbar ist.

MAXIMUMPRINZIP FÜR GRADIENTEN

Als weitere Vorbereitung für eine globale C^1 -Abschätzung an Lösungen des Kapillaritätsproblems soll hier ein in [GT01, Chapter 15] nachlesbares Maximumprinzip für Gradienten vorgestellt werden. Es ist ein wichtiges technisches Hilfsmittel, dass sich für quasilineare elliptische Differentialgleichungen unter bestimmten Strukturbedingungen an die Gradienten ihrerseits Differentialgleichungen formulieren lassen. Auf diese Weise lassen sich in vielen Fällen Regularität oder, wie hier, Maximumprinzipien gewinnen.

Hilfssatz 5. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und C^1 -berandetes Gebiet, $\kappa > 0$ und $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ eine Lösung der Kapillaritätsgleichung*

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = \kappa u, \quad \text{in } \Omega. \quad (13)$$

Dann gilt

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| = \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|.$$

Beweis. Hilfssatz und Beweis entsprechen der Vorlage [GT01, Theorem 15.1]: Es soll in $v := |\nabla u|^2$ eine Differentialungleichung hergeleitet werden, welche die Anwendung eines Maximumprinzips für v erlaubt. In Ω ist v nach Voraussetzungen zweimal klassisch differenzierbar und für $i, j \in \{1, 2\}$ sind

$$v_{x^i} = 2 \sum_{l=1}^2 u_{x^l} u_{x^l x^i}, \quad v_{x^i x^j} = 2 \sum_{l=1}^2 (u_{x^l x^j} u_{x^l x^i} + u_{x^l} u_{x^l x^i x^j}).$$

Betrachtet sei die Kapillaritätsgleichung in der ausdifferenzierten Form

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\nabla u) u_{x^i x^j} = \kappa u, \quad \text{in } \Omega,$$

wobei wie oben

$$a_{ij} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \frac{\delta_{i,j}}{\sqrt{1 + |p|^2}} - \frac{p^i p^j}{(1 + |p|^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Wendet man beidseitig den Operator $\sum_{l=1}^2 u_{x^l} d/dx^l$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l,i,j=1}^2 u_{x^l} \frac{d}{dx^l} (a_{ij}(\nabla u) u_{x^i x^j}) - \sum_{l=1}^2 u_{x^l} \kappa u_{x^l} \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^2 u_{x^l} a_{ij,p^k}(\nabla u) u_{x^k x^l} u_{x^i x^j} + \sum_{i,j,l=1}^2 u_{x^l} a_{ij}(\nabla u) u_{x^i x^j x^l} - \kappa v \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^2 a_{ij,p^k}(\nabla u) u_{x^i x^j} v_{x^k} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\nabla u) v_{x^i x^j} - \sum_{i,j,l=1}^2 a_{ij}(\nabla u) u_{x^i x^l} u_{x^j x^l} - \kappa v. \end{aligned} \quad (14)$$

Somit erhält man für v eine elliptische Gleichung der Form

$$\sum_{i,j=1}^2 \tilde{a}_{ij} v_{x^i x^j} + \sum_{i=1}^2 \tilde{b}_i v_{x^i} = \tilde{c}v + \tilde{d},$$

wobei für $i, j \in \{1, 2\}$ die Koeffizienten gegeben sind durch

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij}(\nabla u), \quad \tilde{b}_i = \sum_{k,l=1}^2 a_{kl,p^i}(\nabla u) u_{x^k x^l}, \quad \tilde{c} \equiv 2\kappa, \quad \tilde{d} = 2 \sum_{i,j,l=1}^2 a_{ij}(\nabla u) u_{x^i x^l} u_{x^j x^l}.$$

Ist also

$$\tilde{c}v + \tilde{d} \geq 0, \tag{15}$$

so folgt nach klassischem schwachen Maximumprinzip für elliptische Operatoren (vgl. [GT01, Theorem 3.1]), dass

$$\sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v$$

und damit die Behauptung. Da $\kappa > 0$ und v per se nicht-negativ ist, ist $\tilde{c}v \geq 0$. Ferner ist wegen der positiven Definitheit von $(a_{ij}(\nabla u))_{i,j=1,2}$ auch $\tilde{d} \geq 0$:

$$\sum_{i,j,l=1}^2 a_{ij}(\nabla u) u_{x^i x^l} u_{x^j x^l} = \sum_{l=1}^2 \left(\sum_{i,j=1}^2 u_{x^i x^l} a_{ij}(\nabla u) u_{x^j x^l} \right) \geq 0.$$

□

Bemerkung 4. Das in Hilfssatz 5 beschriebene Maximumprinzip ist für diese Arbeit vollkommen ausreichend, da die in Satz 2 vorgestellten Methoden zur Abschätzung des Tangentialanteils des Gradienten im Randbereich von Ω sogar $C^3(\bar{\Omega})$ -Regularität an u voraussetzen. Es soll dennoch nicht unerwähnt bleiben, dass es für das Maximumprinzip hinreichend wäre, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ an Regularität vorzusetzen.

WEG 1: Einerseits kann dazu, nach dem Vorbild von [GT01, Theorem 15.1], der Beweis von Hilfssatz 5 durch eine integrale Formulierung von (14) und ein Approximationsargument erweitert werden: Es lässt sich (14) in Divergenzform bringen und, durch Multiplikation mit $\psi \in C_0^1(\Omega)$ und anschließender Integration, umschreiben zu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^i} [a_{ij}(\nabla u) v_{x^j}] \psi dx - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij,p^k}(\nabla u) u_{x^i x^k} v_{x^j} \psi dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij,p^k}(\nabla u) u_{x^i x^j} v_{x^k} \psi dx - \sum_{i,j,l=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij}(\nabla u) u_{x^i x^l} u_{x^j x^l} \psi dx - \kappa \int_{\Omega} v \psi dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij}(\nabla u) v_{x^j} \psi_{x^i} dx - \sum_{i,j,l=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij}(\nabla u) u_{x^i x^l} u_{x^j x^l} \psi dx - \kappa \int_{\Omega} v \psi dx =: I(u, \psi), \end{aligned}$$

wobei hier

$$a_{ij,p^k} = -\frac{\delta_{i,j}p^k}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta_{i,k}p^j}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta_{k,j}p^i}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} + 3\frac{p^i p^j p^k}{(1+|p|^2)^{\frac{5}{2}}} = a_{ik,p^j}, \quad i, j, k \in \{1, 2\},$$

eingeht. Für ein $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ und ein $\psi \in C_0^1(\Omega)$ findet sich, wegen $\text{supp } \psi \subset \Omega$, eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, sodass $u_k \rightarrow u$, $u_{k,x^i} \rightarrow u_{x^i}$, $u_{k,x^i x^j} \rightarrow u_{x^i x^j}$, $i, j \in \{1, 2\}$, gleichmäßig auf $\Omega \cap \text{supp } \psi$. Es ist analog zu den Betrachtungen von u für u_k und $v_k := |\nabla u_k|^2$

$$\begin{aligned} I(u, \psi) \leftarrow I(u_k, \psi) &= \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^l} \left[\text{div} \left(\frac{\nabla u_k}{\sqrt{1+|\nabla u_k|^2}} \right) - \kappa u_k \right] u_{k,x^l} \psi dx \\ &= - \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} \left[\text{div} \left(\frac{\nabla u_k}{\sqrt{1+|\nabla u_k|^2}} \right) - \kappa u_k \right] \frac{\partial}{\partial x^l} [u_{k,x^l} \psi] dx \rightarrow 0, \quad \text{für } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

also $I(u, \psi) = 0$. Damit ist für alle $\psi \in C_0^1(\Omega)$ mit $\psi \geq 0$ wie schon in (15)

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij}(\nabla u) v_{x^i} \psi_{x^j} dx = -2 \sum_{i,j,l=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij}(\nabla u) u_{x^i x^l} u_{x^j x^l} \psi dx - 2\kappa \int_{\Omega} v \psi dx \leq 0.$$

Entsprechend dem schwach-formulierten Maximumprinzip [GT01, Theorem 8.1] folgt so tatsächlich $v \leq \max_{\partial\Omega} v$.

WEG 2: Andererseits lässt sich interessanterweise für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ nach dem Vorbild von [GT01, 11.3] die Divergenzform der Gleichung (13) auf dessen Ableitungen $w_k := u_{x^k}$, $k \in \{1, 2\}$, übertragen: Für

$$a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto \frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}}$$

und $\psi \in C_0^2(\bar{\Omega})$ ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \kappa w_k \psi dx &= - \int_{\Omega} \kappa u \psi_{x^k} dx = - \int_{\Omega} \text{div} (a(\nabla u)) \psi_{x^k} dx = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} a^j(\nabla u) \psi_{x^k x^j} dx \quad (16) \\ &= - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{p^i}^j(\nabla u) u_{x^k x^i} \psi_{x^j} dx = - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{p^i}^j(\nabla u) w_{k,x^i} \psi_{x^j} dx. \end{aligned}$$

Da $|\nabla u|$ über dem Kompaktum $\bar{\Omega}$ sein Maximum annimmt, erfüllen die Koeffizienten

$$\tilde{a}_{ij} := a_{p^i}^j(\nabla u) = a_{ij}(\nabla u) = \frac{\delta_{i,j}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \frac{u_{x^i} u_{x^j}}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

eine strikte Elliptizitätsbedingung (vgl. (8)). Die Koeffizienten der linearen Gleichungen (16) sind außerdem glatt, sodass (16) wegen der Dichtheit von $C_0^2(\Omega)$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (vgl. [Alt06, 1.27]) auch für $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gelten:

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \tilde{a}_{ij} w_{k,x^i} \psi_{x^j} dx + \int_{\Omega} \kappa w_k \psi dx = 0.$$

Es erfüllen somit die w_k entsprechend dem schwach-formulierten Maximumprinzip aus [GT01, Theorem 8.1] die Eigenschaft

$$\min_{\partial\Omega} (\min \{w_k, 0\}) \leq w_k \leq \max_{\partial\Omega} (\max \{w_k, 0\}), \quad \text{in } \Omega, \quad k \in \{1, 2\},$$

sodass

$$|\nabla u| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \leq \sqrt{\max_{\partial\Omega} w_1^2 + \max_{\partial\Omega} w_2^2} \leq \sqrt{2} \max_{\partial\Omega} |\nabla u|.$$

Globale Gradienten-Schranken

Nun verbleibt es, globale A-priori-Schranken an die Gradienten von Lösungen u von (1) \wedge (2) zu formulieren. Unter Zuhilfenahme der inneren Gradienten-Schranken aus Hilfssatz 4 wird es möglich sein, auf $\partial\Omega$ Schranken an die Tangentialableitungen von u zu formulieren. Diese kombiniert mit der Neumann-Randbedingung (2) ergeben eine Abschätzung für $\sup_{\partial\Omega} |\nabla u|$. Das Maximumprinzip für $|\nabla u|$ aus Hilfssatz 5 liefert dann die gewünschte globale C^1 -Abschätzung.

Die folgenden Abschätzungen an die Tangentialableitungen von u folgen dem Vorbild der Arbeit [Spr75] von Joel Spruck.

Satz 2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes und C^4 -berandetes Gebiet, $\kappa > 0$, $\gamma \in (0, \pi/2]$ und $u \in C^3(\bar{\Omega})$ Lösung des dazugehörigen Kapillaritätsproblems (1) \wedge (2). Weiter sei $M \in \mathbb{R}$ eine C^0 -Schranke an u , d.h. $\sup_{\Omega} |u| \leq M$. Außerdem sei $c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(\mathbb{R}) = \partial\Omega$, mathematisch positiver Orientierung – sodass $(-\dot{c}^2, \dot{c}^1)$ der inneren Normale von Ω entspricht – und $\mathcal{K} \in C^2(\mathbb{R})$ die durch*

$$\begin{pmatrix} \ddot{c}^1 \\ \ddot{c}^2 \end{pmatrix} = \mathcal{K} \begin{pmatrix} -\dot{c}^2 \\ \dot{c}^1 \end{pmatrix}$$

gegebene Randkrümmung. Man beachte, dass c periodisch parametrisiert ist, wobei die Periode von c der Länge von $\partial\Omega$ entspricht. Es gebe $\varepsilon > 0$ so, dass

$$2\varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}| \leq 1 \quad \text{und} \quad \forall (r, s) \in [0, \varepsilon] \times \mathbb{R} : \begin{pmatrix} c^1(s) - r\dot{c}^2(s) \\ c^2(s) + r\dot{c}^1(s) \end{pmatrix} \in \bar{\Omega}. \quad (17)$$

Dazu sei nun noch $\varepsilon_I > 0$ so gegeben, dass

$$\inf_{s \in \mathbb{R}} \text{dist} \left(\begin{pmatrix} c^1(s) - \varepsilon \dot{c}^2(s) \\ c^2(s) + \varepsilon \dot{c}^1(s) \end{pmatrix}, \partial\Omega \right) \geq \varepsilon_I$$

und dazu $C_I = C_I(\varepsilon_I, M, \kappa)$ die durch Hilfssatz 4 gegebene innere Gradientenabschätzung

$$\sup_{\Omega_{\varepsilon_I} \leq \text{dist} < \infty} |\nabla u| \leq C_I.$$

Dann lassen sich die Tangentialableitungen von u auf $\partial\Omega$ folgendermaßen abschätzen:

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |\nabla u(c(s)) \cdot \dot{c}(s)| \leq \max \left\{ 10\varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'| M + 16\kappa^{-1} \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'| \right. \\ \left. + 24\kappa^{-1} \varepsilon^2 \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'|^2 + 8\kappa^{-1} \varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}''|, \frac{3}{2} C_I \right\}.$$

Beweis. Der Beweis soll in zwei Teile untergliedert werden. Im ersten Schritt wird die Differentialgleichung über $\Omega_{0 \leq \text{dist} \leq \varepsilon}$ in – den Rand gerade biegende – krummlinige Koordinaten transformiert. Im zweiten Schritt werden die gewünschten Abschätzungen in transformierten Koordinaten vorgenommen. Wegen (17) gilt stets

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}| \leq 1 - r\mathcal{K} \leq 1 + \varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}| \leq \frac{3}{2}. \quad (18)$$

SCHRITT 1: Geradbiegen des Randes. Für die folgende Transformation verweist Spruck auf die Arbeit [Ser69]. Als Transformation sei

$$\phi : [0, \varepsilon] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, s) \mapsto \begin{pmatrix} c^1(s) - r\dot{c}^2(s) \\ c^2(s) + r\dot{c}^1(s) \end{pmatrix}$$

gegeben. Für $(r, s) \in [0, \varepsilon] \times \mathbb{R}$ ist $c(s) \in \partial\Omega$, $|\dot{c}(s)| = 1$, $\phi(r, s) \in \bar{\Omega}$ nach (17) und damit $\phi(r, s) \in \Omega_{0 \leq \text{dist} \leq \varepsilon}$. Da außerdem $c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ ist, ist somit $\phi \in C^3([0, \varepsilon] \times \mathbb{R}; \Omega_{0 \leq \text{dist} \leq \varepsilon})$ und damit $\bar{u} := u \circ \phi \in C^3([0, \varepsilon] \times \mathbb{R})$. Nun sind für beliebiges $(r, s) \in [0, \varepsilon] \times \mathbb{R}$

$$\phi_r(r, s) = \begin{pmatrix} -\dot{c}^2(s) \\ \dot{c}^1(s) \end{pmatrix}, \quad \phi_s(r, s) = \begin{pmatrix} \dot{c}^1(s) - r\ddot{c}^2(s) \\ \dot{c}^2(s) + r\ddot{c}^1(s) \end{pmatrix} = (1 - r\mathcal{K}(s))\dot{c}(s),$$

und damit für jede beliebige Funktion $w \in C^3(\Omega_{0 \leq \text{dist} \leq \varepsilon})$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} (w \circ \phi) \right) (r, s) = -\dot{c}^2(s) w_{x^1}(\phi(r, s)) + \dot{c}^1(s) w_{x^2}(\phi(r, s)), \\ \left(\frac{\partial}{\partial s} (w \circ \phi) \right) (r, s) = (1 - r\mathcal{K}(s)) \dot{c}^1(s) w_{x^1}(\phi(r, s)) + (1 - r\mathcal{K}(s)) \dot{c}^2(s) w_{x^2}(\phi(r, s)).$$

Setzt man abkürzend noch

$$W : [0, \varepsilon] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (r, s) \mapsto \sqrt{1 + \bar{u}_r(r, s)^2 + \frac{\bar{u}_s(r, s)^2}{(1 - r\mathcal{K}(s))^2}} = \sqrt{1 + |\nabla u(\phi(r, s))|^2},$$

so ergibt sich aus (1) in (r, s) die folgende Differentialgleichung an \bar{u}

$$\frac{1}{1 - r\mathcal{K}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - r\mathcal{K}) \frac{\bar{u}_r}{W} \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{1 - r\mathcal{K}} \frac{\bar{u}_s}{W} \right] \right) \\ = \frac{1}{1 - r\mathcal{K}} \left(-\mathcal{K} \frac{-\dot{c}^2 u_{x^1} + \dot{c}^1 u_{x^2}}{W} + (1 - r\mathcal{K}) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{-\dot{c}^2 u_{x^1} + \dot{c}^1 u_{x^2}}{W} \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\dot{c}^1 u_{x^1} + \dot{c}^2 u_{x^2}}{W} \right] \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-r\mathcal{K}} \left(-\mathcal{K} \frac{-\dot{c}^2 u_{x^1} + \dot{c}^1 u_{x^2}}{W} + (1-r\mathcal{K}) \dot{c}^2 \dot{c}^2 \left[\frac{u_{x^1}}{W} \right]_{x^1} - (1-r\mathcal{K}) \dot{c}^1 \dot{c}^2 \left[\frac{u_{x^1}}{W} \right]_{x^2} \right. \\
&\quad - (1-r\mathcal{K}) \dot{c}^1 \dot{c}^2 \left[\frac{u_{x^2}}{W} \right]_{x^1} + (1-r\mathcal{K}) \dot{c}^1 \dot{c}^1 \left[\frac{u_{x^2}}{W} \right]_{x^2} \\
&\quad + \frac{\dot{c}^1 u_{x^1} + \dot{c}^2 u_{x^2}}{W} + (1-r\mathcal{K}) \dot{c}^1 \dot{c}^1 \left[\frac{u_{x^1}}{W} \right]_{x^1} + (1-r\mathcal{K}) \dot{c}^1 \dot{c}^2 \left[\frac{u_{x^1}}{W} \right]_{x^2} \\
&\quad \left. + (1-r\mathcal{K}) \dot{c}^1 \dot{c}^2 \left[\frac{u_{x^2}}{W} \right]_{x^1} + (1-r\mathcal{K}) \dot{c}^2 \dot{c}^2 \left[\frac{u_{x^2}}{W} \right]_{x^2} \right) \\
&= \left[\frac{u_{x^1}}{W} \right]_{x^1} + \left[\frac{u_{x^2}}{W} \right]_{x^2} = \left[\frac{u_{x^1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right]_{x^1} + \left[\frac{u_{x^2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right]_{x^2} = \kappa u = \kappa \bar{u}.
\end{aligned}$$

Die Randbedingung (2) wird für \bar{u} im Fall $r = 0$ zu

$$-\frac{\bar{u}_r}{\sqrt{1+\bar{u}_r^2+\bar{u}_s^2}} = -\frac{-\dot{c}^2 u_{x^1} + \dot{c}^1 u_{x^2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = \frac{\nabla u \cdot \nu}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = \cos(\gamma).$$

Hierbei seien alle Funktionen über $\Omega_{0 \leq \text{dist} \leq \varepsilon}$ im mit ϕ verknüpften Sinne betrachtet. Insgesamt erfüllt \bar{u} also das transformierte Randwertproblem

$$\kappa \bar{u} = \frac{1}{1-r\mathcal{K}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[(1-r\mathcal{K}) \frac{\bar{u}_r}{W} \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left[(1-r\mathcal{K})^{-1} \frac{\bar{u}_s}{W} \right] \right), \quad \text{in } [0, \varepsilon] \times \mathbb{R}, \quad (19)$$

$$\cos(\gamma) = -\frac{\bar{u}_r}{\sqrt{1+\bar{u}_r^2+\bar{u}_s^2}}, \quad \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}. \quad (20)$$

Für den späteren Gebrauch soll (19) hier auch in ausdifferenzierter Form gegeben werden. Es sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{W} \right] &= -\frac{\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s \bar{u}_{ss} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \bar{u}_s^2}{W^3}, \\
\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{W} \right] &= -\frac{\bar{u}_r \bar{u}_{rr} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s \bar{u}_{rs} + (1-r\mathcal{K})^{-3} \mathcal{K} \bar{u}_s^2}{W^3},
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\kappa(1-r\mathcal{K})\bar{u} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-r\mathcal{K}) \frac{\bar{u}_r}{W} \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left[(1-r\mathcal{K})^{-1} \frac{\bar{u}_s}{W} \right] \\
&= -\mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} + (1-r\mathcal{K}) \left(\frac{\bar{u}_{rr}}{W} - \frac{\bar{u}_r^2 \bar{u}_{rr} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_r \bar{u}_s \bar{u}_{rs} + (1-r\mathcal{K})^{-3} \mathcal{K} \bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3} \right) \\
&\quad + (1-r\mathcal{K})^{-2} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} \\
&\quad + (1-r\mathcal{K})^{-1} \left(\frac{\bar{u}_{ss}}{W} - \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s \bar{u}_{rs} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s^2 \bar{u}_{ss} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \bar{u}_s^3}{W^3} \right) \\
&= -\mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-2} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} - (1-r\mathcal{K})^{-2} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3} - (1-r\mathcal{K})^{-4} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s^3}{W^3} \\
&\quad + (1-r\mathcal{K}) \frac{1 + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s^2}{W^3} \bar{u}_{rr} - 2(1-r\mathcal{K})^{-1} \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s}{W^3} \bar{u}_{rs} + (1-r\mathcal{K})^{-1} \frac{1 + \bar{u}_r^2}{W^3} \bar{u}_{ss}.
\end{aligned} \quad (21)$$

SCHRITT 2: Abschätzen von \bar{u}_s . Im ersten Schritt sind ohne große Erläuterung die neuen Koordinaten via ϕ eingeführt worden. Offenbar ist wegen der Periodizität von c die Transformation ϕ

nicht injektiv. Das führt im Folgenden allerdings zu keinem Problem. Interessant für das Verständnis der Transformation ist die Surjektivität, auch wenn sie im späteren Beweis keine direkte Rolle spielt. Zu einem $x \in \Omega_{0 \leq \text{dist} \leq \varepsilon}$ soll also $(r, s) \in [0, \varepsilon] \times \mathbb{R}$ so gefunden werden, dass $\phi(r, s) = x$ ist. Wählt man $r := \text{dist}(x, \partial\Omega) \in [0, \varepsilon]$, so existiert wegen der Kompaktheit von $\partial\Omega$ im Banachraum $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ und der Stetigkeit der Norm $|\cdot|$ ein $p \in \partial\Omega$ mit $|x - p| = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Da $p \in c(\mathbb{R})$ ist, existiert weiter ein $s \in \mathbb{R}$ mit $c(s) = p$. Da $|\dot{c}(s)| = 1$ ist, ist

$$|\phi(r, s) - p| = r = |x - p|.$$

Außerdem gilt wegen der mathematisch positiven Orientiertheit von c und nach Hilfssatz 2, dass

$$\begin{pmatrix} -\dot{c}^2(s) \\ \dot{c}^1(s) \end{pmatrix} \cdot \frac{x - p}{|x - p|} = 1,$$

also

$$x = p + (x - p) = p + |x - p| \begin{pmatrix} -\dot{c}^2(s) \\ \dot{c}^1(s) \end{pmatrix} = c(s) + r \begin{pmatrix} -\dot{c}^2(s) \\ \dot{c}^1(s) \end{pmatrix} = \phi(r, s),$$

sodass ϕ tatsächlich surjektiv ist.

Wie man sieht, entspricht $\bar{u}_s(0, s)$ der Tangentialableitung von u in $c(s)$, d.h.

$$\bar{u}_s(0, s) = \nabla u(c(s)) \cdot \dot{c}(s),$$

sodass für die gewünschte Abschätzung eine entsprechende Abschätzung an $|\bar{u}_s|$ zu finden ausreicht.

Es sei nun $(r_0, s_0) \in [0, \varepsilon] \times \mathbb{R}$ ein Punkt in dem $|\bar{u}_s|$ sein globales Maximum über $[0, \varepsilon] \times \mathbb{R}$ annimmt. Dieser existiert, da \bar{u}_s stetig, $[0, \varepsilon]$ kompakt und \bar{u}_s in s periodisch ist. Offenbar nimmt \bar{u}_s in (r_0, s_0) sein Maximum oder Minimum an. O.B.d.A. werde \bar{u}_s in (r_0, s_0) maximiert; im Falle eines Minimums lässt sich der Beweis analog reproduzieren.

Nun gilt es, in der folgenden Fallunterscheidung die gewünschten Schranken zu finden.

Fall 1: $r_0 = 0$. Offenbar wird in (r_0, s_0) der Wert für \bar{u}_s in s -Richtung maximal, sodass $\bar{u}_{ss}(r_0, s_0) = 0$. Das Ableiten der Randbedingung (20) nach s liefert nun in (r_0, s_0)

$$\bar{u}_{rs} = -\cos(\gamma) \frac{\partial}{\partial s} \left(\sqrt{1 + \bar{u}_r^2 + \bar{u}_s^2} \right) = -\cos(\gamma) \frac{\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + \bar{u}_s \bar{u}_{ss}}{\sqrt{1 + \bar{u}_r^2 + \bar{u}_s^2}} = \underbrace{\cos^2(\gamma)}_{\in [0,1]} \bar{u}_{rs}.$$

Somit gilt auch $\bar{u}_{rs}(r_0, s_0) = 0$. Es ist also (r_0, s_0) ein kritischer Punkt von \bar{u}_s . Leitet man nun die

ausdifferenzierte Gleichung (21) nach s ab, so ergibt sich in (r_0, s_0)

$$\begin{aligned}
\kappa \bar{u}_s &= -\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r}{W} - \mathcal{K} \frac{\bar{u}_{rs}}{W} + \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r (\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + \bar{u}_s \bar{u}_{ss})}{W^3} \\
&\quad - \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3} - \mathcal{K} \frac{\bar{u}_s^2 \bar{u}_{rs}}{W^3} - 2\mathcal{K} \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s \bar{u}_{rs}}{W^3} + 3\mathcal{K} \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2 (\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + \bar{u}_s \bar{u}_{ss})}{W^5} \\
&\quad + 2 \frac{\bar{u}_s \bar{u}_{ss}}{W^3} \bar{u}_{rr} + \frac{1 + \bar{u}_s^2}{W^3} \bar{u}_{rrs} - 3 \frac{(1 + \bar{u}_s^2) (\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + \bar{u}_s \bar{u}_{ss})}{W^5} \bar{u}_{rr} \\
&\quad - 2 \frac{\bar{u}_r \bar{u}_{ss}}{W^3} \bar{u}_{rs} - 2 \frac{\bar{u}_s \bar{u}_{rs}}{W^3} \bar{u}_{rs} + 6 \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s (\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + \bar{u}_s \bar{u}_{ss})}{W^5} \bar{u}_{rs} - 2 \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s}{W^3} \bar{u}_{rss} \\
&\quad + 2 \frac{\bar{u}_r \bar{u}_{rs}}{W^3} \bar{u}_{ss} - 3 \frac{(1 + \bar{u}_r^2) (\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + \bar{u}_s \bar{u}_{ss})}{W^5} \bar{u}_{ss} + \frac{1 + \bar{u}_r^2}{W^3} \bar{u}_{sss} \\
&= -\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r}{W} - \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3} + \frac{1}{W^3} [(1 + \bar{u}_s^2) \bar{u}_{rrs} - 2\bar{u}_r \bar{u}_s \bar{u}_{rss} + (1 + \bar{u}_r^2) \bar{u}_{sss}].
\end{aligned}$$

Da für \bar{u}_s in (r_0, s_0) ein Maximum vorliegt, ist die Hesse-Matrix von \bar{u}_s in (r_0, s_0) negativ semidefinit. Da außerdem für beliebiges $0 \neq (\xi^1, \xi^2)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \bar{u}_r^2 & -\bar{u}_r \bar{u}_s \\ -\bar{u}_r \bar{u}_s & 1 + \bar{u}_s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} &= \xi^1 \xi^1 (1 + \bar{u}_r^2) - 2\xi^1 \xi^2 \bar{u}_r \bar{u}_s + \xi^2 \xi^2 (1 + \bar{u}_s^2) \\
&= \xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2 + (\xi^1 \bar{u}_r - \xi^2 \bar{u}_s)^2 > 0,
\end{aligned}$$

ist die entsprechende Matrix positiv definit. Also ist in (r_0, s_0)

$$(1 + \bar{u}_s^2) \bar{u}_{rrs} - 2\bar{u}_r \bar{u}_s \bar{u}_{rss} + (1 + \bar{u}_r^2) \bar{u}_{sss} = \text{Spur} \left[\begin{pmatrix} \bar{u}_{sss} & \bar{u}_{srs} \\ \bar{u}_{srs} & \bar{u}_{srr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \bar{u}_r^2 & -\bar{u}_r \bar{u}_s \\ -\bar{u}_r \bar{u}_s & 1 + \bar{u}_s^2 \end{pmatrix} \right] \leq 0.$$

Es ist außerdem $\bar{u}_s(r_0, s_0) \geq 0$, da ansonsten $\bar{u}_s < 0$ auf ganz $\{0\} \times \mathbb{R}$ wäre, was der Periodizität in s widerspricht. Somit ergibt sich insgesamt im Fall 1

$$\begin{aligned}
|\bar{u}_s(r_0, s_0)| &= \bar{u}_s(r_0, s_0) \leq -\kappa^{-1} \mathcal{K}'(s_0) \left(\frac{\bar{u}_r(r_0, s_0)}{W(r_0, s_0)} + \frac{\bar{u}_r(r_0, s_0) \bar{u}_s(r_0, s_0)^2}{W(r_0, s_0)^3} \right) \\
&\leq \kappa^{-1} |\mathcal{K}'(s_0)| \cos(\gamma) \left(1 + \frac{\bar{u}_s(r_0, s_0)^2}{W(r_0, s_0)^2} \right) \leq 2\kappa^{-1} \cos(\gamma) |\mathcal{K}'(s_0)| \leq 2\kappa^{-1} \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'|.
\end{aligned}$$

Im Minimum-Fall ändert sich die Abschätzung nicht. In (r_0, s_0) wäre

$$(1 + \bar{u}_s^2) \bar{u}_{rrs} - 2\bar{u}_r \bar{u}_s \bar{u}_{rss} + (1 + \bar{u}_r^2) \bar{u}_{sss} \geq 0$$

und damit

$$|\bar{u}_s(r_0, s_0)| = -\bar{u}_s(r_0, s_0) \leq \kappa^{-1} \mathcal{K}'(s_0) \left(\frac{\bar{u}_r(r_0, s_0)}{W(r_0, s_0)} + \frac{\bar{u}_r(r_0, s_0) \bar{u}_s(r_0, s_0)^2}{W(r_0, s_0)^3} \right) \leq 2\kappa^{-1} \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'|.$$

Fall 2: $0 < r_0 < \varepsilon$. In diesem Fall ist (r_0, s_0) automatisch ein kritischer Punkt von \bar{u}_s . Wie schon im Fall 1, leite man die ausdifferenzierte Gleichung (21) nach s ab, wobei diesmal die Faktoren

$(1 - r\mathcal{K})$ beachtet werden müssen. Es ergibt sich in (r_0, s_0)

$$\begin{aligned}
& \kappa(1 - r\mathcal{K})\bar{u}_s - \kappa r\mathcal{K}'\bar{u} \\
&= -\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r}{W} - \mathcal{K}\frac{\bar{u}_{rs}}{W} + \mathcal{K}\frac{\bar{u}_r(\bar{u}_r\bar{u}_{rs} + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s\bar{u}_{ss} + (1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}'\bar{u}_s^2)}{W^3} \\
&+ 2(1 - r\mathcal{K})^{-3}r^2\mathcal{K}'^2\frac{\bar{u}_s}{W} + (1 - r\mathcal{K})^{-2}r\mathcal{K}''\frac{\bar{u}_s}{W} + (1 - r\mathcal{K})^{-2}r\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_{ss}}{W} \\
&- (1 - r\mathcal{K})^{-2}r\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_s(\bar{u}_r\bar{u}_{rs} + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s\bar{u}_{ss} + (1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}'\bar{u}_s^2)}{W^3} \\
&- 2(1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s^2}{W^3} - (1 - r\mathcal{K})^{-2}\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s^2}{W^3} - (1 - r\mathcal{K})^{-2}\mathcal{K}\frac{\bar{u}_s^2\bar{u}_{rs}}{W^3} \\
&- 2(1 - r\mathcal{K})^{-2}\mathcal{K}\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s\bar{u}_{rs}}{W^3} \\
&+ 3(1 - r\mathcal{K})^{-2}\mathcal{K}\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s^2(\bar{u}_r\bar{u}_{rs} + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s\bar{u}_{ss} + (1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}'\bar{u}_s^2)}{W^5} \\
&- 4(1 - r\mathcal{K})^{-5}r^2\mathcal{K}'^2\frac{\bar{u}_s^3}{W^3} - (1 - r\mathcal{K})^{-4}r\mathcal{K}''\frac{\bar{u}_s^3}{W^3} - 3(1 - r\mathcal{K})^{-4}r\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_s^2\bar{u}_{ss}}{W^3} \\
&+ 3(1 - r\mathcal{K})^{-4}r\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_s^3(\bar{u}_r\bar{u}_{rs} + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s\bar{u}_{ss} + (1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}'\bar{u}_s^2)}{W^5} \\
&- r\mathcal{K}'\frac{1 + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}{W^3}\bar{u}_{rr} + 2(1 - r\mathcal{K})\frac{(1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}'\bar{u}_s^2}{W^3}\bar{u}_{rr} \\
&+ 2(1 - r\mathcal{K})\frac{(1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s\bar{u}_{ss}}{W^3}\bar{u}_{rr} + (1 - r\mathcal{K})\frac{1 + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}{W^3}\bar{u}_{rrs} \\
&- 3(1 - r\mathcal{K})\frac{(1 + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2)(\bar{u}_r\bar{u}_{rs} + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s\bar{u}_{ss} + (1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}'\bar{u}_s^2)}{W^5}\bar{u}_{rr} \\
&- 2(1 - r\mathcal{K})^{-2}r\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s}{W^3}\bar{u}_{rs} - 2(1 - r\mathcal{K})^{-1}\frac{\bar{u}_r\bar{u}_{ss}}{W^3}\bar{u}_{rs} - 2(1 - r\mathcal{K})^{-1}\frac{\bar{u}_s\bar{u}_{rs}}{W^3}\bar{u}_{rs} \\
&- 2(1 - r\mathcal{K})^{-1}\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s}{W^3}\bar{u}_{rss} \\
&+ 6(1 - r\mathcal{K})^{-1}\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s(\bar{u}_r\bar{u}_{rs} + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s\bar{u}_{ss} + (1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}'\bar{u}_s^2)}{W^5}\bar{u}_{rs} \\
&+ (1 - r\mathcal{K})^{-2}r\mathcal{K}'\frac{1 + \bar{u}_r^2}{W^3}\bar{u}_{ss} + 2(1 - r\mathcal{K})^{-1}\frac{\bar{u}_r\bar{u}_{rs}}{W^3}\bar{u}_{ss} + (1 - r\mathcal{K})^{-1}\frac{1 + \bar{u}_r^2}{W^3}\bar{u}_{sss} \\
&- 3(1 - r\mathcal{K})^{-1}\frac{(1 + \bar{u}_r^2)(\bar{u}_r\bar{u}_{rs} + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s\bar{u}_{ss} + (1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}'\bar{u}_s^2)}{W^5}\bar{u}_{ss} \\
&= -\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r}{W} + (1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s^2}{W^3} \\
&- (1 - r\mathcal{K})^{-2}\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s^2}{W^3}\left(1 + 2(1 - r\mathcal{K})^{-1}r\mathcal{K} - 3(1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}\frac{\bar{u}_s^2}{W^2}\right) \\
&+ (1 - r\mathcal{K})^{-2}r\frac{\bar{u}_s}{W}\left(\mathcal{K}'' + 2(1 - r\mathcal{K})^{-1}r\mathcal{K}'^2 - (1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}'^2\frac{\bar{u}_s^2}{W^2}\right) \\
&- (1 - r\mathcal{K})^{-4}r\frac{\bar{u}_s^3}{W^3}\left(\mathcal{K}'' + 4(1 - r\mathcal{K})^{-1}r\mathcal{K}'^2 - 3(1 - r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}'^2\frac{\bar{u}_s^2}{W^2}\right) \\
&- r\mathcal{K}'\left(\frac{1 - (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}{W^3} + 3\frac{(1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2 + (1 - r\mathcal{K})^{-4}\bar{u}_s^4}{W^5}\right)\bar{u}_{rr} \\
&+ \frac{1}{W^3}\left((1 - r\mathcal{K})(1 + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2)\bar{u}_{rrs} - 2(1 - r\mathcal{K})^{-1}\bar{u}_r\bar{u}_s\bar{u}_{rss} + (1 - r\mathcal{K})^{-1}(1 + \bar{u}_r^2)\bar{u}_{sss}\right).
\end{aligned}$$

Nun ist es nötig, eine Abschätzung analog zum Fall 1 vorzunehmen. Dies soll hier der Übersicht-

lichkeit wegen zeilenweise geschehen. Zusammen mit (18), $\bar{u}_s \geq 0$ und

$$\frac{\bar{u}_r^2}{W^2} \leq 1, \quad \frac{(1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}{W^2} \leq 1,$$

lassen sich die ersten vier Zeilen der RHS wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &:= -\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3} \leq |\mathcal{K}'| \frac{|\bar{u}_r|}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3} \\ &\leq |\mathcal{K}'| + (1-r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3}, \\ \mathcal{T}_2 &:= -(1-r\mathcal{K})^{-2} \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3} \left(1 + 2(1-r\mathcal{K})^{-1} r\mathcal{K} - 3(1-r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K} \frac{\bar{u}_s^2}{W^2} \right) \\ &\leq |\mathcal{K}'| \left(1 + (1-r\mathcal{K})^{-1} \varepsilon |\mathcal{K}| \right) - (1-r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3} + 3(1-r\mathcal{K})^{-5} r\mathcal{K}\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^4}{W^5} \\ &\leq 2|\mathcal{K}'| - (1-r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3} + 3(1-r\mathcal{K})^{-5} r\mathcal{K}\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^4}{W^5}, \\ \mathcal{T}_3 &:= (1-r\mathcal{K})^{-2} r \frac{\bar{u}_s}{W} \left(\mathcal{K}'' + 2(1-r\mathcal{K})^{-1} r\mathcal{K}'^2 - (1-r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}'^2 \frac{\bar{u}_s^2}{W^2} \right) \\ &= (1-r\mathcal{K})^{-2} r \frac{\bar{u}_s}{W} \left(\mathcal{K}'' + 2(1-r\mathcal{K})^{-1} r\mathcal{K}'^2 \right) - (1-r\mathcal{K})^{-5} r^2 \mathcal{K}'^2 \frac{\bar{u}_s^3}{W^3} \\ &\leq (1-r\mathcal{K})^{-1} \varepsilon \left(|\mathcal{K}''| + 2(1-r\mathcal{K})^{-1} \varepsilon \mathcal{K}'^2 \right) \leq 2\varepsilon |\mathcal{K}''| + 8\varepsilon^2 \mathcal{K}'^2, \\ \mathcal{T}_4 &:= -(1-r\mathcal{K})^{-4} r \frac{\bar{u}_s^3}{W^3} \left(\mathcal{K}'' + 4(1-r\mathcal{K})^{-1} r\mathcal{K}'^2 - 3(1-r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}'^2 \frac{\bar{u}_s^2}{W^2} \right) \\ &= -(1-r\mathcal{K})^{-4} r \mathcal{K}'' \frac{\bar{u}_s^3}{W^3} - 4(1-r\mathcal{K})^{-5} r^2 \mathcal{K}'^2 \frac{\bar{u}_s^3}{W^3} + 3(1-r\mathcal{K})^{-7} r^2 \mathcal{K}'^2 \frac{\bar{u}_s^5}{W^5} \\ &\leq 2\varepsilon |\mathcal{K}''| - 3(1-r\mathcal{K})^{-5} r^2 \mathcal{K}'^2 \frac{\bar{u}_s^3}{W^3} + 3(1-r\mathcal{K})^{-7} r^2 \mathcal{K}'^2 \frac{\bar{u}_s^5}{W^5}. \end{aligned}$$

Um Zeile 5 abzuschätzen, formt man diese zunächst um:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_5 &:= -r\mathcal{K}' \left(\frac{1 - (1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}{W^3} + 3 \frac{(1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2 + (1-r\mathcal{K})^{-4}\bar{u}_s^4}{W^5} \right) \bar{u}_{rr} \\ &= -r\mathcal{K}' \left(\frac{1 - (1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}{1 + (1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2} + 3(1-r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s^2}{W^2} \right) \frac{1 + (1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}{W^3} \bar{u}_{rr}. \end{aligned}$$

Nutzt man erneut (21), so sieht man direkt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}_5 &:= \frac{1 + (1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}{W^3} \bar{u}_{rr} \\ &= \kappa \bar{u} + (1-r\mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} - (1-r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-3} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3} + (1-r\mathcal{K})^{-5} r\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s^3}{W^3}. \end{aligned}$$

Nun kann \mathcal{T}_5 analog zu den ersten vier Zeilen abgeschätzt werden:

$$\mathcal{T}_{5,1} := -r\mathcal{K}' \frac{1 - (1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}{1 + (1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2} \tilde{\mathcal{T}}_5$$

$$\begin{aligned}
&\leq \kappa\varepsilon|\mathcal{K}'||\bar{u}| + (1-r\mathcal{K})^{-1}\varepsilon|\mathcal{K}||\mathcal{K}'|\frac{|\bar{u}_r|}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-3}\varepsilon|\mathcal{K}||\mathcal{K}'|\frac{|\bar{u}_r|\bar{u}_s^2}{W^3} \\
&\quad + (1-r\mathcal{K})^{-3}r^2\mathcal{K}'^2\frac{u_s}{W}\left(\frac{1-(1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}{1+(1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}\right)\left(1-(1-r\mathcal{K})^{-2}\frac{\bar{u}_s^2}{W^2}\right) \\
&\leq \kappa\varepsilon|\mathcal{K}'||\bar{u}| + |\mathcal{K}'| + |\mathcal{K}'| + (1-r\mathcal{K})^{-3}r^2\mathcal{K}'^2\frac{u_s}{W}\left(\frac{1-(1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}{1+(1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2}\right)\left(\frac{1+u_r^2}{W^2}\right) \\
&\leq \kappa\varepsilon|\mathcal{K}'||\bar{u}| + 2|\mathcal{K}'| + 4\varepsilon^2\mathcal{K}'^2, \\
\mathcal{T}_{5,2} &:= -3(1-r\mathcal{K})^{-2}r\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_s^2}{W^2}\tilde{\mathcal{T}}_5 \\
&= -3\kappa(1-r\mathcal{K})^{-2}r\mathcal{K}'\frac{\bar{u}\bar{u}_s^2}{W^2} - 3(1-r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s^2}{W^3} + 3(1-r\mathcal{K})^{-5}r^2\mathcal{K}'^2\frac{\bar{u}_s^3}{W^3} \\
&\quad - 3(1-r\mathcal{K})^{-5}r\mathcal{K}\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s^4}{W^5} - 3(1-r\mathcal{K})^{-7}r^2\mathcal{K}'^2\frac{\bar{u}_s^5}{W^5} \\
&\leq 3\kappa\varepsilon|\mathcal{K}'||\bar{u}| + 3|\mathcal{K}'| \\
&\quad + 3(1-r\mathcal{K})^{-5}r^2\mathcal{K}'^2\frac{\bar{u}_s^3}{W^3} - 3(1-r\mathcal{K})^{-5}r\mathcal{K}\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s^4}{W^5} - 3(1-r\mathcal{K})^{-7}r^2\mathcal{K}'^2\frac{\bar{u}_s^5}{W^5}.
\end{aligned}$$

Die sechste Zeile wird, wie im Fall 1, als Spur des Produkts einer positiv definiten und einer negativ semidefiniten Matrix, als ≤ 0 erkannt. Es sind dazu für beliebiges $0 \neq (\xi^1, \xi^2)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-r\mathcal{K})^{-1}(1+\bar{u}_r^2) & -(1-r\mathcal{K})^{-1}\bar{u}_r\bar{u}_s \\ -(1-r\mathcal{K})^{-1}\bar{u}_r\bar{u}_s & (1-r\mathcal{K})(1+(1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \\
&= (1-r\mathcal{K})^{-1} \left(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2(1-r\mathcal{K})^2 + (\xi^1\bar{u}_r - \xi^2\bar{u}_s)^2 \right) > 0,
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_6 &:= \frac{1}{W^3} \left((1-r\mathcal{K})(1+(1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2)\bar{u}_{rrs} - 2(1-r\mathcal{K})^{-1}\bar{u}_r\bar{u}_s\bar{u}_{rss} + (1-r\mathcal{K})^{-1}(1+\bar{u}_r^2)\bar{u}_{sss} \right) \\
&= \frac{1}{W^3} \text{Spur} \left[\begin{pmatrix} \bar{u}_{sss} & \bar{u}_{srs} \\ \bar{u}_{srs} & \bar{u}_{srr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-r\mathcal{K})^{-1}(1+\bar{u}_r^2) & -(1-r\mathcal{K})^{-1}\bar{u}_r\bar{u}_s \\ -(1-r\mathcal{K})^{-1}\bar{u}_r\bar{u}_s & (1-r\mathcal{K})(1+(1-r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2) \end{pmatrix} \right] \leq 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man nun im Fall 2 für $u_s > 0$

$$\begin{aligned}
|\bar{u}_s(r_0, s_0)| &= \bar{u}_s(r_0, s_0) \leq 2\kappa^{-1}\kappa(1-r_0\mathcal{K}(s_0))\bar{u}_s(r_0, s_0) \\
&= 2\kappa^{-1}(\kappa r_0\mathcal{K}'(r_0)\bar{u}(r_0, s_0) + \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_4 + \mathcal{T}_{5,1} + \mathcal{T}_{5,2} + \mathcal{T}_6) \\
&\leq 2\kappa^{-1} \left(\kappa\varepsilon|\mathcal{K}'||\bar{u}| + |\mathcal{K}'| + (1-r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s^2}{W^3} \right. \\
&\quad + 2|\mathcal{K}'| - (1-r\mathcal{K})^{-3}r\mathcal{K}\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s^2}{W^3} + 3(1-r\mathcal{K})^{-5}r\mathcal{K}\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s^4}{W^5} \\
&\quad + 2\varepsilon|\mathcal{K}''| + 8\varepsilon^2\mathcal{K}'^2 \\
&\quad + 2\varepsilon|\mathcal{K}''| - 3(1-r\mathcal{K})^{-5}r^2\mathcal{K}'^2\frac{\bar{u}_s^3}{W^3} + 3(1-r\mathcal{K})^{-7}r^2\mathcal{K}'^2\frac{\bar{u}_s^5}{W^5} \\
&\quad + \kappa\varepsilon|\mathcal{K}'||\bar{u}| + 2|\mathcal{K}'| + 4\varepsilon^2\mathcal{K}'^2 \\
&\quad + 3\kappa\varepsilon|\mathcal{K}'||\bar{u}| + 3|\mathcal{K}'| + 3(1-r\mathcal{K})^{-5}r^2\mathcal{K}'^2\frac{\bar{u}_s^3}{W^3} \\
&\quad \left. - 3(1-r\mathcal{K})^{-5}r\mathcal{K}\mathcal{K}'\frac{\bar{u}_r\bar{u}_s^4}{W^5} - 3(1-r\mathcal{K})^{-7}r^2\mathcal{K}'^2\frac{\bar{u}_s^5}{W^5} + 0 \right) \Big|_{(r,s)=(r_0,s_0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(10\varepsilon|\mathcal{K}'|\bar{u} + 16\kappa^{-1}|\mathcal{K}'| + 24\kappa^{-1}\varepsilon^2\mathcal{K}'^2 + 8\kappa^{-1}\varepsilon|\mathcal{K}''| \right) \Big|_{(r,s)=(r_0,s_0)} \\
&\leq 10\varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'| M + 16\kappa^{-1} \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'| + 24\kappa^{-1}\varepsilon^2 \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'|^2 + 8\kappa^{-1}\varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}''|.
\end{aligned}$$

Im Minimum-Fall ergäbe sich die gleiche Abschätzung. Es wären

$$\begin{aligned}
-\mathcal{T}_1 &\leq |\mathcal{K}'| - (1 - r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3}, \\
-\mathcal{T}_2 &\leq 2|\mathcal{K}'| + (1 - r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3} - 3(1 - r\mathcal{K})^{-5} r\mathcal{K}\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^4}{W^5}, \\
-\mathcal{T}_3 &\leq 2\varepsilon|\mathcal{K}''| + 8\varepsilon^2\mathcal{K}'^2, \\
-\mathcal{T}_4 &\leq 2\varepsilon|\mathcal{K}''| + 3(1 - r\mathcal{K})^{-5} r^2\mathcal{K}'^2 \frac{\bar{u}_s^3}{W^3} - 3(1 - r\mathcal{K})^{-7} r^2\mathcal{K}'^2 \frac{\bar{u}_s^5}{W^5}, \\
-\mathcal{T}_{5,1} &\leq \kappa\varepsilon|\mathcal{K}'|\bar{u} + 2|\mathcal{K}'| + 4\varepsilon^2\mathcal{K}'^2, \\
-\mathcal{T}_{5,2} &\leq 3\kappa\varepsilon|\mathcal{K}'|\bar{u} + 3|\mathcal{K}'| \\
&\quad - 3(1 - r\mathcal{K})^{-5} r^2\mathcal{K}'^2 \frac{\bar{u}_s^3}{W^3} + 3(1 - r\mathcal{K})^{-5} r\mathcal{K}\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^4}{W^5} + 3(1 - r\mathcal{K})^{-7} r^2\mathcal{K}'^2 \frac{\bar{u}_s^5}{W^5}, \\
-\mathcal{T}_6 &\leq 0,
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
|\bar{u}_s(r_0, s_0)| &= -\bar{u}_s(r_0, s_0) \leq -2\kappa^{-1}\kappa(1 - r_0\mathcal{K}(s_0))\bar{u}_s(r_0, s_0) \\
&= 2\kappa^{-1}(-\kappa r_0\mathcal{K}'(r_0)\bar{u}(r_0, s_0) - \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_3 - \mathcal{T}_4 - \mathcal{T}_{5,1} - \mathcal{T}_{5,2} - \mathcal{T}_6) \\
&\leq 10\varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'| M + 16\kappa^{-1} \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'| + 24\kappa^{-1}\varepsilon^2 \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'|^2 + 8\kappa^{-1}\varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}''|.
\end{aligned}$$

Fall 3: $r_0 = \varepsilon$. In diesem Fall kommt die innere Gradienten-Schranke aus Hilfssatz 4 zum Einsatz. Spruck verweist dafür neben [LU70], der oben verwendeten Quelle aus dem Jahr 1970, auf [Sim71], der Doktorarbeit von Leon Melvin Simon aus dem Jahr 1971.

Da nach Voraussetzung $\phi(r_0, s_0) \in \Omega_{\varepsilon_I \leq \text{dist} < \infty}$ ist, gilt im Fall 3

$$|\bar{u}_s(r_0, s_0)| = (1 - r_0\mathcal{K}(s_0))|\dot{c}(s_0) \cdot \nabla \bar{u}(\phi(r_0, s_0))| \leq \frac{3}{2}|\nabla \bar{u}(\phi(r_0, s_0))| \leq \frac{3}{2}C_I(\varepsilon_I, M, \kappa).$$

Dies ist unabhängig vom Vorzeichen von \bar{u}_s .

Nun liegen in allen drei Fällen Abschätzungen vor. Da die Abschätzung aus Fall 2 schwächer ist als die Abschätzung aus Fall 1, und außerdem

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |\nabla \bar{u}(c(s)) \cdot \dot{c}(s)| = \sup_{s \in \mathbb{R}} |\bar{u}_s(0, s)| \leq \sup_{(r,s) \in [0, \varepsilon] \times \mathbb{R}} |\bar{u}_s(r, s)| = |\bar{u}_s(r_0, s_0)|,$$

folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 5. Im Beweis von Satz 2 steht die einschränkende Formulierung über $(0, \pi/2]$ ein wenig im Weg. Eigentlich kann der Fall $\bar{u}_s < 0$ auch durch Betrachtung von $-u$ und $\pi - \gamma$ behandelt werden (vgl. Bemerkung 1). Das erklärt viel natürlicher, warum sich im Minimum-Fall die gleichen

Abschätzungen wie im Maximum-Fall ergeben.

Die Abschätzung des Tangentialanteils des Gradienten auf $\partial\Omega$ zusammen mit der Randbedingung (2) lässt nun die Abschätzung des Gradienten auf $\partial\Omega$ zu. Das Maximumprinzip aus Hilfssatz 5 liefert dann die Abschätzung über ganz $\bar{\Omega}$.

Korollar 4. *Unter den Voraussetzungen aus Satz 2 gilt*

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u| \leq \frac{1}{\sin(\gamma)} \sqrt{\cos^2(\gamma) + C_\tau^2},$$

wobei C_τ die dort beschriebene Tangentialabschätzung an ∇u ist, d.h.

$$C_\tau := \max \left\{ 10\varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'| M + 16\kappa^{-1} \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'| + 24\kappa^{-1}\varepsilon^2 \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'|^2 + 8\kappa^{-1}\varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}''|, \frac{3}{2}C_I \right\}.$$

Beweis. Gegeben sei $x \in \partial\Omega$. Wegen $c(\mathbb{R}) = \partial\Omega$ existiert $s \in \mathbb{R}$ mit $c(s) = x$. Entsprechend der mathematisch positiven Orientierung von c und wegen $|\dot{c}(s)| = 1$, ist $\nu(x) = (\dot{c}^2(s), -\dot{c}^1(s))$. Also bildet $\{\nu(x), \dot{c}(s)\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 , sodass nach Satz des Pythagoras

$$|\nabla u(x)|^2 = |\nabla u(c(s)) \cdot \dot{c}(s)|^2 + |\nabla u(x) \cdot \nu(x)|^2$$

und damit nach (2) und Abschätzung aus Satz 2

$$\begin{aligned} |\nabla u(x)| &\leq \sqrt{C_\tau^2 + |\nabla u(x) \cdot \nu(x)|^2} \\ &= \frac{1}{\sin(\gamma)} \sqrt{C_\tau^2 + |\nabla u(x) \cdot \nu(x)|^2 - \cos^2(\gamma) \left(C_\tau^2 + |\nabla u(x) \cdot \nu(x)|^2 \right)} \\ &\leq \frac{1}{\sin(\gamma)} \sqrt{C_\tau^2 + \cos(\gamma)^2 (1 + |\nabla u(x)|^2) - \cos^2(\gamma) |\nabla u(x)|^2} = \frac{1}{\sin(\gamma)} \sqrt{C_\tau^2 + \cos(\gamma)^2} \end{aligned}$$

gilt. Das liefert die Randabschätzung für $|\nabla u|$ die nach Hilfssatz 5 auch global gilt:

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u| \leq \frac{1}{\sin(\gamma)} \sqrt{C_\tau^2 + \cos(\gamma)^2}.$$

□

Bemerkung 6. Die Formulierung des Satzes 2 und des Korollars 4 schließt Gebiete mit Löchern aus. Dies ist eine rein technische Einschränkung und kann durch Formulierung in endlich vielen Randabschnitten behoben werden; vgl. dazu Hilfssatz 3, Teil (d). Jede der Randkurven ist getrennt, genau wie im oben aufgeführten Beweis, zu betrachten. Die Abschätzung wird dann durch das Maximum der Abschätzungen über allen Randabschnitten gegeben. Prototypisch für die Behandlung mehrerer Randkomponenten werden einmalig im Korollar 5 beliebige C^4 -berandete und beschränkte Grundgebiete zugelassen.

Die aufwändige Formulierung der vorausgegangenen Aussagen ist dem späteren Vorhaben geschuldet, gleichmäßige Gradienten-Abschätzungen für Lösungen über einer ganzen Familie von Gebieten zu erzeugen. Durch die gleichmäßige Kontrolle aller in den Voraussetzungen vorkommenden Größen

wird dies möglich werden. Für Resultate über einem festen Gebiet reicht die folgende Formulierung aus.

Korollar 5. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und C^4 -berandetes Gebiet, $\kappa > 0$ und $\gamma \in (0, \pi/2]$. Dann existiert ein $C = C(\Omega, \kappa, \gamma)$ so, dass für jede Lösung $u \in C^3(\bar{\Omega})$ des dazugehörigen Kapillaritätsproblems (1) \wedge (2)*

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u| \leq C$$

gilt.

Beweis. Dank Teil (a) des Hilfssatzes 3 existiert ein $R > 0$ so, dass Ω eine innere Kugelbedingung mit Radius R erfüllt. Nach Teil (c) aus Hilfssatz 3 kann o.B.d.A. $2R \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}| \leq 1$ angenommen werden. Es ist nach Hilfssatz 3

$$M := \frac{2}{\kappa R} + R \geq \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Nach Teil (d) aus Hilfssatz 3 existieren für $N \in \mathbb{N}$ nach Bogenlänge parametrisierte Randabschnittskurven $c_1, \dots, c_N \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ mit $\partial\Omega = c_1(\mathbb{R}) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} c_N(\mathbb{R})$. Kehrt man gegebenenfalls durch die Umparametrisierung $t \mapsto -t$ deren Orientierung um, so kann man diese zusätzlich als so orientiert annehmen, dass jeweils $(-\dot{c}^2, \dot{c}^1)^T$ der inneren Normale an Ω entspricht. Zunächst soll

$$\Omega_{\text{dist}=R} = \left\{ c_k(s) + R \begin{pmatrix} -\dot{c}_k^2(s) \\ \dot{c}_k^1(s) \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}, k \in \{1, \dots, N\} \right\} =: S_R$$

gezeigt werden: Ist $x \in \Omega_{\text{dist}=R}$, so existiert wegen der Kompaktheit von $\partial\Omega$ und der Stetigkeit der euklidischen Norm ein $p \in \partial\Omega$ mit $|x - p| = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Dazu existiert $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \{1, \dots, N\}$ mit $c_k(s) = p$. Nach Hilfssatz 2 und wegen der Orientierung von c_k , liegt x in der Menge

$$\left\{ c_k(s) + r \begin{pmatrix} -\dot{c}_k^2(s) \\ \dot{c}_k^1(s) \end{pmatrix} : r > 0 \right\}.$$

Da c_k außerdem nach Bogenlänge parametrisiert ist, muss

$$x = c_k(s) + R \begin{pmatrix} -\dot{c}_k^2(s) \\ \dot{c}_k^1(s) \end{pmatrix} \in S_R$$

sein. Somit folgt $\Omega_{\text{dist}=R} \subseteq S_R$. Ist nun $x \in S_R$ gegeben, so existiert ein $s \in \mathbb{R}$ und ein $k \in \{1, \dots, N\}$ mit

$$x = c_k(s) + R \begin{pmatrix} -\dot{c}_k^2(s) \\ \dot{c}_k^1(s) \end{pmatrix}.$$

Da Ω eine innere Kugelbedingung mit Radius R erfüllt, existiert $x_M \in \Omega$ mit

$$B_R(x_M) \subset \Omega, \quad \overline{B_R(x_M)} \cap \partial\Omega = \{c_k(s)\}.$$

Damit ist $|c_k(s) - x_M| = R = \text{dist}(x_M, \partial\Omega)$ erfüllt, sodass nach Hilfssatz 2

$$x_M \in \left\{ c_k(s) + r \begin{pmatrix} -\dot{c}_k^2(s) \\ \dot{c}_k^1(s) \end{pmatrix} : r > 0 \right\}$$

ist. Da c_k nach Bogenlänge parametrisiert ist, heißt das insbesondere $x_M = x$. Also ist $x \in \Omega_{\text{dist}=R}$ und damit $S_R \subseteq \Omega_{\text{dist}=R}$, insgesamt $S_R = \Omega_{\text{dist}=R}$.

Setzt man nun noch $\varepsilon = \varepsilon_I = R$ und beachtet Bemerkung 6, dann sind alle Voraussetzungen aus Satz 2 bzw. Korollar 4 erfüllt und die gewünschte Abschätzung gefunden, welche nur noch von R , \mathcal{K} , \mathcal{K}' , \mathcal{K}'' , κ und γ abhängt, genauer

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u| \leq \frac{1}{\sin(\gamma)} \sqrt{\cos^2(\gamma) + C_\tau^2},$$

wobei für \mathcal{K}_k Randkrümmung von c_k , $k = 1, \dots, N$,

$$C_\tau := \max \left\{ 10R \sup_{\mathbb{R}, k \in \{1, \dots, N\}} |\mathcal{K}'_k| \left(\frac{2}{\kappa R} + R \right) + 16\kappa^{-1} \sup_{\mathbb{R}, k \in \{1, \dots, N\}} |\mathcal{K}'_k| \right. \\ \left. + 24\kappa^{-1}R^2 \sup_{\mathbb{R}, k \in \{1, \dots, N\}} |\mathcal{K}'_k|^2 + 8\kappa^{-1}R \sup_{\mathbb{R}, k \in \{1, \dots, N\}} |\mathcal{K}''_k|, \frac{3}{2}C_I \left(R, \frac{2}{\kappa R} + R, \kappa \right) \right\}.$$

□

$C^{1,\alpha}$ -SCHRANKEN

Auch wenn sich das Problem (1)∧(2) wegen seiner Randbedingung einem Schauder-Ansatz entzieht, werden im späteren Verlauf gleichmäßige $C^{1,\alpha}$ -Schranken von essentieller Bedeutung sein. Entscheidend ist es auch in diesem Fall, die gleichmäßigen A-priori-Hölderschranken der Ableitungen in Randnähe zu zeigen. Dafür soll sich hier an [LU68a, S. 467–468] orientiert werden. Für die inneren Hölderschranken dient dann [GT01, Theorem 8.24].

Satz 3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes und C^4 -berandetes Gebiet, welches eine innere und äußere Kugelbedingung mit Radius $R > 0$ erfüllt, $\kappa > 0$, $\gamma \in (0, \pi/2]$ und $u \in C^3(\bar{\Omega})$ Lösung des dazugehörigen Kapillaritätsproblems (1)∧(2). Weiter sei $c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(\mathbb{R}) = \partial\Omega$, mathematisch positiver Orientierung – sodass $(-\dot{c}^2, \dot{c}^1)$ der inneren Normale von Ω entspricht – und $\mathcal{K} \in C^2(\mathbb{R})$ die durch*

$$\begin{pmatrix} \ddot{c}^1 \\ \ddot{c}^2 \end{pmatrix} = \mathcal{K} \begin{pmatrix} -\dot{c}^2 \\ \dot{c}^1 \end{pmatrix}$$

gegebene Randkrümmung.

Ferner seien $S_{\mathcal{K}} \geq 0$, $S_{\mathcal{K}'} \geq 0$, $C_{C^0} \geq 0$ und $C_{C^1} \geq 0$ als Schranken an \mathcal{K} und u gegeben:

$$\sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}| \leq S_{\mathcal{K}}, \quad \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'| \leq S_{\mathcal{K}'}, \quad \sup_{\bar{\Omega}} |u| \leq C_{C^0}, \quad \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u| \leq C_{C^1}.$$

Dann existieren von κ , $S_{\mathcal{K}}$, $S_{\mathcal{K}'}$, C_{C^0} , C_{C^1} und R abhängige Konstanten α und $C_{C^{1,\alpha}}$ so, dass $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ und

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C_{C^{1,\alpha}}$$

ist.

Beweis. Der Beweis soll in zwei Teile untergliedert werden. Im ersten Schritt wird wie in [LU68a, S. 467–468] eine $C^{1,\alpha}$ -Schranke in Randnähe, im zweiten Schritt eine $C^{1,\alpha}$ -Schranke im Inneren von Ω gefunden, welche dann zu einer globalen $C^{1,\alpha}$ -Schranke verknüpft werden.

SCHRITT 1: A-priori-Hölderschranken der Ableitungen in Randnähe. Wie in den Beweisen von Korollar 5 und Satz 2 erläutert, lässt sich die Gleichung in Randnähe in den Rand gerade biegende Koordinaten transformieren. O.B.d.A. sei dazu $R \leq 1$ und $2RS_{\mathcal{K}} \leq 1$ (vgl. Hilfssatz 3, Teil (c)). Wie oben lässt sich das Problem (1) \wedge (2) für $\varepsilon := R$ im Randbereich $\Omega_{0 \leq \text{dist} \leq \varepsilon}$ durch

$$\phi \in C^3([0, \varepsilon] \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^2), \quad (r, s) \mapsto c(s) + r \begin{pmatrix} -\dot{c}^2(s) \\ \dot{c}^1(s) \end{pmatrix}$$

transformieren zu

$$\kappa \bar{u} = \frac{1}{1 - r\mathcal{K}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - r\mathcal{K}) \frac{\bar{u}_r}{W} \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left[(1 - r\mathcal{K})^{-1} \frac{\bar{u}_s}{W} \right] \right), \quad \text{in } [0, \varepsilon] \times \mathbb{R}, \quad (22)$$

$$\cos(\gamma) = -\frac{\bar{u}_r}{\sqrt{1 + \bar{u}_r^2 + \bar{u}_s^2}}, \quad \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}, \quad (23)$$

wobei $\bar{u} := u \circ \phi$ und

$$W : [0, \varepsilon] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (r, s) \mapsto \sqrt{1 + \bar{u}_r(r, s)^2 + \frac{\bar{u}_s(r, s)^2}{(1 - r\mathcal{K}(s))^2}} = \sqrt{1 + |\nabla u(\phi(r, s))|^2}.$$

Es ergeben sich

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \varepsilon S_{\mathcal{K}} \leq 1 - \varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}| \leq 1 - r\mathcal{K} \leq 1 + \varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}| \leq 1 + \varepsilon S_{\mathcal{K}} \leq \frac{3}{2} \quad (24)$$

und wegen $\sqrt{\bar{u}_r^2 + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2} = |\nabla u|$ und (24) auch

$$\sup_{[0, \varepsilon] \times \mathbb{R}} \sqrt{\bar{u}_r^2 + (1 - r\mathcal{K})^{-2}\bar{u}_s^2} \leq C_{C^1}, \quad \sup_{[0, \varepsilon] \times \mathbb{R}} |\bar{u}_r| \leq C_{C^1}, \quad \sup_{[0, \varepsilon] \times \mathbb{R}} |\bar{u}_s| \leq \frac{3}{2} C_{C^1}. \quad (25)$$

Es habe weiterhin c die Periode $L > 0$. Nun lassen sich Hölderschranken an \bar{u}_r und \bar{u}_s formulieren. Dazu wird in Schritt 1.1 zunächst eine integrale Ungleichung über

$$A_0 := (0, \varepsilon) \times (-\varepsilon, L + \varepsilon)$$

und damit eine Hölderschranke für die Tangentialableitungen über

$$A_s := \left(0, \frac{3}{4}\varepsilon\right) \times \left(0 - \frac{3}{4}\varepsilon, L + \frac{3}{4}\varepsilon\right)$$

und dann im Schritt 1.2 eine integrale Ungleichung über

$$A_{rs} := \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \left(0 - \frac{\varepsilon}{2}, L + \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset A_s$$

und damit eine Hölderschranke an die Normalenableitungen über

$$A := \left(0, \frac{\varepsilon}{4}\right) \times \left(0 - \frac{\varepsilon}{4}, L + \frac{\varepsilon}{4}\right) \subset A_{rs}$$

gewonnen; als $\nu_{A_0} = (\nu_{A_0}^1, \nu_{A_0}^2)^T$ sei im Folgenden die fast überall definierte zu A_0 gehörige äußere Normale bezeichnet.

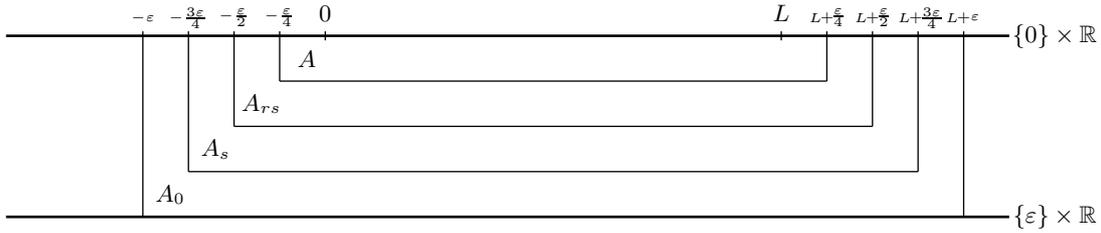


Abbildung 5: sukzessive Einschränkung des Randbereichs

SCHRITT 1.1: A-priori-Hölderschranken für \bar{u}_s über A_s . Es sei $\eta \in W^{1,2}(A_0)$ eine Testfunktion mit kompaktem Träger in $A_0 \cup (\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R})$. Da außerdem $\bar{u} \in C^3(\bar{A}_0)$ und \bar{u} sowie $\nabla \bar{u}$ beschränkt sind, lassen sich die folgenden Umformungen durch Testen der transformierten Gleichung (22) mit η , Integration und unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes sowie der Randbedingung (23) vornehmen. Zunächst ist

$$\int_{A_0} \cos(\gamma) \eta_r d(r, s) = \int_{\partial A_0} \cos(\gamma) \eta \nu_{A_0}^1 dS(r, s) = - \int_{\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R}} \cos(\gamma) \eta dS(r, s), \quad (26)$$

sodass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{A_0} \left(\kappa \bar{u} - (1 - r\mathcal{K})^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - r\mathcal{K}) \frac{\bar{u}_r}{W} \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left[(1 - r\mathcal{K})^{-1} \frac{\bar{u}_s}{W} \right] \right) \right) \eta d(r, s) \\ &= \int_{A_0} \left(\kappa \bar{u} \eta - (1 - r\mathcal{K})^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - r\mathcal{K}) \frac{\bar{u}_r}{W} \right] \eta - (1 - r\mathcal{K})^{-1} \frac{\partial}{\partial s} \left[(1 - r\mathcal{K})^{-1} \frac{\bar{u}_s}{W} \right] \eta \right) d(r, s) \\ &= \int_{A_0} \left(\kappa \bar{u} \eta + \frac{\bar{u}_r}{W} \eta_r + (1 - r\mathcal{K}) [(1 - r\mathcal{K})^{-1}]_r \frac{\bar{u}_r}{W} \eta \right. \\ &\quad \left. + (1 - r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s}{W} \eta_s + (1 - r\mathcal{K})^{-1} [(1 - r\mathcal{K})^{-1}]_s \frac{\bar{u}_s}{W} \eta \right) d(r, s) \\ &\quad - \int_{\partial A_0} \frac{\bar{u}_r}{W} \eta \nu_{A_0}^1 dS(r, s) - \int_{\partial A_0} (1 - r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s}{W} \underbrace{\eta \nu_{A_0}^2}_{=0} dS(r, s) \\ &= \int_{A_0} \left(\kappa \bar{u} \eta + \frac{\bar{u}_r}{W} \eta_r + (1 - r\mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} \eta \right. \\ &\quad \left. + (1 - r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s}{W} \eta_s + (1 - r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} \eta \right) d(r, s) + \int_{\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R}} \frac{\bar{u}_r}{W} \eta dS(r, s) \end{aligned} \quad (27)$$

$$= \int_{A_0} \left(\kappa \bar{u} \eta + \frac{\bar{u}_r}{W} \eta_r + (1 - r\mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} \eta \right. \\ \left. + (1 - r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s}{W} \eta_s + (1 - r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} \eta + \cos(\gamma) \eta_r \right) d(r, s).$$

Nun sei $\xi \in \{\chi|_{A_0} : \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)\}$ mit $\text{supp } \xi \cap \bar{A}_0 \subset A_0 \cup (\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R})$ gegeben; es sind $\xi_s \in W^{1,2}(A_0)$ und $\text{supp } \xi_s \cap \bar{A}_0 \subset A_0 \cup (\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R})$. Mit der Wahl $\eta = \xi_s$ in (27) ergibt sich die Gleichung

$$0 = \int_{A_0} \left(\kappa \bar{u} \xi_s + \frac{\bar{u}_r}{W} \xi_{rs} + (1 - r\mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} \xi_s \right. \\ \left. + (1 - r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s}{W} \xi_{ss} + (1 - r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} \xi_s + \cos(\gamma) \xi_{rs} \right) d(r, s) \\ = \int_{A_0} \left(\kappa \bar{u} \xi_s - \left[\frac{\bar{u}_r}{W} \right]_s \xi_r + (1 - r\mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} \xi_s \right. \\ \left. - \left[(1 - r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s}{W} \right]_s \xi_s + (1 - r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} \xi_s - [\cos(\gamma)]_s \xi_r \right) d(r, s) \quad (28) \\ + \int_{\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R}} \frac{u_r}{W} \xi_r \underbrace{\nu_{A_0}^2}_{=0} dS(r, s) + \int_{\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R}} (1 - r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s}{W} \xi_s \underbrace{\nu_{A_0}^2}_{=0} dS(r, s) \\ + \int_{\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R}} \cos(\gamma) \xi_r \underbrace{\nu_{A_0}^2}_{=0} dS(r, s) \\ = \int_{A_0} \left(\left(\kappa \bar{u} + (1 - r\mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} + (1 - r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} \right) \xi_s \right. \\ \left. - \left[\frac{\bar{u}_r}{W} \right]_s \xi_r - \left[(1 - r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s}{W} \right]_s \xi_s \right) d(r, s).$$

Wegen der Dichtheit von $\{\chi|_{A_0} : \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)\}$ in $W^{1,2}(A_0)$ (vgl. [Alt06, A 6.7]) ist (28) für beliebiges $\xi \in W^{1,2}(A_0)$ mit $\text{supp } \xi \subset A_0 \cup (\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R})$ gültig. Nun wähle man $h \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ und $y_0 = (r_0, s_0)^T \in A_0 \cup (\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R})$ beliebig, aber so, dass

$$B_\rho(y_0) \cap \bar{A}_0 \subset A_0 \cup (\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R}).$$

Zusätzlich sei eine beliebige Funktion $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\text{supp } \zeta \subset B_\rho(y_0)$ und $\zeta(\mathbb{R}^2) \subset [0, 1]$ gewählt. Entsprechend [GT01, Lemma 7.6] sind $\xi_{h,+} := \zeta^2 \max\{\bar{u}_s - h, 0\}$ und $\xi_{h,-} := \zeta^2 \max\{-\bar{u}_s - h, 0\}$ zulässige Testfunktionen in (28); ferner verschwinden $\xi_{h,+}$, $\xi_{h,-}$, sowie ihre schwachen Ableitungen außerhalb von

$$A_{h,\rho,y_0,+} := \{y \in A_0 \cap B_\rho(y_0) : \bar{u}_s(y) > h\}, \\ A_{h,\rho,y_0,-} := \{y \in A_0 \cap B_\rho(y_0) : \bar{u}_s(y) < -h\},$$

fast überall, sodass

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} \left(\left(\kappa \bar{u} + (1-r\mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} \right) [\zeta^2(\bar{u}_s - h)]_s \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{\bar{u}_r}{W} \right]_s [\zeta^2(\bar{u}_s - h)]_r - \left[(1-r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s}{W} \right]_s [\zeta^2(\bar{u}_s - h)]_s \right) d(r, s) \\
&= \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} \left(2 \left(\kappa \bar{u} + (1-r\mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} \right) (\bar{u}_s - h) \zeta \zeta_s \right. \\
&\quad \left. + \left(\kappa \bar{u} + (1-r\mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} \right) \bar{u}_{ss} \zeta^2 \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(\frac{\bar{u}_{rs}}{W} - \frac{\bar{u}_r (\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s \bar{u}_{ss} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \bar{u}_s^2)}{W^3} \right) (\bar{u}_s - h) \zeta \zeta_r \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\bar{u}_{rs}}{W} - \frac{\bar{u}_r (\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s \bar{u}_{ss} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \bar{u}_s^2)}{W^3} \right) \bar{u}_{rs} \zeta^2 \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(2(1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_{ss}}{W} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (1-r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s (\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s \bar{u}_{ss} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \bar{u}_s^2)}{W^3} \right) (\bar{u}_s - h) \zeta \zeta_s \right. \\
&\quad \left. - \left(2(1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_{ss}}{W} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (1-r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s (\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s \bar{u}_{ss} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \bar{u}_s^2)}{W^3} \right) \bar{u}_{ss} \zeta^2 \right) d(r, s).
\end{aligned}$$

Nun gilt unter Zuhilfenahme der C^1 -Schranke (25), der Schranke (24) und der Cauchy-Schwarz-schen Ungleichung die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{W} \bar{u}_{rs}^2 - \frac{\bar{u}_r^2}{W^3} \bar{u}_{rs}^2 - 2(1-r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s}{W^3} \bar{u}_{rs} \bar{u}_{ss} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \frac{1}{W} \bar{u}_{ss}^2 - (1-r\mathcal{K})^{-4} \frac{\bar{u}_s^2}{W^3} \bar{u}_{ss}^2 \\
&= \frac{1}{W^3} \left((\bar{u}_{rs}^2 + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_{ss}^2) W^2 - \left(\left(\begin{array}{c} \bar{u}_r \\ (1-r\mathcal{K})^{-1} \bar{u}_s \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \bar{u}_{rs} \\ (1-r\mathcal{K})^{-1} \bar{u}_{ss} \end{array} \right) \right)^2 \right) \\
&\geq \frac{1}{W^3} \left((\bar{u}_{rs}^2 + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_{ss}^2) W^2 - \left| \left(\begin{array}{c} \bar{u}_r \\ (1-r\mathcal{K})^{-1} \bar{u}_s \end{array} \right) \right|^2 \left| \left(\begin{array}{c} \bar{u}_{rs} \\ (1-r\mathcal{K})^{-1} \bar{u}_{ss} \end{array} \right) \right|^2 \right) \\
&= \frac{1}{W^3} (\bar{u}_{rs}^2 + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_{ss}^2) \geq \frac{1}{(1+C_{C^1}^2)^{\frac{3}{2}}} (\bar{u}_{rs}^2 + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_{ss}^2) \\
&\geq \frac{4}{9(1+C_{C^1}^2)^{\frac{3}{2}}} |\nabla \bar{u}_s|^2.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{4}{9(1+C_{C^1}^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} |\nabla \bar{u}_s|^2 \zeta^2 d(r, s)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} \left(\frac{1}{W} \bar{u}_{rs}^2 - \frac{\bar{u}_r^2}{W^3} \bar{u}_{rs}^2 - 2(1-r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s}{W^3} \bar{u}_{rs} \bar{u}_{ss} \right. \\
&\quad \left. + (1-r\mathcal{K})^{-2} \frac{1}{W} \bar{u}_{ss}^2 - (1-r\mathcal{K})^{-4} \frac{\bar{u}_s^2}{W^3} \bar{u}_{ss}^2 \right) \zeta^2 d(r,s) \\
&= \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} \left(2 \left(\kappa \bar{u} + (1-r\mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} \right) (\bar{u}_s - h) \zeta \zeta_s \right. \\
&\quad \left. + \left(\kappa \bar{u} + (1-r\mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} \right) \bar{u}_{ss} \zeta^2 \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(\frac{\bar{u}_{rs}}{W} - \frac{\bar{u}_r (\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s \bar{u}_{ss} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \bar{u}_s^2)}{W^3} \right) (\bar{u}_s - h) \zeta \zeta_r \right. \\
&\quad \left. + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{W^3} \bar{u}_{rs} \zeta^2 \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(2(1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_{ss}}{W} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (1-r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_s (\bar{u}_r \bar{u}_{rs} + (1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s \bar{u}_{ss} + (1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \bar{u}_s^2)}{W^3} \right) (\bar{u}_s - h) \zeta \zeta_s \right. \\
&\quad \left. - \left(2(1-r\mathcal{K})^{-3} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s}{W} - (1-r\mathcal{K})^{-5} r \mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s^3}{W^3} \right) \bar{u}_{ss} \zeta^2 \right) d(r,s). \tag{29}
\end{aligned}$$

Für beliebiges $\delta > 0$ gilt der folgende Spezialfall der Young'schen Ungleichung

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad ab = \sqrt{2\delta} a \frac{b}{\sqrt{2\delta}} \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2. \tag{30}$$

Es ergibt sich nun mit (29), (30), (24) und

$$\frac{\bar{u}_r^2}{W^2} \leq 1, \quad \frac{(1-r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s^2}{W^2} \leq 1, \quad 1 \leq W \leq \sqrt{1 + C_{C^1}^2}$$

für beliebiges $\delta > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{9(1+C_{C^1}^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} |\nabla \bar{u}_s|^2 \zeta^2 d(r,s) \\
&\leq \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} \left(2(\kappa \bar{u} + 2|\mathcal{K}| + 4\varepsilon|\mathcal{K}'|) (\bar{u}_s - h) \zeta |\zeta_s| + (\kappa \bar{u} + 2|\mathcal{K}| + 4\varepsilon|\mathcal{K}'|) |\bar{u}_{ss}| \zeta^2 \right. \\
&\quad \left. + 2(2|\bar{u}_{rs}| + 2|\bar{u}_{ss}| + 2\varepsilon|\mathcal{K}'|) (\bar{u}_s - h) \zeta |\zeta_r| + 2\varepsilon|\mathcal{K}'| |\bar{u}_{rs}| \zeta^2 \right. \\
&\quad \left. + 2(8\varepsilon|\mathcal{K}'| + 4|\bar{u}_{ss}| + 2|\bar{u}_{rs}| + 4|\bar{u}_{ss}| + 4\varepsilon|\mathcal{K}'|) (\bar{u}_s - h) \zeta |\zeta_s| \right. \\
&\quad \left. + (8\varepsilon|\mathcal{K}'| + 4\varepsilon|\mathcal{K}'|) |\bar{u}_{ss}| \zeta^2 \right) d(r,s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} \left(2(\kappa\bar{u} + 2|\mathcal{K}| + 4\varepsilon|\mathcal{K}'|) \left[\delta\zeta^2 + \frac{1}{4\delta}|\zeta_s|^2(\bar{u}_s - h)^2 \right] \right. \\
&\quad + (\kappa\bar{u} + 2|\mathcal{K}| + 4\varepsilon|\mathcal{K}'|) |\bar{u}_{ss}| \zeta^2 \\
&\quad + 4\varepsilon|\mathcal{K}'| \left[\delta\zeta^2 + \frac{1}{4\delta}|\zeta_r|^2(\bar{u}_s - h)^2 \right] + 4 \left[\delta\bar{u}_{rs}^2 \zeta^2 + \frac{1}{4\delta}|\zeta_r|^2(\bar{u}_s - h)^2 \right] \\
&\quad + 4 \left[\delta\bar{u}_{ss}^2 \zeta^2 + \frac{1}{4\delta}|\zeta_r|^2(\bar{u}_s - h)^2 \right] + 2\varepsilon|\mathcal{K}'| |\bar{u}_{rs}| \zeta^2 \\
&\quad + 24\varepsilon|\mathcal{K}'| \left[\delta\zeta^2 + \frac{1}{4\delta}|\zeta_s|^2(\bar{u}_s - h)^2 \right] \\
&\quad + 4 \left[\delta\bar{u}_{rs}^2 \zeta^2 + \frac{1}{4\delta}|\zeta_s|^2(\bar{u}_s - h)^2 \right] + 16 \left[\delta\bar{u}_{ss}^2 \zeta^2 + \frac{1}{4\delta}|\zeta_s|^2(\bar{u}_s - h)^2 \right] \\
&\quad \left. + 12\varepsilon|\mathcal{K}'| |\bar{u}_{ss}| \zeta^2 \right) d(r, s) \\
&\leq \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} (\kappa\bar{u} + 2|\mathcal{K}| + 16\varepsilon|\mathcal{K}'|) |\nabla\bar{u}_s| \zeta^2 d(r, s) + 20\delta \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} |\nabla\bar{u}_s|^2 \zeta^2 d(r, s) \\
&\quad + \delta \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} (2\kappa\bar{u} + 4|\mathcal{K}| + 36\varepsilon|\mathcal{K}'|) d(r, s) \\
&\quad + \frac{1}{4\delta} \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} (20 + 2\kappa\bar{u} + 4|\mathcal{K}| + 32\varepsilon|\mathcal{K}'|) (\bar{u}_s - h)^2 |\nabla\zeta|^2 d(r, s) \\
&\leq 21\delta \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} |\nabla\bar{u}_s|^2 \zeta^2 d(r, s) \\
&\quad + \frac{1}{4\delta} \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} (\kappa\bar{u} + 2|\mathcal{K}| + 16\varepsilon|\mathcal{K}'|)^2 d(r, s) + \delta \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} (2\kappa\bar{u} + 4|\mathcal{K}| + 36\varepsilon|\mathcal{K}'|) d(r, s) \\
&\quad + \frac{1}{4\delta} \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} (20 + 2\kappa\bar{u} + 4|\mathcal{K}| + 32\varepsilon|\mathcal{K}'|) (\bar{u}_s - h)^2 |\nabla\zeta|^2 d(r, s).
\end{aligned}$$

Mit der Wahl

$$\delta = \frac{1}{21} \left(\frac{2}{9(1 + C_{C_1}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{2}{189(1 + C_{C_1}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ergibt sich so

$$\int_{A_{h,\rho,y_0,+}} |\nabla\bar{u}_s|^2 \zeta^2 d(r, s) \leq D_1 \int_{A_{h,\rho,y_0,+}} (\bar{u}_s - h)^2 |\nabla\zeta|^2 d(r, s) + D_2 \mathcal{L}^2(A_{h,\rho,y_0,+}) \quad (31)$$

mit Konstanten $D_1 = D_1(C_{C^0}, C_{C_1}, S_{\mathcal{K}}, S_{\mathcal{K}'}, \kappa, \varepsilon)$ und $D_2 = D_2(C_{C^0}, C_{C_1}, S_{\mathcal{K}}, S_{\mathcal{K}'}, \kappa, \varepsilon)$, genauer

$$\begin{aligned}
D_1 &:= \frac{1701}{8} (1 + C_{C_1}^2)^3 (10 + \kappa C_{C^0} + 2S_{\mathcal{K}} + 16\varepsilon S_{\mathcal{K}'}), \\
D_2 &:= \frac{1701}{16} (1 + C_{C_1}^2)^3 (\kappa C_{C^0} + 2S_{\mathcal{K}} + 16\varepsilon S_{\mathcal{K}'})^2 + \frac{2}{21} (\kappa C_{C^0} + 2S_{\mathcal{K}} + 18\varepsilon S_{\mathcal{K}'}).
\end{aligned}$$

Auf demselben Weg ergibt sich die Ungleichung

$$\int_{A_{h,\rho,y_0,-}} |\nabla\bar{u}_s|^2 \zeta^2 d(r, s) \leq D_1 \int_{A_{h,\rho,y_0,-}} (-\bar{u}_s - h)^2 |\nabla\zeta|^2 d(r, s) + D_2 \mathcal{L}^2(A_{h,\rho,y_0,-}) \quad (32)$$

mit den gleichen Konstanten D_1 und D_2 . Durch Zusammenfassen von Termen in (29) ließen sich

die Konstanten noch etwas verbessern.

Die Ungleichungen (31) bzw. (32) zeigen nun, dass \bar{u}_s bzw. $-\bar{u}_s$ die Ungleichung [LU68a, Chapter 2, (6.1)] erfüllen: Es sei ein beliebiges $\sigma \in (0, 1)$ und damit die konzentrischen Teilmengen $A_{h, \rho - \sigma\rho, y_0, +} \subset A_{h, \rho, y_0, +}$ und $A_{h, \rho - \sigma\rho, y_0, -} \subset A_{h, \rho, y_0, -}$ gegeben. $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ sei so gewählt, dass

$$\text{supp } \zeta \subset B_\rho(y_0), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \zeta|_{B_{\rho - \sigma\rho}(y_0)} \equiv 1, \quad |\nabla \zeta| \leq \frac{3}{\sigma\rho}$$

(vgl. Bemerkung 7). So lässt sich die Ungleichung [LU68a, Chapter 2, (6.1)] für \bar{u}_s ,

$$\begin{aligned} \int_{A_{h, \rho - \sigma\rho, y_0, +}} |\nabla \bar{u}_s|^2 d(r, s) &\leq \int_{A_{h, \rho, y_0, +}} |\nabla \bar{u}_s|^2 \zeta^2 d(r, s) \\ &\leq D_1 \int_{A_{h, \rho, y_0, +}} (\bar{u}_s - h)^2 |\nabla \zeta|^2 d(r, s) + D_2 \mathcal{L}^2(A_{h, \rho, y_0, +}) \\ &\leq \left(D_1 \frac{9}{\sigma^2 \rho^2} \max_{A_{h, \rho, y_0, +}} (\bar{u}_s - h)^2 + D_2 \right) \mathcal{L}^2(A_{h, \rho, y_0, +}) \\ &\leq \max\{9D_1, D_2\} \left(\frac{1}{\sigma^2 \rho^2} \max_{A_{h, \rho, y_0, +}} (\bar{u}_s - h)^2 + 1 \right) \mathcal{L}^2(A_{h, \rho, y_0, +}), \end{aligned}$$

analog auch für $-\bar{u}_s$, zeigen. Damit ist \bar{u}_s in der in [LU68a, Chapter 2, Section 6] und [LU68a, S. 93] eingeführten Klasse [LU68a, $\hat{\mathfrak{B}}_2(A_0 \cup (\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R}), (3/2)C_{C^1}, \max\{9D_1, D_2\}, \delta, 0)$], wobei $\delta > 0$ beliebig gewählt werden kann.

Um [LU68a, Chapter 2, Theorem 7.2] für \bar{u}_s über A_0 anwenden zu können, verbleibt es, die Eigenschaften [LU68a, Chapter 2, Theorem 7.2, (1)] und [LU68a, Chapter 2, Theorem 7.2, (2)] für das Randstück $\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R}$ zu zeigen. Dazu seien $\rho \leq \varepsilon$, $y_0 \in \partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R}$ und $h_1 > h_2$ beliebig gegeben. Entsprechend [LU68a, Chapter 2, Lemma 3.5] und [LU68a, Chapter 2, Remark on Lemma 3.5] existiert ein ausschließlich dimensionsabhängiges $\beta > 0$ so, dass die Ungleichung [LU68a, Chapter 2, (7.7)], also Eigenschaft [LU68a, Chapter 2, Theorem 7.2, (1)], erfüllt wird:

$$(h_1 - h_2) (\mathcal{L}^2(A_{h_1, \rho, y_0, +}))^{\frac{1}{2}} \leq \beta \frac{\rho^n}{(B_\rho(y_0) \cap A_0) \setminus A_{h_2, \rho, y_0, +}} \int_{A_{h_1, \rho, y_0, +} \setminus A_{h_2, \rho, y_0, +}} |\nabla \bar{u}_s| d(r, s).$$

Außerdem ist wegen $\rho \leq \varepsilon$ und der Geometrie von A_0 auch die Eigenschaft [LU68a, Chapter 2, Theorem 7.2, (2)] erfüllt:

$$\mathcal{L}^2(B_\rho(y_0) \cap A_0) \geq \frac{1}{4} \mathcal{L}^2(B_\rho(y_0)).$$

Entsprechend [LU68a, Chapter 2, Theorem 7.2] existieren also ein $\alpha = \alpha(\varepsilon, C_{C^1}, D_1, D_2) \in (0, 1)$ und ein $\tilde{C}_{s, \alpha} = \tilde{C}_{s, \alpha}(\varepsilon, C_{C^1}, D_1, D_2) > 0$ so, dass für alle $\rho > 0$ und $y_0 \in A_0 \cup (\partial A_0 \cap \{0\} \times \mathbb{R})$ mit

$$\rho_0 := \text{dist}(y_0, \partial A_0 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})) > 0, \quad B_\rho(y_0) \cap \partial A_0 \subset \{0\} \times \mathbb{R},$$

die Ungleichung [LU68a, Chapter 2, (7.4)]

$$\max_{B_\rho(y_0) \cap A_0} \bar{u}_s - \min_{B_\rho(y_0) \cap A_0} \bar{u}_s \leq \tilde{C}_{s,\alpha} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\alpha \quad (33)$$

erfüllt.

Insbesondere ist \bar{u}_s über A_s gleichmäßig hölderstetig: Es seien $y_1, y_2 \in A_s$ und dazu $y_0 = (y_1 + y_2)/2 \in A_s$, sowie $\rho := \min\{|y_0 - y_1|, \varepsilon/4\}$. Es ist nach der Wahl von A_0 und A_s

$$\rho_0 := \text{dist}(y_0, \partial A_0 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})) > \frac{\varepsilon}{4},$$

insbesondere $B_\rho(y_0) \cap \partial A_0 \subset \{0\} \times \mathbb{R}$. Entsprechend (33) ergibt sich im Fall $|y_1 - y_2| \leq \varepsilon/2$, wobei insbesondere $2\rho = |y_1 - y_2|$ ist, dass

$$\begin{aligned} |\bar{u}_s(y_1) - \bar{u}_s(y_2)| &\leq \max_{B_\rho(y_0) \cap A_0} \bar{u}_s - \min_{B_\rho(y_0) \cap A_0} \bar{u}_s \leq \tilde{C}_{s,\alpha} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\alpha \leq \tilde{C}_{s,\alpha} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^\alpha (2\rho)^\alpha \\ &= \tilde{C}_{s,\alpha} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^\alpha |y_1 - y_2|^\alpha. \end{aligned}$$

Im Fall $|y_1 - y_2| \geq \varepsilon/2$ ist außerdem

$$|\bar{u}_s(y_1) - \bar{u}_s(y_2)| \leq \max_{A_0} \bar{u}_s - \min_{A_0} \bar{u}_s \leq 3C_{C^1} \leq 3C_{C^1} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^\alpha |y_1 - y_2|^\alpha,$$

sodass für alle $y_1, y_2 \in A_s$

$$|\bar{u}_s(y_1) - \bar{u}_s(y_2)| \leq \max \left\{ \tilde{C}_{s,\alpha} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^\alpha, 3C_{C^1} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^\alpha \right\} |y_1 - y_2|^\alpha =: C_{s,\alpha} |y_1 - y_2|^\alpha \quad (34)$$

gilt.

SCHRITT 1.2: A-priori-Hölerschranken für \bar{u}_r über A . Es sei $\rho > 0$ und $y_0 \in A_{r_s} \cup (\partial A_{r_s} \cap \{0\} \times \mathbb{R})$ so gegeben, dass $B_\rho(y_0) \cap \partial A_{r_s} \subset \{0\} \times \mathbb{R}$. Entsprechend der Wahl von A_{r_s} muss dafür $\rho \leq \varepsilon/2$ sein; insbesondere ist $B_{3\rho/2}(y_0) \cap \partial A_s \subset \{0\} \times \mathbb{R}$. Es sei nun $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ so gewählt, dass

$$\text{supp } \zeta \subset B_{\frac{3}{2}\rho}(y_0), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \zeta|_{B_\rho(y_0)} \equiv 1, \quad |\nabla \zeta| \leq \frac{6}{\rho}$$

(vgl. Bemerkung 7). Zu $\hat{\varepsilon} > 0$ seien

$$h_\varepsilon := \min_{B_{\frac{3}{2}\rho}(y_0) \cap A_s} \bar{u}_s - \hat{\varepsilon}$$

und

$$y_{\min} \in \overline{B_{\frac{3}{2}\rho}(y_0) \cap A_s}, \quad \text{mit} \quad \bar{u}_s(y_{\min}) = \min_{B_{\frac{3}{2}\rho}(y_0) \cap A_s} \bar{u}_s.$$

Es liefert für $y \in B_{3\rho/2}(y_0) \cap A_s$ die gleichmäßige Hölerschranke an \bar{u}_s über A_s aus (34) die

Abschätzung

$$|\bar{u}_s(y) - h_{\hat{\varepsilon}}| \leq |\bar{u}_s(y) - \bar{u}_s(y_{\min})| + \hat{\varepsilon} \leq C_{s,\alpha} |y - y_{\min}|^\alpha + \hat{\varepsilon} \leq C_{s,\alpha} (3\rho)^\alpha + \hat{\varepsilon}. \quad (35)$$

Die Ungleichungen (31) und (35) erlauben nun wegen $B_{3\rho/2}(y_0) \cap A_s = A_{h_{\hat{\varepsilon}}, 3\rho/2, y_0, +}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(y_0) \cap A_{rs}} |\nabla \bar{u}_s|^2 d(r, s) &\leq \int_{B_{3\rho/2}(y_0) \cap A_s} |\nabla \bar{u}_s|^2 \zeta^2 d(r, s) \\ &\leq D_1 \int_{B_{3\rho/2}(y_0) \cap A_s} (\bar{u}_s - h_{\hat{\varepsilon}})^2 |\nabla \zeta|^2 d(r, s) + D_2 \mathcal{L}^2 \left(B_{\frac{3}{2}\rho}(y_0) \cap A_s \right) \\ &\leq \left(D_1 (C_{s,\alpha} (3\rho)^\alpha + \hat{\varepsilon})^2 \frac{36}{\rho^2} + D_2 \right) \mathcal{L}^2 \left(B_{\frac{3}{2}\rho}(y_0) \cap A_s \right) \\ &\leq \left(36D_1 (C_{s,\alpha} (3\rho)^\alpha + \hat{\varepsilon})^2 + D_2 \rho^2 \right) \frac{9}{4} \pi. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon \leq 1$ und $\alpha \in (0, 1)$, ist $\rho^2 \leq \rho^{2\alpha}$. Mit $\hat{\varepsilon} \rightarrow 0$ ergibt sich somit

$$\int_{B_\rho(y_0) \cap A_{rs}} |\nabla \bar{u}_s|^2 d(r, s) \leq \frac{9}{4} \pi (36D_1 C_{s,\alpha}^2 3^{2\alpha} + D_2) \rho^{2\alpha} =: \hat{C}_{s,\alpha} \rho^{2\alpha}. \quad (36)$$

Nach Ausdifferenzieren der Gleichung für \bar{u} (vgl. (21)), ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{u}_{rr} &= \left[\kappa \frac{W^3}{1 + (1 - r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s^2} \bar{u} + (1 - r\mathcal{K})^{-1} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r W^2}{1 + (1 - r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s^2} - (1 - r\mathcal{K})^{-3} r\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s W^2}{1 + (1 - r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s^2} \right. \\ &\quad \left. + (1 - r\mathcal{K})^{-3} \mathcal{K} \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s^2}{1 + (1 - r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s^2} + (1 - r\mathcal{K})^{-5} r\mathcal{K}' \frac{\bar{u}_s^3}{1 + (1 - r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s^2} \right] \\ &\quad + \left[2(1 - r\mathcal{K})^{-2} \frac{\bar{u}_r \bar{u}_s}{1 + (1 - r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s^2} \right] \bar{u}_{rs} + \left[-(1 - r\mathcal{K})^{-2} \frac{1 + \bar{u}_r^2}{1 + (1 - r\mathcal{K})^{-2} \bar{u}_s^2} \right] \bar{u}_{ss} \\ &=: b + b_{rs} \bar{u}_{rs} + b_{ss} \bar{u}_{ss}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (24), (25) und $\varepsilon \leq 1$ ergeben sich für die Koeffizienten b, b_{rs}, b_{ss} von $\kappa, S_{\mathcal{K}}, S_{\mathcal{K}'}, C_{C^0}$ und C_{C^1} abhängige Schranken:

$$\begin{aligned} |b| &\leq \kappa C_{C^0} (1 + C_{C^1}^2)^{\frac{3}{2}} + 2S_{\mathcal{K}} C_{C^1} (1 + C_{C^1}^2) + 4S_{\mathcal{K}'} (1 + C_{C^1}^2) + 2S_{\mathcal{K}} C_{C^1} + 12S_{\mathcal{K}'} C_{C^1} =: C_b, \\ |b_{rs}| &\leq 4C_{C^1} =: C_{b_{rs}}, \\ |b_{ss}| &\leq 4(1 + C_{C^1}^2) =: C_{b_{ss}}. \end{aligned}$$

Damit gilt auch für \bar{u}_r eine Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(y_0) \cap A_{rs}} |\nabla \bar{u}_r|^2 d(r, s) &= \int_{B_\rho(y_0) \cap A_{rs}} (|b + b_{rs} \bar{u}_{rs} + b_{ss} \bar{u}_{ss}|^2 + |\bar{u}_{rs}|^2) d(r, s) \\ &\leq \int_{B_\rho(y_0) \cap A_{rs}} (3|b|^2 + 3|b_{rs}|^2 |\bar{u}_{rs}|^2 + 3|b_{ss}|^2 |\bar{u}_{ss}|^2 + |\bar{u}_{rs}|^2) d(r, s) \\ &\leq 3C_b^2 \pi \rho^2 + \max \{ 3C_{b_{rs}}^2 + 1, 3C_{b_{ss}}^2 \} \int_{B_\rho(y_0) \cap A_{rs}} |\nabla \bar{u}_s|^2 d(r, s) \end{aligned}$$

$$\leq 3C_b^2 \pi \rho^{2\alpha} + \max \{3C_{b_{r_s}}^2 + 1, 3C_{b_{s_s}}^2\} \hat{C}_{s,\alpha} \rho^{2\alpha} =: \hat{C}_{r,\alpha} \rho^{2\alpha}.$$

Offenbar ist $\hat{C}_{r,\alpha}$ ausschließlich von $\kappa, S_{\mathcal{K}}, S_{\mathcal{K}'}, C_{C^0}$ und C_{C^1} , durch $C_b, C_{b_{r_s}}$ und $C_{b_{s_s}}$, sowie zusätzlich von ε, D_1, D_2 und α , durch $\hat{C}_{s,\alpha}$, abhängig.

Damit existiert entsprechend [LU68a, Chapter 2, Lemma 4.2] eine von $\hat{C}_{r,\alpha}$ abhängige Konstante $\tilde{C}_{r,\alpha} = \tilde{C}_{r,\alpha}(\kappa, S_{\mathcal{K}}, S_{\mathcal{K}'}, C_{C^0}, C_{C^1}, \varepsilon, D_1, D_2, \alpha)$ so, dass für alle durch $\rho > 0$ und $y_0 \in A_{r_s} \cup \{\partial A_{r_s} \cap \{0\} \times \mathbb{R}\}$ gegebenen Kreisscheiben mit $B_{3\rho/2}(y_0) \cap \partial A_{r_s} \subset \{0\} \times \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\max_{B_{\frac{\rho}{2}}(y_0) \cap A_{r_s}} \bar{u}_r - \min_{B_{\frac{\rho}{2}}(y_0) \cap A_{r_s}} \bar{u}_r \leq \tilde{C}_{r,\alpha} \rho^\alpha. \quad (37)$$

Insbesondere ist \bar{u}_r über A gleichmäßig hölderstetig: Es seien $y_1, y_2 \in A$ und dazu $y_0 = (y_1 + y_2)/2 \in A$, sowie $\rho := \min\{|y_1 - y_2|, \varepsilon/6\}$. Es ist nach der Wahl von A_{r_s} und A

$$B_{\frac{3}{2}\rho}(y_0) \cap \partial A_{r_s} \subseteq B_{\frac{1}{4}\varepsilon}(y_0) \cap \partial A_{r_s} \subset \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Entsprechend (37) ergibt sich im Fall $|y_1 - y_2| \leq \varepsilon/6$, wobei insbesondere $\rho = |y_1 - y_2|$ ist, dass

$$|\bar{u}_r(y_1) - \bar{u}_r(y_2)| \leq \max_{B_{\frac{\rho}{2}}(y_0) \cap A_{r_s}} \bar{u}_r - \min_{B_{\frac{\rho}{2}}(y_0) \cap A_{r_s}} \bar{u}_r \leq \tilde{C}_{r,\alpha} \rho^\alpha = \tilde{C}_{r,\alpha} |y_1 - y_2|^\alpha.$$

Im Fall $|y_1 - y_2| \geq \varepsilon/6$ ist außerdem

$$|\bar{u}_r(y_1) - \bar{u}_r(y_2)| \leq \max_{A_0} \bar{u}_r - \min_{A_0} \bar{u}_r \leq 2C_{C^1} \leq 2C_{C^1} \left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^\alpha |y_1 - y_2|^\alpha,$$

sodass für alle $y_1, y_2 \in A$

$$|\bar{u}_r(y_1) - \bar{u}_r(y_2)| \leq \max \left\{ \tilde{C}_{r,\alpha}, 2C_{C^1} \left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^\alpha \right\} |y_1 - y_2|^\alpha =: C_{r,\alpha} |y_1 - y_2|^\alpha \quad (38)$$

gilt.

SCHRITT 2: A-priori-Hölerschranken für ∇u im Inneren. Innere Hölder-Schranken für Gradienten C^1 -beschränkter Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind gut bekannt. Sie finden sich beispielsweise in [LU68a, Chapter 9, Theorem 3.1] oder [GT01, Theorem 13.6]. Die Divergenzform von (1) erleichtert das Finden solcher Schranken jedoch. Wie bereits im Weg 2 von Bemerkung 4 vorgestellt, lassen sich Gleichungen an die $w_k := u_{x^k}$, $k \in \{1, 2\}$, formulieren: Mit den Koeffizienten

$$\tilde{a}_{ij} := \frac{\delta_{i,j}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} - \frac{u_{x^i} u_{x^j}}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sind

$$\forall \psi \in W_0^{1,2}(\Omega) : \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \tilde{a}_{ij} w_{k,x^i} \psi_{x^j} dx + \int_{\Omega} \kappa w_k \psi dx = 0.$$

Die Koeffizienten erfüllen die Bedingungen [GT01, (8.5)] und [GT01, (8.6)] mit von κ und C_{C^1}

abhängigen Konstanten (vgl. (5)):

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^2 \tilde{a}_{ij} \xi^i \xi^j &\geq \frac{|\xi|^2}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{|\xi|^2}{(1 + C_{C^1}^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
\sum_{i,j=1}^2 \tilde{a}_{ij}^2 &= \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\delta_{i,j} (1 + |\nabla u|^2) - u_{x^i} u_{x^j}}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^2 \frac{\delta_{i,j} (1 + |\nabla u|^2)^2 - 2\delta_{i,j} u_{x^i} u_{x^j} (1 + |\nabla u|^2) + u_{x^i}^2 u_{x^j}^2}{(1 + |\nabla u|^2)^3} \\
&= \frac{2(1 + |\nabla u|^2)^2 - 2|\nabla u|^2(1 + |\nabla u|^2) + |\nabla u|^4}{(1 + |\nabla u|^2)^3} \\
&= \frac{1 + (1 + |\nabla u|^2)^2}{(1 + |\nabla u|^2)^3} = \frac{1}{(1 + |\nabla u|^2)^3} + \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \leq 2.
\end{aligned}$$

Entsprechend [GT01, Theorem 8.24] existieren damit ein $C_{I,\beta} = C_{I,\beta}(C_{C^0}, C_{C^1}, \kappa, \varepsilon) > 0$ und ein $\beta = \beta(C_{C^1}, \kappa, \varepsilon)$ so, dass

$$\forall k \in \{1, 2\} : \|w_k\|_{C^{0,\beta}(\Omega_{\frac{\varepsilon}{8}}^{\text{dist} < \infty})} \leq C_{I,\beta}.$$

SCHRITT 3: u_{x^i} -Schranken im Randbereich. Bevor eine Verknüpfung der Schranken aus Schritt 1 und 2 erfolgen kann, muss gezeigt werden, dass Hölderschranken an \bar{u}_r und \bar{u}_s auch u_{x^1} und u_{x^2} im Randbereich kontrollierbar machen.

Es seien $x_1, x_2 \in \Omega_{0 \leq \text{dist} \leq \varepsilon/4}$ zunächst fest, aber beliebig, gegeben. Ferner seien $y_1 := (r_1, s_1), y_2 := (r_2, s_2) \in A$ so gewählt, dass $\phi(y_1) = x_1, \phi(y_2) = x_2$ und $|s_1 - s_2|$ unter solchen Wahlen minimal wird, also

$$|s_1 - s_2| = \min \left\{ |\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2| : \phi((r_1, \tilde{s}_1)) = x_1, \phi((r_2, \tilde{s}_2)) = x_2, -\frac{\varepsilon}{4} \leq \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \leq L + \frac{\varepsilon}{4} \right\}.$$

Ist $|x_1 - x_2| \geq \varepsilon/4$, dann sind für $k \in \{1, 2\}$

$$|u_{x^k}(x_1) - u_{x^k}(x_2)| \leq 2C_{C^1} \leq 2C_{C^1} \left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^\alpha |x_1 - x_2|^\alpha.$$

Es sei also der Fall $|x_1 - x_2| < \varepsilon/4$ betrachtet. Offenbar ist $|r_1 - r_2| \leq |x_1 - x_2|$. Die äußere Kugelbedingung an Ω garantiert, dass ein $C_s = C_s(\varepsilon, S_k)$ so existiert, dass $|s_1 - s_2| \leq C_s |x_1 - x_2|$ wird. Es sind außerdem

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_r \\ (1 - r\mathcal{K})^{-1}\bar{u}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{c}^2 & \dot{c}^1 \\ \dot{c}^1 & \dot{c}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x^1} \\ u_{x^2} \end{pmatrix}$$

und somit nach Adjunktenformel

$$\begin{pmatrix} u_{x^1} \\ u_{x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{c}^2 & \dot{c}^1 \\ \dot{c}^1 & \dot{c}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_r \\ (1 - r\mathcal{K})^{-1}\bar{u}_s \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für u_{x^1} , unter Verwendung von

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a + b \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2}} \leq \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2},$$

(24), $|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|^\alpha$ und $|\dot{c}| = 1$, dass

$$\begin{aligned} |u_{x^1}(x_1) - u_{x^1}(x_2)| &\leq |\dot{c}^2(s_1)\bar{u}_r(y_1) - \dot{c}^2(s_2)\bar{u}_r(y_2)| + (1 - r\mathcal{K})^{-1} |\dot{c}^1(s_1)\bar{u}_s(y_1) - \dot{c}^1(s_2)\bar{u}_s(y_2)| \\ &\leq |\dot{c}^2(s_1)\bar{u}_r(y_1) - \dot{c}^2(s_2)\bar{u}_r(y_1)| + |\dot{c}^2(s_2)\bar{u}_r(y_1) - \dot{c}^2(s_2)\bar{u}_r(y_2)| \\ &\quad + (1 - r\mathcal{K})^{-1} |\dot{c}^1(s_1)\bar{u}_s(y_1) - \dot{c}^1(s_2)\bar{u}_s(y_1)| + 2 |\dot{c}^1(s_2)\bar{u}_s(y_1) - \dot{c}^1(s_2)\bar{u}_s(y_2)| \\ &\leq (C_{r,\alpha} + 2C_{s,\alpha}) |y_1 - y_2|^\alpha + C_{C^1} |\dot{c}^2(s_1) - \dot{c}^2(s_2)| + C_{C^1} |\dot{c}^1(s_1) - \dot{c}^1(s_2)| \\ &\leq (C_{r,\alpha} + 2C_{s,\alpha}) |y_1 - y_2|^\alpha + \sqrt{2}C_{C^1} |\dot{c}(s_1) - \dot{c}(s_2)| \\ &\leq (C_{r,\alpha} + 2C_{s,\alpha}) |y_1 - y_2|^\alpha + \sqrt{2}C_{C^1} \left| \int_{s_1}^{s_2} \ddot{c}(\tau) d\tau \right| \\ &\leq (C_{r,\alpha} + 2C_{s,\alpha}) |y_1 - y_2|^\alpha + \sqrt{2}C_{C^1} S_{\mathcal{K}} |s_1 - s_2| \\ &\leq [(C_{r,\alpha} + 2C_{s,\alpha})(1 + C_s)^\alpha + \sqrt{2}C_{C^1} S_{\mathcal{K}} C_s] |x_1 - x_2|^\alpha. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich die Schranke für u_{x^2} mit gleicher Konstante, also insgesamt für $x_1, x_2 \in \Omega_{0 \leq \text{dist} \leq \varepsilon/4}$ beliebig und $k \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} |u_{x^k}(x_1) - u_{x^k}(x_2)| &\leq \max \left\{ 2C_{C^1} \left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^\alpha, (C_{r,\alpha} + 2C_{s,\alpha})(1 + C_s)^\alpha + \sqrt{2}C_{C^1} S_{\mathcal{K}} C_s \right\} |x_1 - x_2|^\alpha \\ &=: C_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha. \end{aligned}$$

SCHRITT 4: Globale Hölderschranken. Es seien $x_1, x_2 \in \bar{\Omega}$ beliebig, aber fest, gegeben. Ist $|x_1 - x_2| \geq \varepsilon/8$ und $k \in \{1, 2\}$, dann ergibt sich

$$|u_{x^k}(x_1) - u_{x^k}(x_2)| \leq 2C_{C^1} \leq 2C_{C^1} \left(\frac{8}{\varepsilon} \right)^{\min\{\alpha, \beta\}} |x_1 - x_2|^{\min\{\alpha, \beta\}}.$$

Also seien $|x_1 - x_2| \leq \varepsilon/8$. Offenbar sind entweder $x_1, x_2 \in \Omega_{\varepsilon/8 \leq \text{dist} < \infty}$ und damit

$$|u_{x^k}(x_1) - u_{x^k}(x_2)| \leq C_{I,\beta} |x_1 - x_2|^\beta \leq C_{I,\beta} |x_1 - x_2|^{\min\{\alpha, \beta\}},$$

oder $x_1, x_2 \in \Omega_{0 \leq \text{dist} \leq \varepsilon/4}$ und damit

$$|u_{x^k}(x_1) - u_{x^k}(x_2)| \leq C_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \leq C_\alpha |x_1 - x_2|^{\min\{\alpha, \beta\}}.$$

Insgesamt ergibt sich die Schranke

$$\|u\|_{C^{1,\min\{\alpha,\beta\}}(\bar{\Omega})} \leq C_{C^0} + \sqrt{2}C_{C^1} + 2 \max\{C_{I,\beta}, C_\alpha\}.$$

□

Bemerkung 7. Es seien ein Radius ρ und ein $\sigma \in (0, 1)$ gegeben. Gesucht ist, wie im Beweis von Satz 3 verwendet, eine Funktion $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ so, dass

$$\text{supp } \zeta \subset B_\rho(0), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \zeta|_{B_{\rho-\sigma\rho}(0)} \equiv 1, \quad |\nabla \zeta| \leq \frac{3}{\sigma\rho}.$$

Die Idee ist es, die Funktion

$$\tilde{\zeta} \in W_0^{1,2}(\mathbb{R}^2), \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & , \quad |x| < \rho - \frac{2}{3}\sigma\rho \\ \frac{3}{\sigma\rho}(\rho - \frac{1}{3}\sigma\rho - |x|) & , \quad \rho - \frac{2}{3}\sigma\rho \leq |x| \leq \rho - \frac{1}{3}\sigma\rho \\ 0 & , \quad \rho - \frac{1}{3}\sigma\rho < |x| \end{cases}$$

mit einem Glättungskern hinreichend kleinen Trägers zu falten. Details zu Glättungskernen und Faltung finden sich beispielsweise in [Alt06].

Es sei

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad x \mapsto \begin{cases} c \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad 1 \leq |x| \end{cases},$$

wobei $c > 0$ so gewählt sei, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) dx = 1.$$

Ferner sei $\tilde{\varphi} := 36(\sigma\rho)^{-2}\varphi(6(\sigma\rho)^{-1}x)$. Es ist $\text{supp } \tilde{\varphi} = \overline{B_{\sigma\rho/6}(0)}$ und

$$\zeta := \tilde{\zeta} * \tilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

ζ erfüllt die gewünschten Eigenschaften: Für $x \in B_{\rho-\sigma\rho}(0)$ ist

$$\zeta(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\varphi}(x-y)\tilde{\zeta}(y)dy = \int_{B_{\frac{\sigma\rho}{6}}(x)} \tilde{\varphi}(x-y)\tilde{\zeta}(y)dy = \int_{B_{\frac{\sigma\rho}{6}}(x)} \tilde{\varphi}(x-y)dy = 1.$$

Analog sind $\zeta(x) = 0$ für $|x| > \rho - \frac{1}{6}\sigma\rho$ und $0 \leq \zeta \leq 1$. Wegen $\zeta_{x^i} = \tilde{\zeta}_{x^i} * \tilde{\varphi}$, $i \in \{1, 2\}$, ist außerdem $|\nabla \zeta| \leq 3/(\sigma\rho)$. Damit ist ζ eine geeignete Abschmierfunktion.

IV. EXISTENZ UND REGULARITÄT

Nachdem nun $C^{1,\alpha}$ -a-priori-Abschätzungen für die Lösungen von (1)∧(2) gezeigt sind, wäre es wünschenswert das Problem mittels linearer Theorie und Schauderschem Fixpunktsatz zu lösen und so Existenz und maximale Regularität zu gewinnen. Im Gegensatz zu den Koeffizienten der Gleichung jedoch scheint es dafür unumgänglich, die höchsten Koeffizienten der Randbedingung (2) in $C^{1,\alpha}$, nicht nur in $C^{0,\alpha}$, zu kontrollieren. Es mussten also andere Zugänge zu diesem Problem gefunden werden.

Ein frühes Resultat (vgl. [Emm73]) stammt von Michele Emmer, der 1973 mittels Variationsmethoden für das Funktional

$$\mathcal{F} : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v|^2} dx + \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} v^2 dx - \int_{\partial\Omega} \cos(\gamma) v dS(x)$$

zeigen konnte, dass für lokal Lipschitz-berandete Gebiete mit Lipschitzkonstante L und $\cos(\gamma) < 1/\sqrt{1+L^2}$ Lösungen für (1)∧(2) im schwachen Sinne existieren. Im Fall von C^1 -berandeten Gebieten entfällt die Kleinheitsbedingung an $\cos(\gamma)$ (vgl. [Emm73, S. 2, 2]).

Einen ersten klassischen Zugang fand Nina Nikolaevna Ural'tseva, die für konvexe Grundgebiete Ω und $\gamma \in (0, \pi/2]$ die Existenz von $C^2(\bar{\Omega})$ -Lösungen zeigen konnte (vgl. [SS76, S. 19]).

1975 gelang es Joel Spruck auf einem anderen Weg auf die Konvexität zu verzichten und eine höhere Regularität zu gewinnen (vgl. [Spr75]). Angeregt von Leon Melvin Simon regularisierte er zunächst das Problem durch vom Störparameter $\zeta \geq 0$ abhängige Störterme elliptisch zu

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\left[\zeta + \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right] \nabla u \right) = \kappa u & , \quad \text{in } \Omega \\ \left[\zeta + \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right] \nabla u \cdot \nu = \cos(\gamma) & , \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases} .$$

Der Vorteil der gestörten Probleme ist die für $\zeta > 0$ neu gewonnene Gleichmäßigkeit der Elliptizität. Für solche Probleme steht durch [LU68a, Chapter 10] ein umfangreicher Werkzeugkasten zur Verfügung, sodass es ihm reichte, von ζ unabhängige C^1 -Schranken zu finden. Es gelang ihm für C^4 -berandete beschränkte Gebiete und $\gamma \in (0, \pi/2]$ die Existenz von $C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$ -Lösungen zu zeigen. Im Fall $\gamma = 0$ wies er außerdem die Existenz von $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ -Lösungen nach. Sprucks Resultat soll für die spätere Verwendung festgehalten werden:

Satz 4. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein C^4 -berandetes und beschränktes Gebiet mit äußerer Normale $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$ und $\kappa > 0$.*

Ist $\gamma \in (0, \pi/2]$, so existiert ein $\alpha = \alpha(\Omega, \kappa, \gamma) \in (0, 1)$ und genau eine $C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$ -Lösung des dazugehörigen Kapillaritätsproblems (1)∧(2).

Ist $\gamma = 0$, so existiert genau eine $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ -Lösung des dazugehörigen Kapillaritätsproblems (1)∧(2) in dem Sinne, dass für eine Nullfolge $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ eine Folge von zugehörigen Lösungen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ für $\gamma = 0$ konvergiert.

Beweis. Die Aussage des Satzes entspricht für $\kappa = 1$ dem Inhalt von [Spr75, Theorem 3.3].

Für $\kappa > 0$ beliebig folgt die Aussage mit einer analogen Vorgehensweise wie in [Spr75], aber auch durch ein einfaches Skalierungsargument: Dazu wähle man

$$\Omega_\kappa := \sqrt{\kappa}\Omega = \{\sqrt{\kappa}x : x \in \Omega\}.$$

Offenbar ist auch $\Omega_\kappa \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und C^4 -berandetes Gebiet; es bezeichne $\nu_\kappa : \partial\Omega_\kappa \rightarrow \mathbb{S}^1$ die äußere Normale. Für $x \in \partial\Omega$ existiert eine lokale Darstellung des Randes durch ein $\varepsilon > 0$ und ein nach Bogenlänge parametrisiertes $c \in C^4((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R}^2)$ mit $c(0) = x$ und $(-\dot{c}^2(0), \dot{c}^1(0))^T = -\nu(x)$. Die Kurve

$$c_\kappa \in C^4((-\sqrt{\kappa}\varepsilon, \sqrt{\kappa}\varepsilon); \mathbb{R}^2), \quad s \mapsto \sqrt{\kappa}c\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}s\right)$$

ist ebenfalls nach Bogenlänge parametrisiert und erfüllt $c_\kappa(0) = \sqrt{\kappa}x$ und $(-\dot{c}_\kappa^2(0), \dot{c}_\kappa^1(0))^T = -\nu_\kappa(\sqrt{\kappa}x)$, sodass

$$\nu_\kappa(\sqrt{\kappa}x) = \begin{pmatrix} \dot{c}_\kappa^2(0) \\ -\dot{c}_\kappa^1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{c}^2(0) \\ -\dot{c}^1(0) \end{pmatrix} = \nu(x).$$

Es sei nun u_κ die Lösung von

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_\kappa}{\sqrt{1 + |\nabla u_\kappa|^2}} \right) = u_\kappa, \quad \text{in } \Omega_\kappa, \quad \frac{\nabla u_\kappa \cdot \nu_\kappa}{\sqrt{1 + |\nabla u_\kappa|^2}} = \cos(\gamma), \quad \text{auf } \partial\Omega_\kappa.$$

Es hat nun $u := u_\kappa(\sqrt{\kappa} \cdot) / \sqrt{\kappa}$ über Ω die gleiche Regularität wie u_κ über Ω_κ und erfüllt außerdem für $x \in \Omega$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right) = \sqrt{\kappa} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_\kappa(\sqrt{\kappa}x)}{\sqrt{1 + |\nabla u_\kappa(\sqrt{\kappa}x)|^2}} \right) = \sqrt{\kappa} u_\kappa(\sqrt{\kappa}x) = \kappa u(x)$$

und $x \in \partial\Omega$

$$\frac{\nabla u(x) \cdot \nu(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} = \frac{\nabla u_\kappa(\sqrt{\kappa}x) \cdot \nu_\kappa(\sqrt{\kappa}x)}{\sqrt{1 + |\nabla u_\kappa(\sqrt{\kappa}x)|^2}} = \cos(\gamma).$$

□

Kurz nach Sprucks Veröffentlichung konnten Leon Melvin Simon und Joel Spruck das Resultat auch für eine etwas breitere Klasse von Problemen zugänglich machen (vgl. [SS76]). 1982 stellte Gary M. Lieberman einen Weg zu $C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$ -Lösungen mittels eines Fixpunkt-Arguments von James Caristi (vgl. [Car76] bzw. [Lie82, Lemma 3]) vor und konnte so auf elliptische Regularisierung verzichten (vgl. [Lie82]).

Nachdem für $\gamma \in (0, \pi/2]$ die Existenz von $C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$ gezeigt ist, lässt sich außerdem noch die innere Regularität mittels linearer Theorie und Bootstrapping maximieren.

Korollar 6. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein C^4 -berandetes und beschränktes Gebiet, $\kappa > 0$ und $\gamma \in (0, \pi/2]$. Dann existiert für das zugehörige Kapillaritätsproblem (1) \wedge (2) ein $\alpha \in (0, 1)$ und genau eine Lösung $u \in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$.*

Beweis. Entsprechend Satz 4 existiert genau ein $u \in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$ als Lösung von (1) \wedge (2). Zu $i, j \in \{1, 2\}$ seien

$$\tilde{a}_{ij} := \frac{\delta_{i,j}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} - \frac{u_{x^i} u_{x^j}}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da $|\nabla u|$ auf $\overline{\Omega}$ sein Maximum annimmt, sind die $\tilde{a}_{ij} \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ Koeffizienten eines strikt elliptischen und linearen Operators $u \mapsto \tilde{L}u := \sum_{i,j=1}^2 \tilde{a}_{ij} u_{x^i x^j}$ über Ω (vgl. (8)). Es erfüllt u die lineare Gleichung $\tilde{L}u = \kappa u$ über Ω . Entsprechend [GT01, Theorem 6.17] ist damit sogar $u \in C^{4,\alpha}(\Omega)$, also $\tilde{a}_{ij} \in C^{3,\alpha}(\Omega)$. Eine fortlaufende Wiederholung des Arguments (sog. Bootstrapping) zeigt die Zugehörigkeit von u zu $C^{k,\alpha}(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit ist $u \in C^\infty(\Omega)$. \square

V. KONVEXITÄT

An dieser Stelle sollen bekannte Resultate über die Konvexität kapillarer Oberflächen vorgestellt werden. Im Fall von Kreisgebieten und im Fall strikt konvexer Gebiete mit $\gamma = 0$ wird sich Konvexität feststellen lassen. Interessant ist die Frage, ob es sich dabei um singuläre Phänomene handelt, oder ob bei leichter Störung der Daten die Konvexität der Kapillarflächen erhalten bleiben. Dies wird Inhalt des Abschnitts VI. sein.

RADIALSYMMETRISCHE LÖSUNGEN

Obwohl die Kapillarkwirkung im Alltag in sehr unterschiedlicher Weise zum Tragen kommt – so beim Aufsteigen von Nässe im Mauerwerk, von Wasser in Pflanzen oder von Tinte im Füller – lag es doch aus historischer Sicht nahe, zum besseren Verständnis ihres Wesens, den Fokus zunächst auf den einfachen Fall kreisförmiger Röhren zu legen. Solche Untersuchungen gehen bis zu Leonardo da Vincis (1452–1519) Studien von 1490 zurück und führten nach der Beteiligung einer Reihe bedeutender Wissenschaftler wie Jacques Rohalt (1620–1675), Geminiano Montanari (1633–1687), Giovanni Borelli (1608–1679), Francis Hauksbee (1666–1713), Sir Isaac Newton (1643–1727), Brook Taylor (1685–1731) und James Jurin (1684–1750) schließlich zur ersten präzisen Formulierung des Problems durch Pierre-Simon Laplace (1749–1827) im Jahr 1805 (vgl. [Fin86, Chapter 2], [GWQ03, 2.4.1]).

Es stellte sich heraus, dass für kreisförmige Grundgebiete die Lösung des Problems (1)^(2) radialsymmetrisch wird. Dies erlaubte die Formulierung des Problems als gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{rw'(r)}{\sqrt{1+w'(r)^2}} \right] = \kappa rw(r)$$

mit Randwertvorgaben

$$w'(0) = 0, \quad w'(R) = \cot(\gamma)$$

mit $0 \leq r \leq R$ dem radialen Abstand zum Mittelpunkt des kreisförmigen Grundgebiets mit Radius $R > 0$. Durch diese Umformulierung konnten 1968 William Ernest Johnson und Lawrence M. Perko ohne große Schwierigkeiten die Existenz und andere interessante Eigenschaften der Kapillarfläche zeigen (vgl. [JP68]). 1982 zeigte Frederic Paul Brulois, dass w außerdem absolut monoton und damit insbesondere die korrespondierende kapillare Oberfläche konvex ist (vgl. [Bru82]).

Diese Aussage soll im folgenden Hilfssatz festgehalten werden.

Hilfssatz 6. *Es seien $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $\kappa > 0$ und $\gamma \in (0, \pi/2)$ beliebig gegeben und $\Omega := B_R(x_0)$. Dann ist die dazugehörige Lösung u von (1)^(2) gleichmäßig konvex.*

Beweis. Der Übersichtlichkeit wegen sei o.B.d.A. $x_0 = 0$. Ist $x_0 \in \mathbb{R}^2$ beliebig und u_0 Lösung des Problems über $B_R(0)$, dann ist offenbar $u = u_0(\cdot + x_0)$ die nach Korollar 1 eindeutige Lösung über $B_R(x_0)$. Offenbar ist u genau dann gleichmäßig konvex, wenn auch u_0 gleichmäßig konvex ist, sodass die Untersuchung in $x_0 = 0$ ausreicht.

Der Beweis soll nun in folgenden Schritten vorgenommen werden:

SCHRITT 1: u ist rotationssymmetrisch um 0. Es sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ die Lösung von (1)^(2). Für $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig sei

$$D := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

und damit

$$u_\alpha \in C^2(\bar{\Omega}), \quad u_\alpha(x) := u(Dx)$$

die um den Winkel α gedrehte Lösung u . Nun löst u_α ebenfalls das Problem (1)^(2), da mit $x \in \bar{\Omega}$ und

$$\begin{aligned} u_{\alpha,x^i}(x) &= \sum_{k=1}^2 u_{x^k}(Dx) D_{ki}, \quad i \in \{1, 2\}, \\ u_{\alpha,x^i x^j}(x) &= \sum_{k,l=1}^2 u_{x^k x^l}(Dx) D_{ki} D_{lj}, \quad i, j \in \{1, 2\}, \\ |\nabla u_\alpha(x)|^2 &= \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^2 u_{x^k}(Dx) D_{ki} \right)^2 \\ &= \sum_{k,l=1}^2 u_{x^k}(Dx) u_{x^l}(Dx) (D_{k1} D_{l1} + D_{k2} D_{l2}) \\ &= u_{x^1}(Dx)^2 + u_{x^2}(Dx)^2 = |\nabla u(Dx)|^2, \\ \Delta u_\alpha(x) &= \sum_{k,l=1}^2 u_{x^k x^l}(Dx) (D_{k1} D_{l1} + D_{k2} D_{l2}) \\ &= u_{x^1 x^1}(Dx) + u_{x^2 x^2}(Dx) = \Delta u(Dx), \\ \sum_{i,j=1}^2 u_{\alpha,x^i}(x) u_{\alpha,x^j}(x) u_{\alpha,x^i x^j}(x) &= \sum_{k,l,m,n=1}^2 u_{x^k}(Dx) u_{x^l}(Dx) u_{x^m x^n}(Dx) \sum_{i=1}^2 D_{ki} D_{mi} \sum_{j=1}^2 D_{lj} D_{nj} \\ &= \sum_{k,l,m,n=1}^2 u_{x^k}(Dx) u_{x^l}(Dx) u_{x^m x^n}(Dx) \delta_{m,k} \delta_{l,n} \\ &= \sum_{k,l=1}^2 u_{x^k}(Dx) u_{x^l}(Dx) u_{x^k x^l}(Dx) \end{aligned}$$

gerade

$$\begin{aligned} \kappa u_\alpha(x) &= \kappa u(Dx) = \frac{\Delta u(Dx)}{\sqrt{1 + |\nabla u(Dx)|^2}} - \frac{\sum_{i,j=1}^2 u_{x^i}(Dx) u_{x^j}(Dx)}{(1 + |\nabla u(Dx)|^2)^{\frac{3}{2}}} u_{x^i x^j}(Dx) \\ &= \frac{\Delta u_\alpha(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u_\alpha(x)|^2}} - \frac{\sum_{i,j=1}^2 u_{\alpha,x^i}(x) u_{\alpha,x^j}(x)}{(1 + |\nabla u_\alpha(x)|^2)^{\frac{3}{2}}} u_{\alpha,x^i x^j}(x), \end{aligned}$$

gilt, und ebenfalls für $x \in \partial\Omega$, mittels D orthogonal und $\nu = \text{Id}/R$,

$$\frac{\nabla u_\alpha(x) \cdot \nu(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u_\alpha(x)|^2}} = \frac{D^T \nabla u(Dx) \cdot \nu(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(Dx)|^2}} = \frac{\nabla u(Dx) \cdot D\nu(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(Dx)|^2}} = \frac{\nabla u(Dx) \cdot \nu(Dx)}{\sqrt{1 + |\nabla u(Dx)|^2}} = \cos(\gamma)$$

gilt. Wegen der Eindeutigkeit nach Korollar 1 ist also $u = u_\alpha$.

SCHRITT 2: Gleichung in $w = u(\cdot, 0)$. Ist $0 < r < R$ beliebig gegeben, so sind

$$\begin{aligned} u(r, 0) &= w(r), \\ u_{x^1}(r, 0) &= w'(r), \\ u_{x^2}(r, 0) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(r, \tau) - u(r, -\tau)}{2\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} 0 = 0, \\ u_{x^1 x^1}(r, 0) &= w''(r), \\ u_{x^2 x^2}(r, 0) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u_{x^2}(r, \tau) - u_{x^2}(r, 0)}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{u(r, \tau + \zeta) - u(r, \tau - \zeta)}{2\zeta} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{u(\sqrt{r^2 + (\tau + \zeta)^2}, 0) - u(\sqrt{r^2 + (\tau - \zeta)^2}, 0)}{2\zeta} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\tau} w(\sqrt{r^2 + \tau^2}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} w'(\sqrt{r^2 + \tau^2}) \frac{\tau}{\sqrt{r^2 + \tau^2}} \\ &= \frac{1}{r} w'(r), \end{aligned}$$

und damit auf $(0, R]$ die Gleichung

$$\begin{aligned} r\kappa w(r) &= r\kappa u(r, 0) = r \frac{\Delta u(r, 0)}{\sqrt{1 + |\nabla u(r, 0)|^2}} - r \frac{\sum_{i,j=1}^2 u_{x^i}(r, 0) u_{x^j}(r, 0)}{(1 + |\nabla u(r, 0)|^2)^{\frac{3}{2}}} u_{x^i x^j}(r, 0) \\ &= r \frac{w''(r) + \frac{w'(r)}{r}}{\sqrt{1 + w'(r)^2}} - r \frac{w'(r)^2}{(1 + w'(r)^2)^{\frac{3}{2}}} w''(r) = \frac{d}{dr} \left[r \frac{w'(r)}{\sqrt{1 + w'(r)^2}} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

erfüllt.

SCHRITT 3: $w'' > 0$. Aus der Gleichung (39) ergibt sich durch Integration für $r \in (0, R]$

$$r \frac{w'(r)}{\sqrt{1 + w'(r)^2}} = \kappa \int_0^r \tau w(\tau) d\tau. \quad (40)$$

Da $\gamma \in (0, \pi/2)$ und damit $u \not\equiv 0$ ist, gilt nach Korollar 2, dass stets $w > 0$ ist. Insbesondere ist damit nach (40) $w' > 0$ für $r \in (0, R]$, sodass w in 0 – und damit u in x_0 – strikt minimal wird. Nun ergibt sich für $r \in (0, R]$ durch partielle Integration in (40)

$$\frac{w'(r)}{\sqrt{1 + w'(r)^2}} = \frac{1}{r} \kappa \int_0^r \tau w(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \kappa r w(r) - \frac{1}{r} \kappa \int_0^r \frac{\tau^2}{2} w'(\tau) d\tau < \frac{1}{2} \kappa r w(r). \quad (41)$$

Somit ist nach (39) und (41) für $r \in (0, R]$

$$\begin{aligned} \kappa r w(r) &= r \left(\frac{1}{\sqrt{1+w'(r)^2}} - \frac{w'(r)^2}{(1+w'(r)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) w''(r) + \frac{w'(r)}{\sqrt{1+w'(r)^2}} \\ &= \frac{r}{(1+w'(r)^2)^{\frac{3}{2}}} w''(r) + \frac{w'(r)}{\sqrt{1+w'(r)^2}} < \frac{r}{(1+w'(r)^2)^{\frac{3}{2}}} w''(r) + \frac{1}{2} \kappa r w(r). \end{aligned}$$

Wegen $w > 0$ ergibt sich so für $r \in (0, R]$, dass $w''(r) > 0$ ist.

SCHRITT 4: u ist gleichmäßig konvex. Da u in 0 wie oben erwähnt ein striktes Minimum annimmt, ist es dort auch strikt konvex. Durch die Wahl von w ist gerade $u = w(|\cdot|)$ und damit für $\bar{\Omega} \ni x \neq 0$ und $\mathbb{R}^2 \ni \xi \neq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 u_{x^i x^j}(x) \xi^i \xi^j &= \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{x^i x^j}{|x|^2} w''(|x|) + \frac{\delta_{i,j}}{|x|} w'(|x|) - \frac{x^i x^j}{|x|^3} w'(|x|) \right) \xi^i \xi^j \\ &= \left[\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \xi \right]^2 \underbrace{\frac{w''(|x|)}{|x|^2}}_{>0} + \left[\begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \end{pmatrix} \cdot \xi \right]^2 \underbrace{\frac{w'(|x|)}{|x|^3}}_{>0} > 0. \end{aligned}$$

Also ist u auch in $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$ strikt konvex, insgesamt also auf ganz $\bar{\Omega}$. Wegen dessen Kompaktheit ist u damit sogar gleichmäßig konvex. \square

Bemerkung 8. Im Fall $\gamma = \pi/2$ ist $u \equiv 0$, also nur konvex, nicht strikt konvex. Der Fall $\gamma = 0$ hat in Fragen Konvexität eine Sonderstellung (vgl. Satz 5).

$\gamma = 0$ ÜBER STRIKT KONVEXEN GEBIETEN

Für den Fall, dass die Kapillarfläche die Kapillare tangential berührt und Ω strikt konvex ist, zeigte Nicholas Korevaar 1983 die Notwendigkeit von Konvexität (vgl. [Kor83]).

Satz 5. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein C^1 -berandetes, beschränktes und strikt konvexes Gebiet, $\kappa > 0$ und $\gamma = 0$. Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ eine Lösung des dazugehörigen Kapillaritätsproblems (1) \wedge (2), dann ist u konvex.*

Beweis. Der Satz ist ein Spezialfall von [Kor83, Corollary 1.3]. \square

FÄLLE VON NICHT-KONVEXITÄT

Während in den Fällen $\gamma = 0$ und $\gamma = \pi/2$ stets Konvexität vorliegt, lässt sich für kein anderes $\gamma \in (0, \pi/2)$ ein solch allgemeines Resultat finden. Das konnte Nicholas Korevaar ebenfalls 1983 mit der Konstruktion von geeigneten Gegenbeispielen zeigen (vgl. [Kor83]).

Satz 6. *Es seien $\kappa > 0$ und $\gamma \in (0, \pi/2)$. Dann existiert ein C^4 -berandetes und beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ so, dass die Lösung $u \in C^3(\bar{\Omega})$ des zugehörigen Kapillaritätsproblems (1) \wedge (2) nicht konvex ist.*

Beweis. Die Konstruktion eines solchen Ω findet sich in [Kor83, 2]. □

Bemerkung 9. Entsprechend der Konstruktion aus [Kor83], kann das Gebiet Ω in Satz 6 strikt konvex und symmetrisch zur x^1 -Achse gewählt werden.

Es bleibt offen, wie man die Klasse von Gebieten, über denen Kapillarflächen konvex werden, beschreiben kann. Korevaar stellt am Ende seiner Arbeit die sich aufdrängenden, aber bisher nur unzureichend beantworteten, Fragen: Ist es möglich, allgemeinere Bedingungen an γ , κ und $\partial\Omega$ so vorzugeben, dass die Kapillarfläche über Ω konvex wird? Ist es richtig, dass Level Sets von Lösungen des Kapillaritätsproblems über konvexen Grundgebieten konvexe Mengen einschließen, selbst wenn die Kapillarfläche nicht konvex ist?

VI. STÖRUNGSRESULTAT

Die strikte Konvexität von Kapillarflächen über Kreisgebieten ist kein singuläres Phänomen. Um diese Aussage zu bestätigen, wird in diesem Abschnitt eine gewisse stetige Abhängigkeit der zweiten Ableitungen vom Grundgebiet formuliert. Zum Variieren eines Grundgebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wird, für einen Umgebungsparameter $\mu > 0$, die Menge der C^4 -Diffeomorphismen über der μ -Umgebung

$$\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) < \mu\}$$

herangezogen; sie werde bezeichnet als

$$\mathcal{D} := \{\Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv}, \mathcal{V}_\Phi := \Phi(\mathcal{U}), \Phi^{-1} \in C^4(\mathcal{V}_\Phi; \mathbb{R}^2)\}.$$

Es bildet für $\Phi \in \mathcal{D}$ die Menge $\Omega_\Phi := \Phi(\Omega)$ ein neues Grundgebiet. Der Unterschied zwischen Ω und Ω_Φ wird dann naheliegenderweise durch $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)}$ gemessen. Zur angenehmeren Lesbarkeit der Beweise sollen die Grundgebiete stets von nur einer Randkomponente begrenzt werden. Prinzipiell steht der Wiederholung eines Stabilitätsresultats wie Korollar 9, mit endlich vielen Randkomponenten, also über beliebigen C^4 -Gebieten, nichts im Weg.

Mittels der Formulierung einer gleichmäßigen inneren und äußeren Kugelbedingung werden gleichmäßige C^1 - und $C^{1,\alpha}$ -a-priori-Schranken gewonnen. Deren Explizitheit muss im letzten Schritt für ein Widerspruchsargument aufgegeben werden. Dafür können $C^{2,\beta}$ -Konvergenz und insbesondere das gewünschte Störungsresultat gezeigt werden.

Die folgenden Hilfssätze sollen die technischen Grundlagen für die Arbeit über variierten Grundgebieten schaffen.

Hilfssatz 7. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $\mu > 0$. Dazu seien*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) < \mu\}, \\ \mathcal{D} &:= \{\Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv}, \mathcal{V}_\Phi := \Phi(\mathcal{U}), \Phi^{-1} \in C^4(\mathcal{V}_\Phi; \mathbb{R}^2)\}. \end{aligned}$$

Dann existieren ein $\delta = \delta(\Omega, \mu)$ und ein $C = C(\Omega, \mu)$ so, dass

$$\forall \Phi \in \mathcal{D} : \quad \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} < \delta \quad \Rightarrow \quad \max\left\{\|\Phi\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)}, \|\Phi^{-1}\|_{C^4(\mathcal{V}_\Phi; \mathbb{R}^2)}\right\} < C$$

und, im Sinne $B_\delta(\text{Id}) := \{\Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} < \delta\}$,

$$\{\Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv}\} \cap B_\delta(\text{Id}) = \mathcal{D} \cap B_\delta(\text{Id}).$$

Ist $\bar{\mathcal{U}}$ konvex, so existiert ein $\delta = \delta(\Omega, \mu)$ so, dass

$$\forall \Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \quad \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} < \delta \quad \Rightarrow \quad \Phi \in \mathcal{D}.$$

Beweis. Es seien $\Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)$ injektiv und $\mathcal{J}_\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die jeweiligen Jacobi-Matrizen von Φ . Da die Determinante einer Matrix eine stetige Funktion der Matrixeinträge ist, kann man ein $1 > \delta > 0$

so wählen, dass für $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} < \delta$ und alle $x \in \mathcal{U}$ die Determinante $\det(\mathcal{J}_\Phi(x)) > 1/2$ ist. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung ist damit insbesondere

$$\{\Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv}\} \cap B_\delta(\text{Id}) = \mathcal{D} \cap B_\delta(\text{Id}).$$

Es sei nun $\Phi \in \mathcal{D} \cap B_\delta(\text{Id})$. Da $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} < \delta < 1$, ist schon

$$\|\Phi\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} \leq \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} + \|\text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} < 1 + \max\{|x| : x \in \bar{\mathcal{U}}\} + 1 =: C_1(\Omega, \mu).$$

Weiterhin ist

$$\|\Phi^{-1}\|_{C^0(\bar{\mathcal{V}}_\Phi; \mathbb{R}^2)} \leq \max\{|x| : x \in \bar{\mathcal{U}}\} < C_1.$$

Auch die Ableitungen von Φ^{-1} lassen sich im Wesentlichen durch C_1 beschränken: Es seien dazu $\mathcal{J}_\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{J}_{\Phi^{-1}} : \mathcal{V}_\Phi \rightarrow \mathbb{R}^2$ die jeweiligen Jacobi-Matrizen von Φ und Φ^{-1} . Entsprechend des Satzes von der Umkehrabbildung ist

$$\forall x \in \mathcal{V}_\Phi : \mathcal{J}_{\Phi^{-1}}(x) = (\mathcal{J}_\Phi(\Phi^{-1}(x)))^{-1}.$$

Da mit der Wahl von δ die Jacobi-Determinante $\det(\mathcal{J}_\Phi) > 1/2$ ist, kann man entsprechend der Adjunktenformel ein $C_2 = C_2(C_1)$ so wählen, dass die Einträge von $\mathcal{J}_{\Phi^{-1}}$ überall durch C_2 beschränkt sind. Entsprechend sind auch höhere Ableitungen von Φ^{-1} rationale Funktionen von Ableitungen von Φ (mit nach unten beschränktem Nenner), sodass sich insgesamt ein $C = C(\Omega, \mu)$ so findet, dass $\|\Phi^{-1}\|_{C^4(\bar{\mathcal{V}}_\Phi; \mathbb{R}^2)} < C$. Damit sind die ersten Aussagen bewiesen.

Es verbleibt nun zu zeigen, dass für ein $\Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)$, mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)}$ klein genug und $\bar{\mathcal{U}}$ konvex die Abbildung Φ injektiv wird. Es werde angenommen, es gäbe eine Folge $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C^1(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)$ so, dass $\Phi_k \rightarrow \text{Id}$ in $C^1(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)$, aber $x_k \neq y_k$ in $\bar{\mathcal{U}}$ so existieren, dass $\Phi_k(x_k) = \Phi_k(y_k)$. Da $\bar{\mathcal{U}}$ kompakt ist, konvergieren die Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, nach Auswahl einer Teilfolge, gegen $x \in \bar{\mathcal{U}}$ und $y \in \bar{\mathcal{U}}$. Offenbar ist

$$\begin{aligned} |x - y| &= \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y_k| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} (|\text{Id}(x_k) - \Phi_k(x_k)| + |\Phi_k(x_k) - \Phi_k(y_k)| + |\Phi_k(y_k) - \text{Id}(y_k)|) \\ &\leq 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi_k - \text{Id}\|_{C^0(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} = 0, \end{aligned}$$

also $x = y$. Da $\bar{\mathcal{U}}$ konvex ist, liegt für hinreichend große k die Konvexverbindung

$$\{z_k(\lambda) := x_k + \lambda(y_k - x_k) : \lambda \in [0, 1]\}$$

vollständig in $\bar{\mathcal{U}}$. Dadurch ist

$$\forall l \in \{1, 2\} : \Phi_k^l(y_k) = \Phi_k^l(x_k) + \int_0^1 \nabla \Phi_k^l(z_k(\lambda)) \cdot \frac{y_k - x_k}{|y_k - x_k|} d\lambda,$$

also wegen $\Phi_k(x_k) = \Phi_k(y_k)$

$$\forall l \in \{1, 2\} : 0 = \int_0^1 (\nabla \Phi_k^l(z_k(\lambda)) - e_l) \cdot \frac{y_k - x_k}{|y_k - x_k|} d\lambda + \int_0^1 e_l \cdot \frac{y_k - x_k}{|y_k - x_k|} d\lambda,$$

wobei $e_1 := (1, 0)^T = \nabla \text{Id}^1$ und $e_2 := (0, 1)^T = \nabla \text{Id}^2$. Damit wird für $l \in \{1, 2\}$

$$e_l \cdot \frac{y_k - x_k}{|y_k - x_k|} = \int_0^1 (e_l - \nabla \Phi_k^l(z_k(\lambda))) \cdot \frac{y_k - x_k}{|y_k - x_k|} d\lambda \leq 2 \|\Phi_k - \text{Id}\|_{C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}.$$

Damit ist nach dem Satz des Pythagoras

$$1 = \left| \frac{y_k - x_k}{|y_k - x_k|} \right|^2 = \left| e_1 \cdot \frac{y_k - x_k}{|y_k - x_k|} \right|^2 + \left| e_2 \cdot \frac{y_k - x_k}{|y_k - x_k|} \right|^2 \leq 8 \|\Phi_k - \text{Id}\|_{C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}^2,$$

ein Widerspruch für k hinreichend groß. □

Hilfssatz 8. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $\mu > 0$. Dazu seien*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) < \mu\}, \\ \mathcal{D} &:= \{\Phi \in C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv}, \mathcal{V}_\Phi := \Phi(\mathcal{U}), \Phi^{-1} \in C^4(\mathcal{V}_\Phi; \mathbb{R}^2)\}. \end{aligned}$$

Ist $\Phi \in \mathcal{D}$ und $\mathcal{J}_\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\mathcal{J}_{\Phi^{-1}} : \mathcal{V}_\Phi \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die jeweiligen Jacobi-Matrizen von Φ und Φ^{-1} , dann sind diese überall invertierbar.

Beweis. Für $x \in \mathcal{U}$ ist nach Kettenregel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{J}_{\Phi^{-1} \circ \Phi}(x) = \mathcal{J}_{\Phi^{-1}}(\Phi(x)) \mathcal{J}_\Phi(x),$$

insbesondere $\mathcal{J}_\Phi(x)$ invertierbar. Für $x \in \mathcal{V}_\Phi$ ist nach Kettenregel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{J}_{\Phi \circ \Phi^{-1}}(x) = \mathcal{J}_\Phi(\Phi^{-1}(x)) \mathcal{J}_{\Phi^{-1}}(x),$$

insbesondere $\mathcal{J}_{\Phi^{-1}}(x)$ invertierbar. □

Hilfssatz 9. *Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes, beschränktes und C^4 -berandetes Gebiet mit nach Bogenlänge parametrisierter Randkurve $c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ und $\mu > 0$. Dazu seien*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) < \mu\}, \\ \mathcal{D} &:= \{\Phi \in C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv}, \mathcal{V}_\Phi := \Phi(\mathcal{U}), \Phi^{-1} \in C^4(\mathcal{V}_\Phi; \mathbb{R}^2)\}. \end{aligned}$$

Für beliebiges $\Phi \in \mathcal{D}$ ist $\Omega_\Phi := \Phi(\Omega)$ ein beschränktes und C^4 -berandetes Gebiet. Die Kurve $c_\Phi := \Phi \circ c$ erfüllt $c_\Phi \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, $c_\Phi(\mathbb{R}) = \partial\Omega_\Phi$ und $\dot{c}_\Phi(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Beweis. Zunächst gilt nach Kettenregel sofort, dass $c_\Phi \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ ist und dass entsprechend Hilfssatz 8

$$\dot{c}_\Phi = (\Phi \circ c)' = (\mathcal{J}_\Phi \circ c) \dot{c} \neq 0.$$

Es ist Φ^{-1} stetig und mit Ω somit auch $\Omega_\Phi = \Phi(\Omega)$ offen; weiter ist $\Omega_\Phi \neq \emptyset$. Auch Ω_Φ ist zusammenhängend, denn angenommen, es gäbe zwei offene Mengen $O_1 \neq \emptyset$ und $O_2 \neq \emptyset$ so, dass $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ und $\Omega_\Phi = O_1 \cup O_2$, dann wären wegen der Stetigkeit von Φ auch $\tilde{O}_1 = \Phi^{-1}(O_1)$ und $\tilde{O}_2 = \Phi^{-1}(O_2)$ offen. Wegen der Bijektivität von $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}_\Phi$ wären $\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2 = \emptyset$, $\tilde{O}_1 \neq \emptyset$, $\tilde{O}_2 \neq \emptyset$ und $\Omega = \tilde{O}_1 \cup \tilde{O}_2$. Also wäre Ω nicht zusammenhängend und damit kein Gebiet, ein Widerspruch. Insgesamt ist also auch Ω_Φ ein Gebiet in \mathbb{R}^2 . Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, ist wegen der Stetigkeit von Φ auch $\Phi(\bar{\Omega}) \supset \Omega_\Phi$ kompakt und damit insbesondere beschränkt. Also ist Ω_Φ sogar ein beschränktes Gebiet.

Es sei nun ein $p \in \partial\Omega_\Phi$ gegeben. Dann gibt es Folgen

$$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Omega_\Phi, \quad (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{V}_\Phi \setminus \Omega_\Phi$$

so, dass $a_k \rightarrow p$, $b_k \rightarrow p$ für $k \rightarrow \infty$. Entsprechend der Bijektivität von $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}_\Phi$ gibt es dazugehörige Folgen $(\tilde{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ und $(\tilde{b}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ so, dass $a_k = \Phi(\tilde{a}_k)$ und $b_k = \Phi(\tilde{b}_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da die a_k aus Ω_Φ sind, müssen wegen der Injektivität von Φ definitionsgemäß die \tilde{a}_k aus Ω sein. Offenbar sind außerdem $\tilde{b}_k \in \mathcal{U} \setminus \Omega$, da ansonsten $b_k \in \Omega_\Phi$ wären. Da Φ^{-1} stetig ist, konvergieren die Folgen $(\tilde{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{b}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen das Urbild von p :

$$\tilde{a}_k = \Phi^{-1}(a_k) \rightarrow \Phi^{-1}(p) =: \tilde{p}, \quad \tilde{b}_k = \Phi^{-1}(b_k) \rightarrow \Phi^{-1}(p) = \tilde{p}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Also ist $\tilde{p} \in \partial\Omega$. Damit gibt es wegen der C^4 -Berandung von Ω eine offene Umgebung $\tilde{U} \subset \mathcal{U}$ von \tilde{p} und eine Funktion $\tilde{g} \in C^4(\tilde{U})$ mit

$$\forall x \in \tilde{U} : \nabla \tilde{g}(x) \neq 0, \quad \tilde{U} \cap \Omega = \{x \in \tilde{U} : \tilde{g}(x) > 0\}.$$

Da Φ^{-1} stetig ist, ist $U := \Phi(\tilde{U})$ wie schon \tilde{U} offen. Weiterhin ist mit $\Phi^{-1} \in C^4$ nach Kettenregel auch $g := \tilde{g} \circ \Phi^{-1} \in C^4(U)$. Es ist für $x \in U$ gerade $g(x) > 0$, genau dann wenn $\tilde{x} := \Phi^{-1}(x) \in \Omega$, also $x \in \Omega_\Phi$. Da entsprechend Hilfssatz 8 die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_{\Phi^{-1}}$ von Φ^{-1} überall invertierbar ist, verschwindet auch der Gradient von g auf U nicht

$$\nabla g = \mathcal{J}_{\Phi^{-1}} \nabla \tilde{g},$$

sodass insgesamt Ω_Φ tatsächlich C^4 -berandet ist.

Außerdem existiert $s \in \mathbb{R}$ mit $c(s) = \tilde{p}$, also auch $c_\Phi(s) = \Phi(c(s)) = \Phi(\tilde{p}) = p$; also ist auch $c_\Phi(\mathbb{R}) = \partial\Omega_\Phi$. \square

Der folgende Hilfssatz ist Inhalt der Aufgabe [Bär10, Aufgabe 2.10].

Hilfssatz 10. *Es sei Ω ein C^4 -berandetes Gebiet mit nach Bogenlänge parametrisierter Randkurve $c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ und $\mu > 0$. Dazu seien*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) < \mu\}, \\ \mathcal{D} &:= \{\Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv}, \mathcal{V}_\Phi := \Phi(\mathcal{U}), \Phi^{-1} \in C^4(\mathcal{V}_\Phi; \mathbb{R}^2)\}. \end{aligned}$$

Es sei $\Phi \in \mathcal{D}$ und die Randkrümmung der i.A. nicht mehr nach Bogenlänge parametrisierten Kurve

$c_\Phi := \Phi \circ c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ mit $\mathcal{K}_\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ bezeichnet. Dann ist \mathcal{K}_Φ für $s \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{K}_\Phi(s) = \frac{\det((\dot{c}_\Phi(s), \ddot{c}_\Phi(s)))}{|\dot{c}_\Phi(s)|^3}.$$

Beweis. Es sei $\varphi \in C^4(\mathbb{R})$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation von c_Φ so, dass $\tilde{c}_\Phi := c_\Phi \circ \varphi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist (vgl. [Bär10, Proposition 2.1.13]). Dazu ist die Krümmung $\tilde{\mathcal{K}}_\Phi$ wie üblich gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \ddot{\tilde{c}}_\Phi^1 \\ \ddot{\tilde{c}}_\Phi^2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{K}}_\Phi \begin{pmatrix} -\dot{\tilde{c}}_\Phi^2 \\ \dot{\tilde{c}}_\Phi^1 \end{pmatrix}.$$

Zu zeigen ist nun, dass $\tilde{\mathcal{K}}_\Phi = \mathcal{K}_\Phi \circ \varphi$, d.h.

$$\tilde{\mathcal{K}}_\Phi = \frac{\det((\dot{\tilde{c}}_\Phi \circ \varphi, \ddot{\tilde{c}}_\Phi \circ \varphi))}{|\dot{\tilde{c}}_\Phi \circ \varphi|^3}.$$

Tatsächlich ergibt sich mit Hilfe linearer Algebra

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_\Phi &= \tilde{\mathcal{K}}_\Phi \det \left(\begin{pmatrix} \dot{\tilde{c}}_\Phi^1 & -\dot{\tilde{c}}_\Phi^2 \\ \dot{\tilde{c}}_\Phi^2 & \dot{\tilde{c}}_\Phi^1 \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} \dot{\tilde{c}}_\Phi^1 & \ddot{\tilde{c}}_\Phi^1 \\ \dot{\tilde{c}}_\Phi^2 & \ddot{\tilde{c}}_\Phi^2 \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} \varphi' \dot{c}_\Phi^1 \circ \varphi & \varphi'' \dot{c}_\Phi^1 \circ \varphi + \varphi'^2 \ddot{c}_\Phi^1 \circ \varphi \\ \varphi' \dot{c}_\Phi^2 \circ \varphi & \varphi'' \dot{c}_\Phi^2 \circ \varphi + \varphi'^2 \ddot{c}_\Phi^2 \circ \varphi \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \varphi' \dot{c}_\Phi^1 \circ \varphi & \varphi'^2 \ddot{c}_\Phi^1 \circ \varphi \\ \varphi' \dot{c}_\Phi^2 \circ \varphi & \varphi'^2 \ddot{c}_\Phi^2 \circ \varphi \end{pmatrix} \right) = \varphi'^3 \det((\dot{c}_\Phi \circ \varphi, \ddot{c}_\Phi \circ \varphi)) \\ &= \frac{|\dot{\tilde{c}}_\Phi|^3}{|\dot{c}_\Phi \circ \varphi|^3} \det((\dot{c}_\Phi \circ \varphi, \ddot{c}_\Phi \circ \varphi)) = \frac{\det((\dot{c}_\Phi \circ \varphi, \ddot{c}_\Phi \circ \varphi))}{|\dot{c}_\Phi \circ \varphi|^3}. \end{aligned}$$

□

GLEICHMÄSSIGE A-PRIORI-SCHRANKEN

Um Stabilität unter Gebietsvariation zu erreichen, muss es notwendigerweise gelingen, lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$ -Schranken zu erzeugen. Zunächst wird hierfür das Korollar 4 genutzt, um gleichmäßige C^1 -Schranken über einer Klasse Ω -ähnlicher Gebiete zu formulieren. Kann man gleichmäßige innere und äußere Kugelbedingungen sowie gleichmäßige Schranken an die Randkrümmungen und deren erste und zweite Ableitung formulieren, so wird es, wie im Beweis von Korollar 5, möglich sein, gleichmäßige Voraussetzungen für Korollar 4 und damit gleichmäßige Gradienten-Schranken zu formulieren.

Satz 7. *Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes, beschränktes und C^4 -berandetes Gebiet mit nach Bogenlänge parametrisierter und mathematisch positiv orientierter Randkurve $c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ und $\mu > 0$. Dazu seien*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) < \mu\}, \\ \mathcal{D} &:= \{\Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv}, \mathcal{V}_\Phi := \Phi(\mathcal{U}), \Phi^{-1} \in C^4(\mathcal{V}_\Phi; \mathbb{R}^2)\}. \end{aligned}$$

Dann existiert ein $\delta = \delta(\Omega) > 0$ und ein $R = R(\Omega, \mu) > 0$, sowie Konstanten $S_{\tilde{\mathcal{K}}} = S_{\tilde{\mathcal{K}}}(\Omega)$, $S_{\tilde{\mathcal{K}}'} = S_{\tilde{\mathcal{K}}'}(\Omega)$, $S_{\tilde{\mathcal{K}}''} = S_{\tilde{\mathcal{K}}''}(\Omega) > 0$ so, dass für alle $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} < \delta$ gilt:

Für $\Omega_\Phi := \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ ein, entsprechend Hilfssatz 9, einfach zusammenhängendes, beschränktes und C^4 -berandetes Gebiet und $\tilde{c}_\Phi \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ eine, entsprechend Hilfssatz 3 existierende, nach Bogenlänge parametrisierte und mathematisch positiv orientierte Randkurve von Ω_Φ mit Randkrümmung $\tilde{\mathcal{K}}_\Phi \in C^2(\mathbb{R})$

- (a) erfüllt Ω_Φ eine innere Kugelbedingung mit Radius R und eine äußere Kugelbedingung mit Radius R .
- (b) sind $\sup_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathcal{K}}_\Phi| \leq S_{\tilde{\mathcal{K}}}$, $\sup_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathcal{K}}'_\Phi| \leq S_{\tilde{\mathcal{K}}'}$, $\sup_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathcal{K}}''_\Phi| \leq S_{\tilde{\mathcal{K}}''}$.

Beweis. Für $\Phi \in \mathcal{D}$ wird, wie in den Hilfssätzen 9 und 10, die Ω_Φ -Randkurve $c_\Phi := \Phi \circ c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ mit Krümmung $\mathcal{K}_\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ verwendet; ferner bezeichne $\mathcal{K} := \mathcal{K}_{\text{Id}}$. Zunächst soll gezeigt werden, dass eine von Φ unabhängige Konstante $C = C(\|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)})$ so existiert, dass

$$\|c_\Phi - c\|_{C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} \leq C \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}. \quad (42)$$

Dazu sei festgehalten, dass für $m \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} c_\Phi^m &= \Phi^m \circ c, \\ \dot{c}_\Phi^m &= \sum_{i=1}^2 (\Phi_{x^i}^m \circ c) \dot{c}^i, \\ \ddot{c}_\Phi^m &= \sum_{i=1}^2 (\Phi_{x^i}^m \circ c) \ddot{c}^i + \sum_{i,j=1}^2 (\Phi_{x^i x^j}^m \circ c) \dot{c}^i \dot{c}^j, \\ \dddot{c}_\Phi^m &= \sum_{i=1}^2 (\Phi_{x^i}^m \circ c) \dddot{c}^i + 3 \sum_{i,j=1}^2 (\Phi_{x^i x^j}^m \circ c) \ddot{c}^i \dot{c}^j + \sum_{i,j,k=1}^2 (\Phi_{x^i x^j x^k}^m \circ c) \dot{c}^i \dot{c}^j \dot{c}^k, \\ \ddot{\ddot{c}}_\Phi^m &= \sum_{i=1}^2 (\Phi_{x^i}^m \circ c) \ddot{\ddot{c}}^i + 4 \sum_{i,j=1}^2 (\Phi_{x^i x^j}^m \circ c) \ddot{c}^i \dot{c}^j + 3 \sum_{i,j=1}^2 (\Phi_{x^i x^j}^m \circ c) \ddot{c}^i \dot{c}^j \\ &\quad + 6 \sum_{i,j,k=1}^2 (\Phi_{x^i x^j x^k}^m \circ c) \dot{c}^i \dot{c}^j \dot{c}^k + \sum_{i,j,k,l=1}^2 (\Phi_{x^i x^j x^k x^l}^m \circ c) \dot{c}^i \dot{c}^j \dot{c}^k \dot{c}^l. \end{aligned}$$

Nun sind für $i, j, k, l \in \{1, 2\}$, $m \in \{1, 2\}$ und $x \in \bar{U}$

$$\begin{aligned} |\Phi^m(x) - x^m| &= |\Phi_{x^i}^m(x) - \text{Id}^m(x)| \leq \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}, \\ |\Phi_{x^i}^m(x) - \delta_{m,i}| &= |\Phi_{x^i}^m(x) - \text{Id}_{x^i}^m(x)| \leq \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}, \\ |\Phi_{x^i x^j}^m(x)| &= |\Phi_{x^i x^j}^m(x) - \text{Id}_{x^i x^j}^m(x)| \leq \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}, \\ |\Phi_{x^i x^j x^k}^m(x)| &= |\Phi_{x^i x^j x^k}^m(x) - \text{Id}_{x^i x^j x^k}^m(x)| \leq \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}, \\ |\Phi_{x^i x^j x^k x^l}^m(x)| &= |\Phi_{x^i x^j x^k x^l}^m(x) - \text{Id}_{x^i x^j x^k x^l}^m(x)| \leq \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

(vgl. auch (3)), und damit auf ganz $\partial\Omega$

$$|c_\Phi^m - c^m| = |\Phi^m \circ c - c^m| \leq \sup_{x \in \partial\Omega} |\Phi^m(x) - x^m|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}, \\
|\dot{c}_{\Phi}^m - \dot{c}^m| &= \left| \sum_{i=1}^2 (\Phi_{x^i}^m \circ c) \dot{c}^i - \dot{c}^m \right| = \left| \sum_{i=1}^2 (\Phi_{x^i}^m \circ c - \delta_{m,i}) \dot{c}^i \right| \\
&\leq 2 \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}, \\
|\ddot{c}_{\Phi}^m - \ddot{c}^m| &= \left| \sum_{i=1}^2 (\Phi_{x^i}^m \circ c - \delta_{m,i}) \ddot{c}^i + \sum_{i,j=1}^2 (\Phi_{x^i x^j}^m \circ c) \dot{c}^i \dot{c}^j \right| \\
&\leq \left(2 \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} + 2 \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)}^2 \right) \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}, \\
|\ddot{c}_{\Phi}^m - \ddot{c}^m| &= \left| \sum_{i=1}^2 (\Phi_{x^i}^m \circ c - \delta_{m,i}) \ddot{c}^i + 3 \sum_{i,j=1}^2 (\Phi_{x^i x^j}^m \circ c) \dot{c}^i \dot{c}^j + \sum_{i,j,k=1}^2 (\Phi_{x^i x^j x^k}^m \circ c) \dot{c}^i \dot{c}^j \dot{c}^k \right| \\
&\leq \left(2 \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} + 6 \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)}^2 + 2 \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)}^3 \right) \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}, \\
|\ddot{c}_{\Phi}^m - \ddot{c}^m| &= \left| \sum_{i=1}^2 (\Phi_{x^i}^m \circ c - \delta_{m,i}) \ddot{c}^i + 4 \sum_{i,j=1}^2 (\Phi_{x^i x^j}^m \circ c) \dot{c}^i \dot{c}^j + 3 \sum_{i,j=1}^2 (\Phi_{x^i x^j}^m \circ c) \ddot{c}^i \dot{c}^j \right. \\
&\quad \left. + 6 \sum_{i,j,k=1}^2 (\Phi_{x^i x^j x^k}^m \circ c) \dot{c}^i \dot{c}^j \dot{c}^k + \sum_{i,j,k,l=1}^2 (\Phi_{x^i x^j x^k x^l}^m \circ c) \dot{c}^i \dot{c}^j \dot{c}^k \dot{c}^l \right| \\
&\leq \left(2 \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} + 14 \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)}^2 + 12 \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)}^3 + 2 \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)}^4 \right) \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung ließe sich durch genauere Analyse der Normen deutlich verbessern. Entscheidend ist jedoch, dass tatsächlich ein $C = C(\|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)})$ so existiert, dass die Abschätzung (42) erfüllt wird.

Im zweiten Schritt soll nun gezeigt werden, dass für alle $\hat{\varepsilon} > 0$ ein $\hat{\delta} = \hat{\delta}(\hat{\varepsilon}, \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)}) > 0$ so existiert, dass

$$\forall \Phi \in \mathcal{D} : \quad \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} \leq \hat{\delta} \quad \Rightarrow \quad \|\mathcal{K}_{\Phi} - \mathcal{K}\|_{C^2(\mathbb{R})} \leq \hat{\varepsilon}. \quad (43)$$

Entsprechend Hilfssatz 10 sind

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\Phi}(s) &= \frac{\det((\dot{c}_{\Phi}(s), \ddot{c}_{\Phi}(s)))}{|\dot{c}_{\Phi}(s)|^3} = \frac{\dot{c}_{\Phi}^1(s) \ddot{c}_{\Phi}^2(s) - \dot{c}_{\Phi}^2(s) \ddot{c}_{\Phi}^1(s)}{|\dot{c}_{\Phi}(s)|^3}, \\
\mathcal{K}'_{\Phi}(s) &= \frac{\dot{c}_{\Phi}^1(s) \ddot{c}_{\Phi}^2(s) - \dot{c}_{\Phi}^2(s) \ddot{c}_{\Phi}^1(s)}{|\dot{c}_{\Phi}(s)|^3} - 3 \frac{(\dot{c}_{\Phi}^1(s) \ddot{c}_{\Phi}^2(s) - \dot{c}_{\Phi}^2(s) \ddot{c}_{\Phi}^1(s)) (\dot{c}_{\Phi}^1(s) \dot{c}_{\Phi}^1(s) + \dot{c}_{\Phi}^2(s) \dot{c}_{\Phi}^2(s))}{|\dot{c}_{\Phi}(s)|^5},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\Phi''(s) &= \frac{\ddot{c}_\Phi^1(s)\ddot{c}_\Phi^2(s) + \dot{c}_\Phi^1(s)\ddot{c}_\Phi^2(s) - \dot{c}_\Phi^2(s)\dot{c}_\Phi^1(s) - \dot{c}_\Phi^2(s)\ddot{c}_\Phi^1(s)}{|\dot{c}_\Phi(s)|^3} \\
&\quad - 3 \frac{(\dot{c}_\Phi^1(s)\ddot{c}_\Phi^2(s) - \dot{c}_\Phi^2(s)\dot{c}_\Phi^1(s))(\dot{c}_\Phi^1(s)\dot{c}_\Phi^1(s) + \dot{c}_\Phi^2(s)\ddot{c}_\Phi^2(s))}{|\dot{c}_\Phi(s)|^5} \\
&\quad - 3 \frac{(\dot{c}_\Phi^1(s)\ddot{c}_\Phi^2(s) + \dot{c}_\Phi^1(s)\dot{c}_\Phi^2(s) - \dot{c}_\Phi^2(s)\dot{c}_\Phi^1(s) - \dot{c}_\Phi^2(s)\dot{c}_\Phi^1(s))(\dot{c}_\Phi^1(s)\dot{c}_\Phi^1(s) + \dot{c}_\Phi^2(s)\ddot{c}_\Phi^2(s))}{|\dot{c}_\Phi(s)|^5} \\
&\quad - 3 \frac{(\dot{c}_\Phi^1(s)\ddot{c}_\Phi^2(s) - \dot{c}_\Phi^2(s)\dot{c}_\Phi^1(s))(\dot{c}_\Phi^1(s)\dot{c}_\Phi^1(s) + \dot{c}_\Phi^1(s)\dot{c}_\Phi^1(s) + \dot{c}_\Phi^2(s)\ddot{c}_\Phi^2(s) + \dot{c}_\Phi^2(s)\dot{c}_\Phi^2(s))}{|\dot{c}_\Phi(s)|^5} \\
&\quad + 15 \frac{(\dot{c}_\Phi^1(s)\ddot{c}_\Phi^2(s) - \dot{c}_\Phi^2(s)\dot{c}_\Phi^1(s))(\dot{c}_\Phi^1(s)\dot{c}_\Phi^1(s) + \dot{c}_\Phi^2(s)\ddot{c}_\Phi^2(s))^2}{|\dot{c}_\Phi(s)|^7}.
\end{aligned}$$

Offenbar kann man also stetige Funktionen $f_0, f_1, f_2 \in C^0(\mathbb{R}^8)$ so wählen, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $\Phi \in \mathcal{D}$

$$\mathcal{K}_\Phi(s) = f_0(y_{c_\Phi}(s)), \quad \mathcal{K}'_\Phi(s) = f_1(y_{c_\Phi}(s)), \quad \mathcal{K}''_\Phi(s) = f_2(y_{c_\Phi}(s)),$$

wobei

$$y_{c_\Phi}(s) := (\dot{c}_\Phi^1(s), \dot{c}_\Phi^2(s), \ddot{c}_\Phi^1(s), \ddot{c}_\Phi^2(s), \dot{c}_\Phi^1(s), \dot{c}_\Phi^2(s), \ddot{c}_\Phi^1(s), \ddot{c}_\Phi^2(s))^T \in \mathbb{R}^8.$$

Entsprechend der Periodizität und Differenzierbarkeit von c ist die Menge $S_c := \{y_{c_{\text{id}}}(s) : s \in \mathbb{R}\}$ kompakt in \mathbb{R}^8 . Ist also $\hat{\varepsilon} > 0$ fest, aber beliebig, gewählt, dann existiert ein $\hat{\delta} = \hat{\delta}(\hat{\varepsilon}, C) > 0$ so, dass für alle $y \in S_c$ gilt, dass

$$f_0(B_{2C\hat{\delta}}(y)) \subset B_{\hat{\varepsilon}}(f_0(y)), \quad f_1(B_{2C\hat{\delta}}(y)) \subset B_{\hat{\varepsilon}}(f_1(y)) \quad \text{und} \quad f_2(B_{2C\hat{\delta}}(y)) \subset B_{\hat{\varepsilon}}(f_2(y)). \quad (44)$$

Somit gilt für beliebiges $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} < \hat{\delta}$ wegen (42), dass

$$\forall s \in \mathbb{R} : |y_{c_\Phi}(s) - y_{c_{\text{id}}}(s)| \leq 2\|c_\Phi - c\|_{C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} \leq 2C\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} < 2C\hat{\delta}$$

und damit wegen (44)

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}_\Phi - \mathcal{K}\|_{C^0(\mathbb{R})} &= \sup_{s \in \mathbb{R}} |\mathcal{K}_\Phi(s) - \mathcal{K}(s)| = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f_0(y_{c_\Phi}(s)) - f_0(y_{c_{\text{id}}}(s))| \leq \hat{\varepsilon}, \\
\|\mathcal{K}'_\Phi - \mathcal{K}'\|_{C^0(\mathbb{R})} &= \sup_{s \in \mathbb{R}} |\mathcal{K}'_\Phi(s) - \mathcal{K}'(s)| = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f_1(y_{c_\Phi}(s)) - f_1(y_{c_{\text{id}}}(s))| \leq \hat{\varepsilon}, \\
\|\mathcal{K}''_\Phi - \mathcal{K}''\|_{C^0(\mathbb{R})} &= \sup_{s \in \mathbb{R}} |\mathcal{K}''_\Phi(s) - \mathcal{K}''(s)| = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f_2(y_{c_\Phi}(s)) - f_2(y_{c_{\text{id}}}(s))| \leq \hat{\varepsilon},
\end{aligned}$$

sodass $\hat{\varepsilon}$ und $\hat{\delta} = \hat{\delta}(\hat{\varepsilon}, \|c\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)})$ für (43) geeignet sind.

Nun lassen sich die gewünschten Eigenschaften für die transformierten Gebiete Ω_Φ , wobei $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}$ hinreichend klein sind, zeigen:

- (a) Entsprechend Hilfssatz 3 existiert ein $R_\Omega > 0$ so, dass Ω eine innere und äußere Kugelbedingung mit Radius R_Ω erfüllt.

Zunächst zur gleichmäßigen inneren Kugelbedingung: Es sei $R := R_\Omega/2$ gewählt. Zu jedem s in \mathbb{R} sei der Rand der inneren Kugel mit Radius R_Ω in $c(s)$ als $b_s \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ bezeichnet;

genauer sei entsprechend Hilfssatz 2 für $\xi \in \mathbb{R}$

$$x_{M,s} := c(s) + R_\Omega \begin{pmatrix} -\dot{c}^2(s) \\ \dot{c}^1(s) \end{pmatrix}, \quad b_s(\xi) = x_{M,s} + R_\Omega \begin{pmatrix} \cos(\xi) \\ \sin(\xi) \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist b_s mathematisch positiv orientiert und nach Bogenlänge parametrisiert. Da $\dot{b}_s = \dot{b}_0$, $\ddot{b}_s = \ddot{b}_0$, $\dot{b}_s = \dot{b}_0$ und $\ddot{b}_s = \ddot{b}_0$ für alle $s \in \mathbb{R}$, existiert offenbar eine gleichmäßige Schranke $M_b = M_b(R_\Omega) > 0$ so, dass

$$\forall s \in \mathbb{R} : \quad \left\| \dot{b}_s \right\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} \leq M_b.$$

Zu $\Phi \in \mathcal{D}$ seien $b_{s,\Phi} := \Phi \circ b_s$, sodass analog zu (42) ein $C_b = C_b(M_b)$ so existiert, dass

$$\|b_{s,\Phi} - b_s\|_{C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} \leq C_b \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}.$$

Als Krümmung $\mathcal{K}_{b_{s,\Phi}}$ seien die Krümmungen der Kurven $b_{s,\Phi}$ bezeichnet. Da $b_{s,\text{Id}}$ jeweils Kreiskurven mit Radius R_Ω parametrisieren, sind $\mathcal{K}_{b_{s,\text{Id}}} \equiv 1/R_\Omega$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Analog zu (43) existiert also ein $\delta_R = \delta_R(M_b, R_\Omega)$ so, dass

$$\forall \Phi \in \mathcal{D}, \forall s \in \mathbb{R} : \quad \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} < \delta_R \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3R_\Omega} \leq \mathcal{K}_{b_{s,\Phi}} \leq \frac{3}{2R_\Omega}.$$

Es seien nun s und Φ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} < \delta_R$ festgehalten, aber beliebig. Wie im Hilfssatz 9 gezeigt, berandet $b_{s,\Phi}$ die verformte und C^4 -berandete Kreisscheibe $D_\Phi := \Phi(D)$, mit $D := B_{R_\Omega}(x_{M,s})$. Entsprechend Hilfssatz 2 ist $D \subset \Omega$ und $\partial D \cap \partial\Omega = \{c(s)\}$. Damit sind

$$D_\Phi = \Phi(D) \subset \Phi(\Omega) = \Omega_\Phi, \quad \partial D_\Phi \cap \partial\Omega_\Phi = \{c_\Phi(s)\}.$$

Da die Randkrümmung $\mathcal{K}_{b_{s,\Phi}} \geq 2/(3R_\Omega) > 0$ also strikt positiv ist, ist D_Φ insbesondere streng konvex. Wegen $\mathcal{K}_{b_{s,\Phi}} \leq 3/(2R_\Omega)$ erfüllt nach Teil (e) aus Hilfssatz 3 die verformte Kreisscheibe D_Φ eine innere Kugelbedingung mit Radius R , da

$$R = \frac{1}{2}R_\Omega < \frac{2}{3}R_\Omega \leq \frac{1}{\max_{\xi \in \mathbb{R}} \mathcal{K}_{b_{s,\Phi}}(\xi)}.$$

Also existiert eine Kreisscheibe $D_R \subset D_\Phi \subset \Omega_\Phi$ so, dass $\partial D_R \cap \partial D_\Phi = \{c_\Phi(s)\}$ also auch $\partial D_R \cap \partial\Omega_\Phi = \{c_\Phi(s)\}$. Da Φ und s beliebig waren, lässt sich somit für jeden Randpunkt $c_\Phi(s) \in \partial\Omega_\Phi$ eine solche innere Kreisscheibe mit Radius R finden. Also erfüllen alle Ω_Φ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} \leq \delta_R$ die gewünschte innere Kugelbedingung mit Radius R .

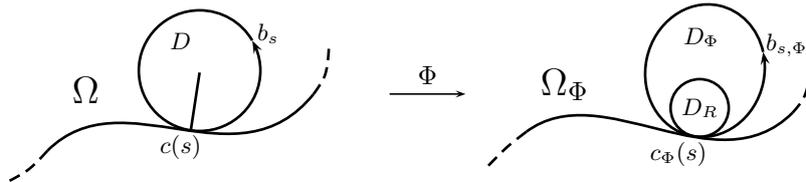


Abbildung 6: Übertragung der inneren Kugelbedingung von Ω auf Ω_Φ

Geht man davon aus, dass $\mu > 3R_\Omega$ ist, dann lässt sich die Argumentation für eine gleichmäßige äußere Kugelbedingung analog wiederholen. Gegebenenfalls muss R_Ω entsprechend verkleinert werden. Daher ist R im Allgemeinen abhängig von μ .

- (b) Offenbar existiert ein $\delta_O > 0$ so, dass für alle $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} \leq \delta_O$ auch die Kurven c_Φ mathematisch positiv orientiert sind. Um (b) zu beweisen, reicht es außerdem, die Krümmungsschranken für einen nach Bogenlänge parametrisierten und mathematisch positiv orientierten Vertreter der Randkurven zu zeigen, da sich zwei solche Vertreter nur durch eine konstante Verschiebung unterscheiden. Ist also für $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} \leq \delta_O$ gerade L die Länge von c , L_Φ die Länge von c_Φ und

$$\psi_\Phi : [0, L] \rightarrow [0, L_\Phi), \quad s \mapsto \int_0^s |\dot{c}_\Phi(\tau)| d\tau, \quad (45)$$

dann kann mit $\varphi_\Phi := \psi_\Phi^{-1} : [0, L_\Phi) \rightarrow [0, L]$ o.B.d.A.

$$\tilde{c}_\Phi|_{[0, L_\Phi)} = c_\Phi \circ \varphi_\Phi \in C^4([0, L_\Phi); \mathbb{R}^2) \quad (46)$$

angenommen werden; bekannterweise ist φ_Φ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von $c_\Phi|_{[0, L]}$ nach Bogenlänge (vgl. [Bär10, Proposition 2.1.13]). Wegen der L_Φ -Periodizität von \tilde{c}_Φ ist die Kurve und ihre Krümmung durch (46) auf ganz \mathbb{R} bestimmt.

Nun sind auf $[0, L_\Phi)$

$$\tilde{\mathcal{K}}_\Phi = \mathcal{K}_\Phi \circ \varphi_\Phi, \quad \tilde{\mathcal{K}}'_\Phi = (\mathcal{K}'_\Phi \circ \varphi_\Phi) \varphi'_\Phi, \quad \tilde{\mathcal{K}}''_\Phi = (\mathcal{K}''_\Phi \circ \varphi_\Phi) \varphi'_\Phi \varphi'_\Phi + (\mathcal{K}'_\Phi \circ \varphi_\Phi) \varphi''_\Phi. \quad (47)$$

Zunächst ist es somit sinnvoll, Schranken an \mathcal{K}_Φ , \mathcal{K}'_Φ und \mathcal{K}''_Φ zu finden. Entsprechend (43) existiert zu $\hat{\varepsilon} = 1$ ein $\delta_{\mathcal{K}} = \delta_{\mathcal{K}}(\|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)})$ so, dass

$$\forall \Phi \in \mathcal{D} : \quad \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} \leq \min\{\delta_{\mathcal{K}}, \delta_O\} \quad \Rightarrow \quad \|\mathcal{K}_\Phi - \mathcal{K}\|_{C^2(\mathbb{R})} \leq 1.$$

Die Konstanten

$$S_{\mathcal{K}} := \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}| + 1, \quad S_{\mathcal{K}'} := \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'| + 1 \quad \text{und} \quad S_{\mathcal{K}''} := \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}''| + 1$$

kontrollieren damit die Krümmungen der c_Φ , für $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} \leq \min\{\delta_{\mathcal{K}}, \delta_O\}$, wie gewünscht gleichmäßig:

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}_\Phi| &\leq \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}_\Phi - \mathcal{K}| + \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}| \leq 1 + \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}| = S_{\mathcal{K}}, \\ \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'_\Phi| &\leq \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'_\Phi - \mathcal{K}'| + \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'| \leq 1 + \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'| = S_{\mathcal{K}'}, \\ \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}''_\Phi| &\leq \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}''_\Phi - \mathcal{K}''| + \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}''| \leq 1 + \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}''| = S_{\mathcal{K}''}. \end{aligned}$$

Um nun ebenfalls gleichmäßige Schranken an die Krümmungen der \tilde{c}_Φ zu finden, verbleibt es nach (47) die $\|\varphi_\Phi\|_{C^2([0, L_\Phi])}$ zu kontrollieren. Etwas weitreichender ist es zu zeigen, dass mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}$ auch $\|\varphi_\Phi - \text{Id}\|_{C^2([0, L_\Phi])}$ kontrolliert werden kann. Auf diese Weise

wird entsprechend (47) auch die Kleinheit von $\|\mathcal{K}_\Phi - \tilde{\mathcal{K}}_\Phi\|_{C^2(\mathbb{R})}$ in Abhängigkeit von $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U};\mathbb{R}^2)}$ klar, die hier nicht benötigt, aber nach der Wahl von \tilde{c}_Φ in (46) erwünscht und erwartet ist.

Es sei festgehalten, dass für $\Phi \in \mathcal{D}$ entsprechend (42)

$$\begin{aligned} \max_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi| &\leq \max_{\mathbb{R}} |\dot{c}| + \max_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi - \dot{c}| \leq 1 + C\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U};\mathbb{R}^2)}, \\ \min_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi| &\geq \min_{\mathbb{R}} |\dot{c}| - \max_{\mathbb{R}} |\dot{c} - \dot{c}_\Phi| \geq 1 - C\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U};\mathbb{R}^2)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Insbesondere ist für $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U};\mathbb{R}^2)} \leq 1/(2C)$

$$\frac{1}{2} \leq |\dot{c}_\Phi| \leq \frac{3}{2}. \quad (49)$$

Es sei nun $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U};\mathbb{R}^2)} \leq \min\{\delta_O, 1/(2C)\}$. Für $s \in [0, L]$ ist nach (45)

$$s \min_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi| \leq \psi_\Phi(s) \leq s \max_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi|,$$

dementsprechend für $t \in [0, L_\Phi)$ durch Wahl von $s = \varphi_\Phi(t)$

$$\frac{t}{\max_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi|} \leq \varphi_\Phi(t) \leq \frac{t}{\min_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi|}.$$

Somit wird, für $t \in [0, L_\Phi)$ und unter Zuhilfenahme von (48) und (49),

$$\begin{aligned} \varphi_\Phi(t) - t &\in t \left[\frac{1 - \max_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi|}{\max_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi|}, \frac{1 - \min_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi|}{\min_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi|} \right] \\ &\subseteq t \left[-2C\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U};\mathbb{R}^2)}, 2C\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U};\mathbb{R}^2)} \right], \end{aligned}$$

sodass wegen der freien Wählbarkeit von $t \in [0, L_\Phi)$

$$\|\varphi_\Phi - \text{Id}\|_{C^0([0, L_\Phi))} \leq 2LC\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U};\mathbb{R}^2)}.$$

Weiter ist nach dem Satz von der Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \varphi'_\Phi(t) - 1 &= \frac{1}{|\dot{c}_\Phi(\varphi_\Phi(t))|} - 1 \in \left[\frac{1 - \max_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi|}{\max_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi|}, \frac{1 - \min_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi|}{\min_{\mathbb{R}} |\dot{c}_\Phi|} \right] \\ &\subseteq \left[-2C\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U};\mathbb{R}^2)}, 2C\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U};\mathbb{R}^2)} \right], \end{aligned}$$

sodass

$$\|\varphi'_\Phi - \text{Id}'\|_{C^0([0, L_\Phi))} \leq 2C\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U};\mathbb{R}^2)}.$$

Bekannterweise ist $0 = (1/2) \frac{d}{ds} 1 = (1/2) \frac{d}{ds} |\dot{c}(s)|^2 = \sum_{i=1}^2 \dot{c}^i(s) \ddot{c}^i(s)$. Zur besseren Lesbarkeit sei außerdem $s := \varphi_\Phi(t)$; damit ist zuletzt auch

$$|\varphi''_\Phi(t)| = \left| \frac{\sum_{i=1}^2 \dot{c}_\Phi^i(s) \ddot{c}_\Phi^i(s) \varphi'_\Phi(t)}{|\dot{c}_\Phi(s)|^3} \right| = \frac{|\varphi'_\Phi(t)|}{|\dot{c}_\Phi(s)|^3} \left| \sum_{i=1}^2 \dot{c}_\Phi^i(s) \ddot{c}_\Phi^i(s) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|\varphi'_\Phi(t)|}{|\dot{c}_\Phi(s)|^3} \left| \sum_{i=1}^2 (\dot{c}^i(s) + [\dot{c}_\Phi^i(s) - \dot{c}^i(s)]) (\ddot{c}^i(s) + [\ddot{c}_\Phi^i(s) - \ddot{c}^i(s)]) \right| \\
&\leq \frac{|\varphi'_\Phi(t)|}{|\dot{c}_\Phi(s)|^3} \left(\left| \sum_{i=1}^2 \dot{c}^i(s) \ddot{c}^i(s) \right| + \left| \sum_{i=1}^2 \dot{c}^i(s) [\ddot{c}_\Phi^i(s) - \ddot{c}^i(s)] \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \sum_{i=1}^2 [\dot{c}_\Phi^i(s) - \dot{c}^i(s)] \ddot{c}^i(s) \right| + \left| \sum_{i=1}^2 [\dot{c}_\Phi^i(s) - \dot{c}^i(s)] [\ddot{c}_\Phi^i(s) - \ddot{c}^i(s)] \right| \right) \\
&\leq \frac{|\varphi'_\Phi(t)|}{|\dot{c}_\Phi(s)|^3} (|\dot{c}(s)| |\ddot{c}_\Phi(s) - \ddot{c}(s)| + |\ddot{c}(s)| |\ddot{c}_\Phi(s) - \ddot{c}(s)| + |\dot{c}_\Phi(s) - \dot{c}(s)| |\ddot{c}_\Phi(s) - \ddot{c}(s)|) \\
&\leq 8C \|\varphi'_\Phi\|_{C^0([0, L_\Phi])} \left(\sqrt{2} \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} + C \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} \right) \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} \\
&\leq 8C \|\text{Id}' + [\varphi'_\Phi - \text{Id}']\|_{C^0([0, L_\Phi])} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} \right) \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} \\
&\leq 16C \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} \right) \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)},
\end{aligned}$$

sodass

$$\|\varphi''_\Phi - \text{Id}''\|_{C^0([0, L_\Phi])} \leq 16C \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} \right) \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}.$$

Insgesamt existiert also eine Konstante $C_\varphi = C_\varphi(L, \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)}, C) > 0$ so, dass für alle $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} \leq \min\{\delta_O, 1/(2C)\}$

$$\|\varphi_\Phi - \text{Id}\|_{C^2([0, L_\Phi])} \leq C_\varphi \|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)}.$$

Entsprechend (47) sind nun die Konstanten $S_{\tilde{\mathcal{K}}} := S_{\mathcal{K}}$, $S_{\tilde{\mathcal{K}}'} := 2S_{\mathcal{K}'}$ und $S_{\tilde{\mathcal{K}}''} := 4S_{\mathcal{K}''} + 12(1 + \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)})S_{\mathcal{K}'}$ geeignet, damit für alle $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{U}; \mathbb{R}^2)} \leq \min\{\delta_O, 1/(2C), \delta_{\mathcal{K}}\}$

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathcal{K}}_\Phi| &= \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}_\Phi| \leq S_{\mathcal{K}} = S_{\tilde{\mathcal{K}}}, \\
\sup_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathcal{K}}'_\Phi| &\leq \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'_\Phi| \sup_{[0, L_\Phi]} |\varphi'_\Phi| \leq 2S_{\mathcal{K}'} = S_{\tilde{\mathcal{K}}'}, \\
\sup_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathcal{K}}''_\Phi| &\leq \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}''_\Phi| \sup_{[0, L_\Phi]} |\varphi'_\Phi|^2 + \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{K}'_\Phi| \sup_{[0, L_\Phi]} |\varphi''_\Phi| \\
&\leq 4S_{\mathcal{K}''} + 8 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \|\dot{c}\|_{C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)} \right) S_{\mathcal{K}'} = S_{\tilde{\mathcal{K}}''}.
\end{aligned}$$

Setzt man zuletzt noch $\delta := \min\{\delta_R, \delta_{\mathcal{K}}, \delta_O, 1/(2C)\}$, so werden (a) und (b) mit den soeben gewonnenen Konstanten R , $S_{\tilde{\mathcal{K}}}$, $S_{\tilde{\mathcal{K}}'}$ und $S_{\tilde{\mathcal{K}}''}$ wie gewünscht erfüllt. \square

Bemerkung 10. Die Vorgehensweise im Beweis von Satz 7 zeigt, dass sich die gleichmäßigen Kugelbedingungen aus (a) explizit abhängig von jeder inneren und äußeren Kugelbedingung die Ω erfüllt formulieren lassen, vorausgesetzt der Umgebungsparameter μ ist hinreichend groß gewählt. Das heißt, erfüllt Ω eine innere und äußere Kugelbedingung mit Radius R_Ω , dann kann δ beispielsweise – wie im Beweis geschehen – so gewählt werden, dass $R = \min\{R_\Omega/2, \mu/6\}$ ist.

Mit diesen ausschlaggebenden Größen unter Kontrolle lässt sich nun eine gleichmäßige C^1 -Schranke an die \tilde{u}_Φ , Lösungen der Kapillaritätsprobleme über den Gebieten Ω_Φ , formulieren.

Korollar 7. *Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes, beschränktes und C^4 -berandetes Gebiet mit nach Bogenlänge parametrisierter und mathematisch positiv orientierter Randkurve $c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, $\mu > 0$, $\kappa > 0$ und $\gamma \in (0, \pi/2]$. Dazu seien*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) < \mu\}, \\ \mathcal{D} &:= \{\Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv}, \mathcal{V}_\Phi := \Phi(\mathcal{U}), \Phi^{-1} \in C^4(\mathcal{V}_\Phi; \mathbb{R}^2)\}. \end{aligned}$$

Ferner seien $\delta = \delta(\Omega) > 0$, $R = R(\Omega, \mu) > 0$ und $S_{\tilde{\kappa}} = S_{\tilde{\kappa}}(\Omega)$, $S_{\tilde{\kappa}'} = S_{\tilde{\kappa}'}(\Omega)$, $S_{\tilde{\kappa}''} = S_{\tilde{\kappa}''}(\Omega) > 0$ die sich dazu ergebenden gleichnamigen Größen aus Satz 7. Dann gilt für alle $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} \leq \delta$: Ist $\tilde{u}_\Phi \in C^3(\bar{\Omega}_\Phi)$ über dem, nach Hilfssatz 9 ebenfalls C^4 -berandeten und beschränkten, Gebiet $\Omega_\Phi := \Phi(\Omega)$ mit äußerer Normale $\nu_\Phi : \partial\Omega_\Phi \rightarrow \mathbb{S}^1$ Lösung des Kapillaritätsproblems

$$\text{div} \left(\frac{\nabla \tilde{u}_\Phi}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{u}_\Phi|^2}} \right) = \kappa \tilde{u}_\Phi, \quad \text{in } \Omega_\Phi, \quad \frac{\nabla \tilde{u}_\Phi \cdot \nu_\Phi}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{u}_\Phi|^2}} = \cos(\gamma), \quad \text{auf } \partial\Omega_\Phi, \quad (50)$$

dann ist

$$\sup_{\Omega_\Phi} |\nabla \tilde{u}_\Phi| \leq \frac{1}{\sin(\gamma)} \sqrt{\cos^2(\gamma) + C_\tau^2},$$

wobei für $M := 2/(\kappa R) + R$ und $C_I(R, M, \kappa)$ innere Gradienten-Schranke aus Hilfssatz 4

$$C_\tau := \max \left\{ 10RS_{\tilde{\kappa}'}M + 16\kappa^{-1}S_{\tilde{\kappa}'} + 24\kappa^{-1}R^2S_{\tilde{\kappa}'}^2 + 8\kappa^{-1}RS_{\tilde{\kappa}''}, \frac{3}{2}C_I(R, M, \kappa) \right\}.$$

Beweis. Es sei $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} \leq \delta$ beliebig gegeben. Nach Satz 7 erfüllt Ω_Φ eine innere Kugelbedingung mit Radius R . Nach Aussage (b) aus Korollar 3 ist damit

$$\sup_{x \in \Omega} |\tilde{u}_\Phi(x)| \leq \frac{2}{\kappa R} + R = M.$$

Wie zuvor soll $\varphi_\Phi \in C^4(\mathbb{R})$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation von $c_\Phi := \Phi \circ c$ so sein, dass $\tilde{c}_\Phi := c_\Phi \circ \varphi_\Phi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Ferner sei $\tilde{\mathcal{K}}_\Phi$ die Krümmung von \tilde{c}_Φ . Es sei daran erinnert, dass mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} \leq \delta$ die Kurven c_Φ und \tilde{c}_Φ mathematisch positiv orientiert sind.

Es soll analog zum Beweis von Korollar 5 die folgende Aussage gezeigt werden:

$$\Omega_{\Phi, \text{dist}=R} = \left\{ \tilde{c}_\Phi(s) + R \begin{pmatrix} -\dot{\tilde{c}}_\Phi^2(s) \\ \dot{\tilde{c}}_\Phi^1(s) \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} =: S_{R, \Phi}.$$

Ist $x \in \Omega_{\Phi, \text{dist}=R}$, so existiert wegen der Kompaktheit von $\partial\Omega_\Phi$ und der Stetigkeit der euklidischen Norm ein $p \in \partial\Omega_\Phi$ mit $|x - p| = \text{dist}(x, \partial\Omega_\Phi)$. Dazu existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{c}_\Phi(s) = p$. Nach

Hilfssatz 2 und wegen der mathematisch positiven Orientierung von \tilde{c}_Φ liegt x in der Menge

$$\left\{ \tilde{c}_\Phi(s) + r \begin{pmatrix} -\dot{\tilde{c}}_\Phi^2(s) \\ \dot{\tilde{c}}_\Phi^1(s) \end{pmatrix} : r > 0 \right\}.$$

Da \tilde{c}_Φ außerdem nach Bogenlänge parametrisiert ist, muss

$$x = \tilde{c}_\Phi(s) + R \begin{pmatrix} -\dot{\tilde{c}}_\Phi^2(s) \\ \dot{\tilde{c}}_\Phi^1(s) \end{pmatrix} \in S_{R,\Phi}$$

sein. Somit folgt $\Omega_{\Phi, \text{dist}=R} \subseteq S_{R,\Phi}$. Ist nun $x \in S_{R,\Phi}$ gegeben, so existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \tilde{c}_\Phi(s) + R \begin{pmatrix} -\dot{\tilde{c}}_\Phi^2(s) \\ \dot{\tilde{c}}_\Phi^1(s) \end{pmatrix}.$$

Da Ω_Φ eine innere Kugelbedingung mit Radius R erfüllt, existiert $x_M \in \Omega_\Phi$ mit

$$B_R(x_M) \subset \Omega_\Phi, \quad \overline{B_R(x_M)} \cap \partial\Omega_\Phi = \{\tilde{c}_\Phi(s)\}.$$

Damit ist $|\tilde{c}_\Phi(s) - x_M| = R = \text{dist}(x_M, \partial\Omega_\Phi)$ erfüllt, sodass nach Hilfssatz 2

$$x_M \in \left\{ \tilde{c}_\Phi(s) + r \begin{pmatrix} -\dot{\tilde{c}}_\Phi^2(s) \\ \dot{\tilde{c}}_\Phi^1(s) \end{pmatrix} : r > 0 \right\}$$

ist. Da \tilde{c}_Φ nach Bogenlänge parametrisiert ist, heißt das insbesondere $x_M = x$. Also ist $x \in \Omega_{\Phi, \text{dist}=R}$ und damit $S_{R,\Phi} \subseteq \Omega_{\Phi, \text{dist}=R}$, insgesamt $S_{R,\Phi} = \Omega_{\Phi, \text{dist}=R}$.

Setzt man nun noch $\varepsilon = \varepsilon_I = R$, so sind alle Voraussetzungen aus Satz 2 bzw. Korollar 4 erfüllt und die gewünschte Abschätzung gefunden:

$$\sup_{\overline{\Omega_\Phi}} |\nabla \tilde{u}_\Phi| \leq \frac{1}{\sin(\gamma)} \sqrt{\cos^2(\gamma) + C_{\tau,\Phi}^2},$$

wobei

$$C_{\tau,\Phi} := \max \left\{ 10R \sup_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathcal{K}}'_\Phi| M + 16\kappa^{-1} \sup_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathcal{K}}'_\Phi| \right. \\ \left. + 24\kappa^{-1} R^2 \sup_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathcal{K}}'_\Phi|^2 + 8\kappa^{-1} R \sup_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathcal{K}}''_\Phi|, \frac{3}{2} C_I(R, M, \kappa) \right\}.$$

Es ist nach Satz 7 außerdem

$$C_{\tau,\Phi} \leq \max \left\{ 10RS_{\tilde{\mathcal{K}}'}, M + 16\kappa^{-1} S_{\tilde{\mathcal{K}}'} + 24\kappa^{-1} R^2 S_{\tilde{\mathcal{K}}'}^2 + 8\kappa^{-1} RS_{\tilde{\mathcal{K}}''}, \frac{3}{2} C_I(R, M, \kappa) \right\} = C_\tau,$$

und damit die gewünschte Schranke nachgewiesen. \square

Bemerkung 11. Im Korollar 7 wird von der inneren Gradienten-Schranke $C_I(R, M, \kappa)$ gesprochen. Um diese aus Hilfssatz 4 zu erhalten, kann man sie beispielsweise als Schranke über Ω

formulieren, sodass

$$\sup_{\Omega_{R \leq \text{dist} < \infty}} |\nabla u| \leq C_I(R, M, \kappa).$$

Da sie ausschließlich von R , M und κ abhängt, gilt sie dann auch für alle transformierten Gebiete, in welchen die innere Kugelbedingung mit Radius R erfüllt ist, d.h.

$$\sup_{\Omega_\Phi, R \leq \text{dist} < \infty} |\nabla \tilde{u}_\Phi| \leq C_I(R, M, \kappa).$$

Korollar 8. *Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes, beschränktes und C^4 -berandetes Gebiet mit nach Bogenlänge parametrisierter und mathematisch positiv orientierter Randkurve $c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, $\mu > 0$, $\kappa > 0$ und $\gamma \in (0, \pi/2]$. Dazu seien*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) < \mu\}, \\ \mathcal{D} &:= \{\Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv}, \mathcal{V}_\Phi := \Phi(\mathcal{U}), \Phi^{-1} \in C^4(\mathcal{V}_\Phi; \mathbb{R}^2)\}. \end{aligned}$$

Dann existieren $\delta = \delta(\Omega) > 0$, $\alpha = \alpha(\Omega, \kappa, \gamma, \mu) \in (0, 1)$ und $C_{C^1, \alpha} = C_{C^1, \alpha}(\Omega, \kappa, \gamma, \mu) > 0$ so, dass für alle $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} \leq \delta$ gilt: Ist $\tilde{u}_\Phi \in C^3(\bar{\Omega}_\Phi)$ über dem, nach Hilfssatz 9 ebenfalls C^4 -berandeten und beschränkten, Gebiet $\Omega_\Phi := \Phi(\Omega)$ mit äußerer Normale $\nu_\Phi : \partial\Omega_\Phi \rightarrow \mathbb{S}^1$ Lösung des Kapillaritätsproblems

$$\text{div} \left(\frac{\nabla \tilde{u}_\Phi}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{u}_\Phi|^2}} \right) = \kappa \tilde{u}_\Phi, \quad \text{in } \Omega_\Phi, \quad \frac{\nabla \tilde{u}_\Phi \cdot \nu_\Phi}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{u}_\Phi|^2}} = \cos(\gamma), \quad \text{auf } \partial\Omega_\Phi,$$

dann gilt

$$\|\tilde{u}_\Phi\|_{C^{1, \alpha}(\bar{\Omega}_\Phi)} \leq C_{C^1, \alpha}.$$

Beweis. Zu Ω sei $\delta = \delta(\Omega) > 0$, $R = R(\Omega, \mu) > 0$ und $S_{\tilde{\kappa}} = S_{\tilde{\kappa}}(\Omega)$, $S_{\tilde{\kappa}'} = S_{\tilde{\kappa}'}(\Omega)$, $S_{\tilde{\kappa}''} = S_{\tilde{\kappa}''}(\Omega) > 0$ die sich dazu ergebenden gleichnamigen Größen aus Satz 7. Für $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} \leq \delta$ ist entsprechend Korollar 3

$$\sup_{\Omega_\Phi} |\tilde{u}_\Phi| \leq \frac{2}{\kappa R} + R.$$

Für alle $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} \leq \delta$ sind die Randkrümmungen der Ω_Φ entsprechend Satz 7 durch die Größen $S_{\tilde{\kappa}}$, $S_{\tilde{\kappa}'}$ und $S_{\tilde{\kappa}''}$ kontrolliert; die Ω_Φ erfüllen eine gleichmäßige innere und äußere Kugelbedingung mit Radius R . Außerdem zeigt Korollar 7 die Existenz einer gleichmäßigen C^1 -Schranke $C_{C^1} = C_{C^1}(\kappa, \gamma, \Omega, R, \delta)$, sodass für alle $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\|\Phi - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} \leq \delta$ gerade $\sup_{\Omega_\Phi} |\nabla \tilde{u}_\Phi| \leq C_{C^1}$.

Die gleichmäßige $C^{1, \alpha}$ -Schranke folgt somit aus Satz 3. □

STÖRUNGSRESULTAT

Die bis hierhin gewonnenen $C^{1, \alpha}$ -a-priori-Schranken ermöglichen es nun, die $C^{2, \alpha}$ -Stabilität unter Gebietsvariation zu zeigen. Insbesondere wird dabei die Konvexität hinreichend kreisähnlicher Gebiete folgen. Zentral ist hierbei ein [LU68a, Chapter 10, S. 463–465] entliehenes Widerspruchs-

argument, welches für das folgende Resultat modifiziert wurde.

Satz 8. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes und C^4 -berandetes Gebiet mit äußerer Normale $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\mu > 0$, $\kappa > 0$, $\gamma \in (0, \pi/2]$ und $\alpha \in (0, 1)$. Dazu seien*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) < \mu\}, \\ \mathcal{D} &:= \{\Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv}, \nu_\Phi := \Phi(\mathcal{U}), \Phi^{-1} \in C^4(\mathcal{V}_\Phi; \mathbb{R}^2)\}. \end{aligned}$$

Gegeben sei eine Folge $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ so, dass

$$\|\Phi_k - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (51)$$

Die Mengen $\Omega_k := \Phi_k(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ sind entsprechend Hilfssatz 9 ebenfalls beschränkte und C^4 -berandete Gebiete; $\nu_k : \partial\Omega_k \rightarrow \mathbb{S}^1$ bezeichnen die äußeren Normalen dieser Gebiete. Weiterhin seien Randwertvorgaben $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (0, \pi)$ so gegeben, dass

$$\gamma_k \rightarrow \gamma, \quad k \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Für die Folge von entsprechend Satz 4 und Bemerkung 1 existierenden Lösungen $\tilde{u}_k \in C^3(\bar{\Omega}_k)$ der Kapillaritätsprobleme

$$\text{div} \left(\frac{\nabla \tilde{u}_k}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{u}_k|^2}} \right) = \kappa \tilde{u}_k, \quad \text{in } \Omega_k, \quad \frac{\nabla \tilde{u}_k \cdot \nu_k}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{u}_k|^2}} = \cos(\gamma_k), \quad \text{auf } \partial\Omega_k, \quad (53)$$

gebe es eine gleichmäßige Schranke $C_{C^{1,\alpha}} > 0$ so, dass

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \|\tilde{u}_k\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}_k)} \leq C_{C^{1,\alpha}}. \quad (54)$$

Dann konvergiert für beliebiges $0 < \beta < \alpha$ die Folge $u_k := \tilde{u}_k \circ \Phi_k \in C^3(\bar{\Omega})$ in $C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$ gegen $u \in C^3(\bar{\Omega})$, Lösung des Problems

$$\text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = \kappa u, \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\nabla u \cdot \nu}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \cos(\gamma), \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (55)$$

Beweis. Der Beweis arbeitet wiederholt mit kompakten Einbettungen von Hölderräumen, ausführlich nachzulesen in [Ada75, Theorem 1.31]. Zunächst wird für ein $\beta < \tilde{\beta} < \alpha$ eine in $C^{1,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})$ konvergente Teilfolge von $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gewählt und diese Konvergenz genutzt, um eine Unbeschränktheit der $\|u_k\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})}$ durch Widerspruch auszuschließen. Dazu soll eine lineare Gleichung an die Differenz von Folgengliedern formuliert werden, die eine zielführende Abschätzung an die $C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})$ -Norm solcher Differenzen zulässt. Die Beschränktheit in $C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})$ erlaubt dann, nach Auswahl einer weiteren Teilfolge, die Konvergenz in $C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$ festzustellen. Die Eindeutigkeit des Grenzwerts sichert, dass man im Rückblick auf die Auswahl einer Teilfolge verzichten kann. Für den Verlauf des

Beweises gelten die üblichen Bezeichnungen

$$a_{ij} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \frac{\delta_{i,j}}{\sqrt{1+|p|^2}} - \frac{p^i p^j}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad i, j \in \{1, 2\},$$

$$a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto \frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}}.$$

Außerdem sei $\beta < \tilde{\beta} < \alpha$ im Folgenden beliebig, aber fest, gewählt.

Da die $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $C^4(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ entsprechend Hilfssatz 7 gleichmäßig beschränkt sind, lässt sich mit (54) auch eine gleichmäßige $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ -Schranke $\tilde{C}_{C^{1,\alpha}} = \tilde{C}_{C^{1,\alpha}}(C^{1,\alpha}, (\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}, \Omega)$ für die Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ formulieren; sie sei so gewählt, dass

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad \|\tilde{u}_k\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}_k)} + \|u_k\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq \tilde{C}_{C^{1,\alpha}}. \quad (56)$$

Außerdem existiert – wegen der gleichmäßigen Schranken an Φ^{-1} aus Hilfssatz 7 – eine, ausschließlich von den $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und μ abhängige, Konstante $\tilde{C} = \tilde{C}((\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}, \mu)$ so, dass für $k \in \mathbb{N}$ und $\delta \in \{\beta, \tilde{\beta}, \alpha\}$

$$\sum_{i,j=1}^2 \|\tilde{u}_{k,x^i x^j} \circ \Phi\|_{C^{2,\delta}(\bar{\Omega})} + \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x^i} (\tilde{u}_{k,x^j} \circ \Phi) \right\|_{C^{2,\delta}(\bar{\Omega})} \leq \tilde{C} \|u_k\|_{C^{2,\delta}(\bar{\Omega})}. \quad (57)$$

Offenbar sind $a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, sodass für das Kompaktum $K := \overline{B_{\tilde{C}_{C^{1,\alpha}}}(0)} \subset \mathbb{R}^2$ eine Konstante \tilde{C}_a so existiert, dass

$$\|a\|_{C^3(K)} + \sum_{i,j=1}^2 \|a_{ij}\|_{C^3(K)} \leq \tilde{C}_a. \quad (58)$$

Wegen (56) und der kompakten Einbettung von $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ in $C^{1,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})$ konvergiert die Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, nach Auswahl einer Teilfolge, in $C^{1,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})$.

Für beliebige $l, m \in \mathbb{N}$ soll nun ein lineares Randwertproblem formuliert werden, welches von $v := u_l - u_m$ erfüllt wird; die Koeffizienten und rechten Seiten sind von u_l und u_m abhängig. Zunächst lässt (53) durch Verknüpfung mit Φ_k eine Formulierung der Probleme über $\bar{\Omega}$ zu. Es sind für beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$\kappa u_k = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} (\nabla \tilde{u}_k \circ \Phi_k) \tilde{u}_{k,x^i x^j} \circ \Phi_k \quad (59)$$

$$= \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij} (\nabla u_k) + [a_{ij} (\nabla \tilde{u}_k \circ \Phi_k) - a_{ij} (\nabla u_k)]) (u_{k,x^i x^j} + [\tilde{u}_{k,x^i x^j} \circ \Phi_k - u_{k,x^i x^j}]),$$

$$\cos(\gamma_k) = a (\nabla \tilde{u}_k \circ \Phi_k) \cdot (\nu_k \circ \Phi_k) \quad (60)$$

$$= (a (\nabla u_k) + [a (\nabla \tilde{u}_k \circ \Phi_k) - a (\nabla u_k)]) \cdot (\nu + [\nu_k \circ \Phi_k - \nu]).$$

Dadurch ergibt sich für v die Gleichung

$$\begin{aligned}
Lv &:= \sum_{i,j=1}^2 [a_{ij}(\nabla u_l)] v_{x^i x^j} + \sum_{k=1}^2 \left[\sum_{i,j=1}^2 \int_0^1 \frac{\partial a_{ij}}{\partial p^k} (\nabla u_m + t(\nabla u_l - \nabla u_m)) dt u_{m,x^i x^j} \right] v_{x^k} - \kappa v \\
&= \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\nabla u_l) (u_{l,x^i x^j} - u_{m,x^i x^j}) + \sum_{i,j=1}^2 [a_{ij}(\nabla u_l) - a_{ij}(\nabla u_m)] u_{m,x^i x^j} - \kappa(u_l - u_m) \quad (61) \\
&= - \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij}(\nabla u_l) [\tilde{u}_{l,x^i x^j} \circ \Phi_l - u_{l,x^i x^j}] + [a_{ij}(\nabla \tilde{u}_l \circ \Phi_l) - a_{ij}(\nabla u_l)] \tilde{u}_{l,x^i x^j} \circ \Phi_l) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij}(\nabla u_m) [\tilde{u}_{m,x^i x^j} \circ \Phi_m - u_{m,x^i x^j}] + [a_{ij}(\nabla \tilde{u}_m \circ \Phi_m) - a_{ij}(\nabla u_m)] \tilde{u}_{m,x^i x^j} \circ \Phi_m)
\end{aligned}$$

und die Randbedingung

$$\begin{aligned}
Bv &:= \sum_{k=1}^2 \left[\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial p^k} (\nabla u_m + t(\nabla u_l - \nabla u_m)) dt \cdot \nu \right] v_{x^k} \\
&= (a(\nabla u_l) - a(\nabla u_m)) \cdot \nu \quad (62) \\
&= \cos(\gamma_l) - a(\nabla u_l) \cdot [\nu_l \circ \Phi_l - \nu] - [a(\nabla \tilde{u}_l \circ \Phi_l) - a(\nabla u_l)] \cdot (\nu_l \circ \Phi_l) \\
&\quad - \cos(\gamma_m) + a(\nabla u_m) \cdot [\nu_m \circ \Phi_m - \nu] + [a(\nabla \tilde{u}_m \circ \Phi_m) - a(\nabla u_m)] \cdot (\nu_m \circ \Phi_m).
\end{aligned}$$

Die Operatoren L und B erfüllen für die von l und m unabhängigen Konstanten

$$c_L := c_B := \frac{1}{(1 + \tilde{C}_{C^{1,\alpha}}^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

die Bedingung [LU68a, Chapter 3, (3.3)], da für $\xi \in \mathbb{R}^2$

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\nabla u_l) \xi^i \xi^j = \frac{|\xi|^2 + |\xi|^2 |\nabla u_l|^2 - (\xi \cdot \nabla u_l)^2}{(1 + |\nabla u_l|^2)^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{|\xi|^2}{(1 + |\nabla u_l|^2)^{\frac{3}{2}}} \geq c_L |\xi|^2 \quad (63)$$

und die Bedingung [LU68a, Chapter 3, (3.4)], da mit $q(t) := \nabla u_m + t(\nabla u_l - \nabla u_m)$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 \left[\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial p^i} (q(t)) dt \cdot \nu \right] \nu^i &= \sum_{i,j=1}^2 \int_0^1 \frac{\partial a^j}{\partial p^i} (q(t)) dt \nu^i \nu^j \quad (64) \\
&= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(q(t)) \nu^i \nu^j dt \geq c_L |\nu|^2 = c_B.
\end{aligned}$$

Da mit (56) aus Einbettungsgründen auch gleichmäßige $C^{1,\tilde{\beta}}$ -Schranken für $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existieren, gibt es eine weitere von l und m unabhängige Konstante $c_1 = c_1(\tilde{C}_{C^{1,\alpha}})$ so, dass sich

die Koeffizienten von L und B für alle $i, j \in \{1, 2\}$ folgendermaßen abschätzen lassen:

$$\begin{aligned}
& \|a_{ij}(\nabla u_l)\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} + \|\kappa\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|\kappa\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} \\
& + \left\| \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial p^i}(\nabla u_m + t(\nabla u_l - \nabla u_m)) dt \cdot \nu \right\|_{C^{0,\beta}(\partial\Omega)} \\
& \leq c_1, \\
& \left\| \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}=1}^2 \int_0^1 \frac{\partial a_{\tilde{n}\tilde{m}}}{\partial p^i}(\nabla u_m + t(\nabla u_l - \nabla u_m)) dt u_{m,x^{\tilde{n}}x^{\tilde{m}}} \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} \\
& + \left\| \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial p^i}(\nabla u_m + t(\nabla u_l - \nabla u_m)) dt \cdot \nu \right\|_{C^1(\partial\Omega)} \\
& \leq c_1 \left(1 + \|u_l\|_{C^2(\bar{\Omega})} + \|u_m\|_{C^2(\bar{\Omega})} \right), \\
& \left\| \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}=1}^2 \int_0^1 \frac{\partial a_{\tilde{n}\tilde{m}}}{\partial p^i}(\nabla u_m + t(\nabla u_l - \nabla u_m)) dt u_{m,x^{\tilde{n}}x^{\tilde{m}}} \right\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} \\
& + \left\| \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial p^i}(\nabla u_m + t(\nabla u_l - \nabla u_m)) dt \cdot \nu \right\|_{C^{1,\beta}(\partial\Omega)} \\
& \leq c_1 \left(1 + \|u_l\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})} + \|u_m\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})} \right).
\end{aligned} \tag{65}$$

Außerdem sollen die rechten Seiten in (61) und (62) kontrolliert werden. Es sind für $k \in \mathbb{N}$ und $i, j \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
u_{k,x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} (\tilde{u}_k \circ \Phi_k) = \sum_{\tilde{n}=1}^2 \Phi_{k,x^i}^{\tilde{n}} \tilde{u}_{k,x^{\tilde{n}}} \circ \Phi_k, \\
u_{k,x^i x^j} &= \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\tilde{u}_k \circ \Phi_k) = \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}=1}^2 \Phi_{k,x^i}^{\tilde{n}} \Phi_{k,x^j}^{\tilde{m}} \tilde{u}_{k,x^{\tilde{n}}x^{\tilde{m}}} \circ \Phi_k + \sum_{\tilde{n}=1}^2 \Phi_{k,x^i x^j}^{\tilde{n}} \tilde{u}_{k,x^{\tilde{n}}} \circ \Phi_k.
\end{aligned} \tag{66}$$

Unter Verwendung von (57) und der Konvergenz in (51) ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
\|u_{k,x^i x^j} - \tilde{u}_{k,x^i x^j} \circ \Phi_k\|_{C^0(\bar{\Omega})} &= \left\| \left(\Phi_{k,x^i}^i \Phi_{k,x^j}^j - 1 \right) \tilde{u}_{k,x^i x^j} \circ \Phi_k + \Phi_{k,x^i}^{3-i} \Phi_{k,x^j}^j \tilde{u}_{k,x^{3-i}x^j} \circ \Phi_k \right. \\
& + \Phi_{k,x^i}^i \Phi_{k,x^j}^{3-j} \tilde{u}_{k,x^i x^{3-j}} \circ \Phi_k + \Phi_{k,x^i}^{3-i} \Phi_{k,x^j}^{3-j} \tilde{u}_{k,x^{3-i}x^{3-j}} \circ \Phi_k \\
& \left. + \sum_{\tilde{n}=1}^2 \Phi_{k,x^i x^j}^{\tilde{n}} \tilde{u}_{k,x^{\tilde{n}}} \circ \Phi_k \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} \\
& \leq o(1) \left(\sum_{\tilde{n}, \tilde{m}=1}^2 \|\tilde{u}_{k,x^{\tilde{n}}x^{\tilde{m}}} \circ \Phi_k\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \sum_{\tilde{n}=1}^2 \|\tilde{u}_{k,x^{\tilde{n}}} \circ \Phi_k\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right) \\
& \leq o(1) \left(\|u_k\|_{C^2(\bar{\Omega})} + \tilde{C}_{C^{1,\alpha}} \right),
\end{aligned} \tag{67}$$

analog

$$\|u_{k,x^i x^j} - \tilde{u}_{k,x^i x^j} \circ \Phi_k\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} \leq o(1) \left(\|u_k\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})} + \tilde{C}_{C^{1,\alpha}} \right). \tag{68}$$

Die (universellen) Nullfolgen $o(1)$ repräsentieren hier und im Folgenden stets einen passenden Vertreter der, höchstens von $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und Ω abhängigen, Nullfolgen.

Mit (58) sowie Produkt- und Kettenregel sind so auch für $i, j \in \{1, 2\}$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|a_{ij}(\nabla \tilde{u}_k \circ \Phi_k) - a_{ij}(\nabla u_k)\|_{C^0(\bar{\Omega})} &\leq o(1)\tilde{C}^{1,\alpha}, \\ \|a_{ij}(\nabla \tilde{u}_k \circ \Phi_k) - a_{ij}(\nabla u_k)\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} &\leq o(1)\tilde{C}^{1,\alpha}, \\ \|a(\nabla \tilde{u}_k \circ \Phi_k) - a(\nabla u_k)\|_{C^1(\partial\Omega)} &\leq o(1)\left(\tilde{C}^{1,\alpha} + \|u_k\|_{C^2(\bar{\Omega})}\right), \\ \|a(\nabla \tilde{u}_k \circ \Phi_k) - a(\nabla u_k)\|_{C^{1,\beta}(\partial\Omega)} &\leq o(1)\left(\tilde{C}^{1,\alpha} + \|u_k\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})}\right). \end{aligned} \quad (69)$$

Wählt man $c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ als nach Bogenlänge parametrisierte Randkurve von Ω , mit Periode $L > 0$ und mathematisch positiver Orientierung (vgl. Hilfssatz 3), sodass

$$-\nu(x) = \begin{pmatrix} -\dot{c}^2 \\ \dot{c}^1 \end{pmatrix} \circ \left(c|_{[0,L]}\right)^{-1}(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

und wählt entsprechend Hilfssatz 9 $c_k := \Phi_k \circ c \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ als Randkurven der Ω_k , dann sind

$$\begin{aligned} -\nu_k \circ \Phi_k(x) &= \left[\frac{1}{|\dot{c}_k|} \begin{pmatrix} -\dot{c}_k^2 \\ \dot{c}_k^1 \end{pmatrix} \right] \circ \left(c_k|_{[0,L]}\right)^{-1} \circ \Phi_k(x) \\ &= \left[\frac{1}{|\dot{c}_k|} \begin{pmatrix} -\dot{c}_k^2 \\ \dot{c}_k^1 \end{pmatrix} \right] \circ \left(c|_{[0,L]}\right)^{-1} \circ \Phi_k^{-1} \circ \Phi_k(x) \\ &= \left[\frac{1}{|\dot{c}_k|} \begin{pmatrix} -\dot{c}_k^2 \\ \dot{c}_k^1 \end{pmatrix} \right] \circ \left(c|_{[0,L]}\right)^{-1}(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

sodass entsprechend (42)

$$\begin{aligned} \|\nu_k \circ \Phi_k - \nu\|_{C^1(\partial\Omega)} &= o(1), \\ \|\nu_k \circ \Phi_k - \nu\|_{C^{1,\beta}(\partial\Omega)} &= o(1). \end{aligned} \quad (70)$$

Mit (52), (67), (68), (69) und (70) erfüllen die auf der rechten Seite stehenden Störterme in (61) und (62) die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \|Lv\|_{C^0(\bar{\Omega})} &\leq o(1)\left(1 + \|u_l\|_{C^2(\bar{\Omega})} + \|u_m\|_{C^2(\bar{\Omega})}\right), \\ \|Lv\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} &\leq o(1)\left(1 + \|u_l\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})} + \|u_m\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})}\right), \\ \|Bv\|_{C^1(\partial\Omega)} &\leq o(1)\left(1 + \|u_l\|_{C^2(\bar{\Omega})} + \|u_m\|_{C^2(\bar{\Omega})}\right), \\ \|Bv\|_{C^{1,\beta}(\partial\Omega)} &\leq o(1)\left(1 + \|u_l\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})} + \|u_m\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})}\right). \end{aligned} \quad (71)$$

Wegen (63), (64) und [LU68a, Chapter 3, Theorem 3.1] kann nun eine Abschätzung der Form [LU68a, Chapter 3, (3.5)] vorgenommen werden. Unter zusätzlicher Verwendung von (65) und (71)

ergibt sich so für eine von l und m unabhängige Konstante $c_2 = c_2(\tilde{C}_{C^{1,\alpha}}, c_L, c_B)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|v\|_{2,\tilde{\beta}(\bar{\Omega})} &\leq c_2 \left(o(1) \left(1 + \|u_l\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} + \|u_m\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} \right) + \|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right. \\ &\quad \left. + \|v\|_{C^1(\bar{\Omega})} \left(1 + \|u_l\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} + \|u_m\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} + \left(\|u_l\|_{C^2(\bar{\Omega})} + \|u_m\|_{C^2(\bar{\Omega})} \right)^{1+\tilde{\beta}} \right) \right). \end{aligned}$$

Da außerdem, entsprechend [LU68a, Chapter 3, (2.1)] bzw. [Mir55] (vgl. auch Bemerkung 12), für eine Konstante c_3 die Hölderraum-Ungleichung

$$\forall w \in C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega}) : \quad \|w\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c_3 \|w\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})}^{\frac{1}{1+\tilde{\beta}}} \|w\|_{C^1(\bar{\Omega})}^{\frac{\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}}} \quad (72)$$

gilt, ergibt sich für eine von l und m unabhängige Konstante $c = c(\tilde{C}_{C^{1,\alpha}}, c_3, c_L, c_B)$ die entscheidende Abschätzung

$$\|v\|_{2,\tilde{\beta}(\bar{\Omega})} \leq c \left(o(1) + \|v\|_{C^1(\bar{\Omega})} \right) \left(1 + \|u_l\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} + \|u_m\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} \right). \quad (73)$$

Angenommen, die Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wäre nicht in $C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})$ beschränkt, dann könnte eine Teilfolge $(u_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ so gewählt werden, dass für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\|u_{k_{i+1}}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} \geq 2\|u_{k_i}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} \quad \text{und} \quad \|u_{k_i}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} \geq 1$$

gilt. Mit $l(i) = k_{i+1}$ und $m(i) = k_i$ und $v_i = u_{l(i)} - u_{k(i)}$ implizierte Ungleichung (73) dann

$$\begin{aligned} \|u_{k_{i+1}}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} &= 2\|u_{k_i} + u_{k_{i+1}} - u_{k_i}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} - \|u_{k_{i+1}}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} \\ &\leq 2\|u_{k_i}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} + 2\|v_i\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} - \|u_{k_{i+1}}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} \leq 2\|v_i\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} \\ &\leq 2c \left(o(1) + \|v_i\|_{C^1(\bar{\Omega})} \right) \left(1 + \|u_{k_i}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} + \|u_{k_{i+1}}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} \right) \\ &\leq 5c \left(o(1) + \|v_i\|_{C^1(\bar{\Omega})} \right) \|u_{k_{i+1}}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})}. \end{aligned}$$

Da mit der $C^{1,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})$ -Konvergenz von $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auch $\|v_i\|_{C^1(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$, ergibt sich für hinreichend großes $i \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\|u_{k_{i+1}}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} \leq \|u_{k_{i+1}}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})}/2$, wegen $\|u_{k_{i+1}}\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})} \geq 1 > 0$ also $1 \leq 1/2$, ein Widerspruch.

Also ist $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})$ beschränkt. Da $\beta < \tilde{\beta}$, also $C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})$ kompakt in $C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$ eingebettet ist, konvergiert $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nach Auswahl einer weiteren Teilfolge in $C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$ gegen ein $\hat{u} \in C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$. Entsprechend (59), (60) und den Konvergenzeigenschaften aus (52), (67), (69) und (70) ist außerdem

$$\begin{aligned} \kappa \hat{u} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^2 \left(\underbrace{a_{ij}(\nabla u_k)}_{\rightarrow a_{ij}(\nabla \hat{u})} + \underbrace{[a_{ij}(\nabla \tilde{u}_k \circ \Phi_k) - a_{ij}(\nabla u_k)]}_{\rightarrow 0} \right) \left(\underbrace{u_{k,x^i x^j}}_{\rightarrow \hat{u}_{x^i x^j}} + \underbrace{[\tilde{u}_{k,x^i x^j} \circ \Phi_k - u_{k,x^i x^j}]}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\nabla \hat{u}) \hat{u}_{x^i x^j}, \end{aligned}$$

$$\cos(\gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\left(a(\nabla u_k) \right)}_{\rightarrow a(\nabla \hat{u})} + \underbrace{\left[a(\nabla \tilde{u}_k \circ \Phi_k) - a(\nabla u_k) \right]}_{\rightarrow 0} \cdot \left(\nu + \underbrace{\left[\nu_k \circ \Phi_k - \nu \right]}_{\rightarrow 0} \right) = a(\nabla \hat{u}) \cdot \nu,$$

also \hat{u} Lösung des Kapillaritätsproblems (55), sodass wegen Korollar 1 $\hat{u} = u$ ist.

Auf die Auswahl der Teilfolge kann man im Rückblick verzichten. Angenommen, die Ursprungsfolge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergierte nicht in $C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$ gegen u , dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(u_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ so, dass $\|u - u_{k_i}\|_{C^{2,\beta}(\bar{\Omega})} > \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Teilfolge $(u_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ würde erneut alle Voraussetzungen aus dem Satz erfüllen, sodass eine Wiederholung obiger Argumentation die Auswahl einer gegen u konvergenten Teilfolge erlaubte, ein Widerspruch. \square

Bemerkung 12. Die Ungleichung (72) folgt aus der generellen Konvexitätseigenschaft von Höldernormen, welche sich in [Hör76, Theorem A.5] findet. Zu $\lambda \in (0, 1)$ und $k, k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$, $k_1 + \alpha_1 \leq k_2 + \alpha_2$,

$$k + \alpha = \lambda(k_1 + \alpha_1) + (1 - \lambda)(k_2 + \alpha_2)$$

und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einem C^{k_2, α_2} -berandeten und beschränkten Gebiet, findet sich demnach ein $C = C(k_1 + \alpha_1, k_2 + \alpha_2, \Omega)$ so, dass für alle $w \in C^{k_2, \alpha_2}(\bar{\Omega})$ die Interpolationsungleichung

$$\|w\|_{C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \|w\|_{C^{k_1, \alpha_1}(\bar{\Omega})}^\lambda \|w\|_{C^{k_2, \alpha_2}(\bar{\Omega})}^{1-\lambda}$$

gilt. Mit $k = 2$, $\alpha = 0$, $k_1 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $k_2 = 2$, $\alpha_2 = \tilde{\beta}$ und $\lambda = \tilde{\beta}/(1 + \tilde{\beta})$ ergibt sich

$$\lambda(k_1 + \alpha_1) + (1 - \lambda)(k_2 + \alpha_2) = \frac{\tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} + \frac{2 + \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} = 2 = k + \alpha$$

und damit die gewünschte Ungleichung für ein $C = C(\tilde{\beta}, \Omega)$

$$\|w\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq C \|w\|_{C^1(\bar{\Omega})}^{\frac{\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}}} \|w\|_{C^{2,\tilde{\beta}}(\bar{\Omega})}^{\frac{1}{1+\tilde{\beta}}}.$$

Zusammen mit den in dieser Arbeit gewonnenen $C^{1,\alpha}$ -Schranken ergibt sich ein nützliches Stabilitätsresultat.

Korollar 9. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes und C^4 -berandetes Gebiet, $\mu > 0$, $\kappa > 0$, $\gamma \in (0, \pi/2]$, $u \in C^3(\bar{\Omega})$ die Lösung des dazugehörigen Problems (1) \wedge (2) und $\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) < \mu\}$. Ferner seien*

$$(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D} := \{ \Phi \in C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv}, \mathcal{V}_\Phi := \Phi(\mathcal{U}), \Phi^{-1} \in C^4(\mathcal{V}_\Phi; \mathbb{R}^2) \} \quad (74)$$

mit

$$\|\Phi_k - \text{Id}\|_{C^4(\bar{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Es seien $\Omega_k := \Phi_k(\Omega)$ entsprechend Hilfssatz 9 beschränkte und C^4 -berandete Gebiete mit äußeren

Normalen $\nu_k : \partial\Omega_k \rightarrow \mathbb{S}^1$ und $\tilde{u}_k \in C^3(\overline{\Omega}_k)$ Lösungen der Kapillaritätsprobleme

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \tilde{u}_k}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{u}_k|^2}} \right) = \kappa \tilde{u}_k, \quad \text{in } \Omega_k, \quad \frac{\nabla \tilde{u}_k \cdot \nu_k}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{u}_k|^2}} = \cos(\gamma), \quad \text{auf } \partial\Omega_k.$$

Dann existiert ein $\beta \in (0, 1)$ so, dass

$$\|\tilde{u}_k \circ \Phi_k - u\|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Beweis. Entsprechend Korollar 8 existieren $\alpha = \alpha(\Omega, \kappa, \gamma, \mu)$ und $C_{C^{1,\alpha}} = C_{C^{1,\alpha}}(\Omega, \kappa, \gamma, \mu)$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\|\tilde{u}_k\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_k)} < C_{C^{1,\alpha}}.$$

Mit $\gamma_k := \gamma$, $k \in \mathbb{N}$, zeigt Satz 8 nun die gewünschte Aussage. \square

Bemerkung 13. Entsprechend Hilfssatz 7 kann man in Korollar 9 die Voraussetzung (74) durch Injektivität und $C^4(\overline{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)$ -Nähe zur Identität ersetzen.

Damit liegt es auf der Hand, dass die Konvexität von Lösungen über Kreisscheiben (vgl. Hilfssatz 6) kein singuläres Phänomen ist, festgehalten in einem abschließenden Störungsresultat.

Korollar 10. Es seien $\mu > 0$, $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $\kappa > 0$, $\gamma \in (0, \pi/2)$ und $\Omega := B_R(x_0)$, sowie $\mathcal{U} := B_{R+\mu}(x_0)$.

Dann existiert ein $\varepsilon = \varepsilon(\mu, R, \kappa, \gamma) > 0$ so, dass für alle $\Phi \in C^4(\overline{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)$ mit $\|\Phi - \operatorname{Id}\|_{C^4(\overline{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2)} < \varepsilon$ die Störung $\Phi \in \mathcal{D}$ ist und die Lösung $\tilde{u}_\Phi \in C^3(\overline{\Omega}_\Phi)$ des Kapillaritätsproblems

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \tilde{u}_\Phi}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{u}_\Phi|^2}} \right) = \kappa \tilde{u}_\Phi, \quad \text{in } \Omega_\Phi, \quad \frac{\nabla \tilde{u}_\Phi \cdot \nu_\Phi}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{u}_\Phi|^2}} = \cos(\gamma), \quad \text{auf } \partial\Omega_\Phi,$$

über dem Gebiet $\Omega_\Phi := \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ mit äußerer Normale $\nu_\Phi : \partial\Omega_\Phi \rightarrow \mathbb{S}^1$ strikt konvex ist.

Hierbei ist

$$\mathcal{D} := \{ \Phi \in C^4(\overline{\mathcal{U}}; \mathbb{R}^2) : \Phi \text{ injektiv, } \mathcal{V}_\Phi := \Phi(\mathcal{U}), \Phi^{-1} \in C^4(\mathcal{V}_\Phi; \mathbb{R}^2) \}.$$

Beweis. $\Phi \in \mathcal{D}$ folgt, für ε hinreichend klein, aus Hilfssatz 7. Damit wird insbesondere die Formulierung des Problems über Ω_Φ sinnvoll (vgl. Hilfssatz 9).

Entsprechend Hilfssatz 6 ist $u := u_{\operatorname{Id}}$ gleichmäßig konvex, d.h., dass die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ von $\operatorname{Hess} u$ größer einer Konstante $\lambda > 0$ sind.

Angenommen, es gäbe kein $\varepsilon > 0$ wie oben beschrieben, dann wäre es möglich, eine Folge $\Phi_k \in \mathcal{D}$ so zu wählen, dass $\tilde{u}_k := \tilde{u}_{\Phi_k}$ nicht strikt konvex sind; d.h., es gibt eine Folge $\tilde{x}_k \in \Omega_k$, sodass $\operatorname{Hess} \tilde{u}_k(\tilde{x}_k)$ nicht positiv definit ist. Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, konvergiert $(x_k := \Phi_k^{-1}(\tilde{x}_k))_{k \in \mathbb{N}} \in \overline{\Omega}$ nach Auswahl einer Teilfolge gegen ein $x \in \overline{\Omega}$.

Nach Korollar 9 konvergiert die Folge $(u_k := \tilde{u}_k \circ \Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $C^2(\overline{\Omega})$ gegen u . Damit ist insbesondere $\|u_k\|_{C^2(\overline{\Omega})}$ gleichmäßig beschränkt, sodass entsprechend (67) für $i, j \in \mathbb{N}$

$$\|u_{k,x^i x^j} - \tilde{u}_{k,x^i x^j} \circ \Phi_k\|_{C^0(\overline{\Omega})} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Da außerdem $\Phi_k \rightarrow \text{Id}$ in $C^4(\overline{U}; \mathbb{R}^2)$, konvergieren die Einträge von $\text{Hess } \tilde{u}_k(\tilde{x}_k)$ gegen die Einträge der Matrix $\text{Hess } u(x)$; für $i, j \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_{k,x^i x^j}(\tilde{x}_k) - u_{x^i x^j}(x)| &\leq \underbrace{|\tilde{u}_{k,x^i x^j}(\tilde{x}_k) - \tilde{u}_{k,x^i x^j} \circ \Phi_k(x_k)|}_{=0} + \underbrace{|\tilde{u}_{k,x^i x^j} \circ \Phi_k(x_k) - u_{k,x^i x^j}(x_k)|}_{\rightarrow 0} \\ &\quad + \underbrace{|u_{k,x^i x^j}(x_k) - u_{k,x^i x^j}(x)|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|u_{k,x^i x^j}(x) - u_{x^i x^j}(x)|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Wegen der stetigen Abhängigkeit der Eigenwerte von den Einträgen ihrer Matrizen werden für hinreichend große k die Eigenwerte von $\text{Hess } \tilde{u}_k(\tilde{x}_k)$ größer als $\lambda/2$, also $\text{Hess } \tilde{u}_k(\tilde{x}_k)$ positiv definit, ein Widerspruch. Das zeigt die gewünschte Behauptung. \square

LITERATURVERZEICHNIS

- [Ada75] Robert Alexander Adams. *Sobolev Spaces*, volume 65 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, erste Auflage, 1975.
- [Alt06] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer Verlag, fünfte überarbeitete Auflage, 2006.
- [Bär10] Christian Bär. *Elementare Differentialgeometrie*. De Gruyter Studium, zweite Auflage, 2010.
- [Bru82] Frederic Paul Brulois. Asymptotic Expansions and Estimates for the Capillary Problem. *Jet Propulsion Laboratory. Proceedings of the Second International Colloquium on Drops and Bubbles*, 29:344–349, 1982.
- [Car76] James Caristi. Fixed Point Theorems for Mappings Satisfying Inwardness Conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 215:241–251, Januar 1976.
- [CF74a] Paul Concus und Robert Finn. On capillary free surfaces in a gravitational field. *Acta Mathematica*, 132(1):207–223, 1974.
- [CF74b] Paul Concus und Robert Finn. On capillary free surfaces in the absence of gravity. *Acta Mathematica*, 132(1):177–198, 1974.
- [Emm73] Michele Emmer. Esistenza, unicità e regolarità nelle superfici di equilibrio nei capillari. *Annali dell'Università di Ferrara*, 18(1):79–94, Dezember 1973.
- [Fin86] Robert Finn. *Equilibrium Capillary Surfaces*. Springer Verlag, erste Auflage, 1986.
- [GT01] David Gilbarg und Neil Sidney Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Academic Press, zweite Auflage, 2001. Original 1983 veröffentlicht in *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Volume 224.
- [GWQ03] Pierre-Gilles de Gennes, Françoise Brochard Wyart, und David Quéré. *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves*. Springer Verlag, erste Auflage, 2003.
- [HL00] Qing Han und Fang Hua Lin. *Elliptic Partial Differential Equations*, volume 1 of *Courant Lecture Notes*. American Mathematical Society, erste Auflage, 2000.
- [Hop52] Eberhard Frederich Ferdinand Hopf. A remark on linear elliptic differential equations of second order. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3:791–793, 1952.
- [Hör76] Lars Hörmander. The Boundary Problems of Physical Geodesy. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 62(1):1–52, 1976.
- [JP68] William Ernest Johnson und Lawrence M. Perko. Interior and exterior boundary value problems from the theory of the capillary tube. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 29:125–143, 1968.

- [Kor83] Nicholas Korevaar. Capillary Surface Convexity above Convex Domains. *Indiana University Mathematics Journal*, 32(1):73–81, 1983.
- [Lie82] Gary M. Lieberman. Solvability of Quasilinear Elliptic Equations with Nonlinear Boundary Conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 273(2):753–765, Oktober 1982.
- [LU68a] Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya und Nina Nikolaevna Ural'tseva. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, volume 46. Academic Press, 1968. Übersetzt aus dem Russischen von Scripta Technica, Inc. Translation editor: Leon Ehrenpreis.
- [LU68b] Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya und Nina Nikolaevna Ural'tseva. On certain classes of nonuniformly elliptic equations. *Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 2:129–149, 1968. Sprache: Russisch.
- [LU69] Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya und Nina Nikolaevna Ural'tseva. On total estimates of first derivatives of solutions of quasilinear elliptic and parabolic equations. *Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 2:127–155, 1969. Sprache: Russisch.
- [LU70] Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya und Nina Nikolaevna Ural'tseva. Local Estimates for Gradients of Solutions of Non-Uniformly Elliptic and Parabolic Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 23:677–703, 1970.
- [Mir55] Carlo Miranda. *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*. Springer Verlag, erste Auflage, 1955. Sprache: Italienisch.
- [Rec65] Alfred Fritz Max Recknagel. *Physik, Mechanik*. VEB Verlag Technik, Berlin, erste Auflage, 1965.
- [Ser69] James Serrin. The Problem of Dirichlet for Quasilinear Elliptic Differential Equations with Many Independent Variables. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 264(1153):413–496, Mai 1969.
- [Sim71] Leon Melvin Simon. *Interior Gradient Bounds for Non-uniformly Elliptic Partial Differential Equations of Divergence Form*. PhD thesis, University of Adelaide, 1971.
- [Spr75] Joel Spruck. On the Existence of a Capillary Surface with Prescribed Contact Angle. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 28(2):189–200, März 1975.
- [SS76] Leon Melvin Simon und Joel Spruck. Existence and Regularity of a Capillary Surface with Prescribed Contact Angle. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 61(1):19–34, 1976.
- [Tru72] Neil Sidney Trudinger. A New Proof of the Interior Gradient Bound for the Minimal Surface Equation in n Dimensions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 69(4):821–823, April 1972.
- [Tru73] Neil Sidney Trudinger. Gradient Estimates and Mean Curvature. *Mathematische Zeitschrift*, 131:165–175, 1973.

SELBSTSTÄNDIGKEITSERKLÄRUNG

Hiermit versichere ich, gemäß §9 der Prüfungsordnung für den Diplomstudiengang Mathematik der Otto-von-Guericke-Universität zu Magdeburg, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel und Quellen außer den angegebenen verwendet habe. Diese Arbeit wurde bisher noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und ist noch nicht veröffentlicht.

Ort, Datum, Unterschrift des Verfassers