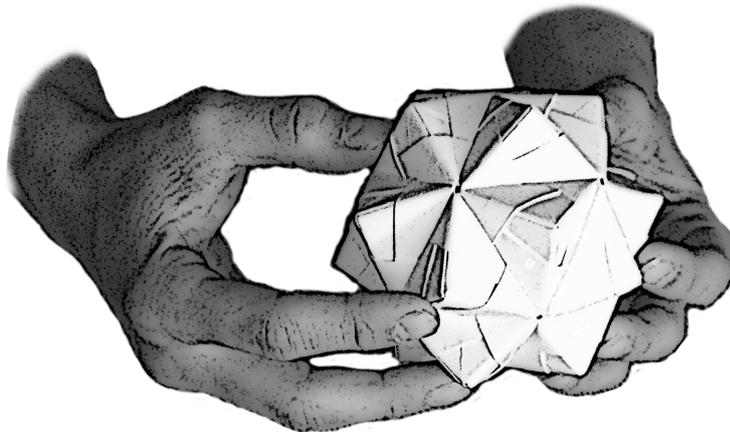


ERSTE A-PRIORI-ABSCHÄTZUNGEN FÜR WILLMORE-GRAPHEN ÜBER ALLGEMEINEN GEBIETEN

Forschungsbeleg

Boris Gulyak

geboren am 20.03.1990 in
St. Petersburg (Russland)



Betreuer und Gutachter: Prof. Dr. Hans-Christoph Grunau
Betreuer: Prof. Dr. Jan Wiersig

Eingereicht am: 4. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	4
2. Vorbereitung	5
2.1. Differentialgeometrische Grundlagen	5
2.2. Flächen- & Koflächenformel	12
2.3. Willmore-Funktional	18
3. Durchmesser-Abschätzung für kompakte Flächen ohne Rand	21
4. Randwertprobleme für zweidimensionale Willmore-Graphen	26
4.1. Supremum-Abschätzung	28
4.2. Randbedingungen	31
A. Appendix	36
Symbolverzeichnis	49
Sachverzeichnis	50
Literatur	51

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie die Zitate deutlich kenntlich gemacht zu haben.

Magdeburg, den 10. Oktober 2014

(Name des Kandidaten)

1. Einleitung

In dieser Arbeit werden wir Flächen als glatte geometrische Objekte betrachten und hauptsächlich die Eigenschaften untersuchen, die im Zusammenhang mit dem Willmore-Funktional stehen. Für eine glatte Fläche \mathcal{M} in dem gewöhnlichen euklidischen \mathbb{R}^3 ist dies das Flächenintegral über das Quadrat der mittleren Krümmung

$$\mathcal{W}(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} H^2 \, dA.$$

Dieser geometrischen Quantität wird heutzutage in der Forschung viel Aufmerksamkeit zuteil. So ist es zum Beispiel aus einem mathematischen Blickwinkel reizvoll, analog zur Minimalflächentheorie, zu verstehen, welche Erscheinungen bei Funktionalminimierung auftreten können. Aus der physikalischer Sicht ist das Willmore-Funktional in den Modellen nützlich, die die Steifigkeit der Flächen mitberücksichtigen, um damit mehr Phänomene zu beschreiben.

Eine Frage, die man sich hier stellen könnte, ist, ob man die Ausdehnung einer Fläche im umgebenden Raum anhand ihrer Willmore-Energie kontrollieren kann. Dass es kein hoffnungsloses Unterfangen ist, werden wir im Abschnitt 3 feststellen. Dort wird nach [Sim2] gezeigt, dass es für eine geschlossene Fläche ausreichend ist, ihren Flächeninhalt und ihre Willmore-Energie zu kennen, um den Durchmesser abzuschätzen.

In Abschnitt 4 werden wir eine ähnliche Antwort für C^2 -glatte Graphen mit vorgegebenem Rand finden, für welche man dann eine Abschätzung des Supremums im Satz 4.4 erhält, die nur von dem Randverlauf und der Willmore-Energie des Graphen stammt. Dieses Resultat aus [DG2] kann man als erste a-priori-Abschätzungen im Rahmen verschiedener Randwertprobleme ansehen.

Die eigenständige Arbeit des Autors war einerseits die Vorbereitung und Zusammenfassung der Werkzeuge in Abschnitt 2 für die Abschnitte 3 und 4, wobei vieles der Übersichtlichkeit halber in den Appendix verschoben wurde. Es waren oft lokale Darstellungen, Konsistenzprüfungen und andere Aussagen, wie die Dichte des Hausdorffmaßes auf einer Fläche A.8 oder der allgemeine Divergenzsatz für Lipschitz-Vektorfelder A.11, die gezeigt werden mussten. Andererseits wurde der Satz 4.2 nicht aus [Sim2] zitiert, sondern explizit für Graphen gezeigt.

Die hier benutzte Notation wird als eine Symbolenliste mit kurzen Erklärungen und Seitenverweisen unter der Bezeichnung Symbolverzeichnis zu finden sein. Vielmehr man kann viele von den in der Arbeit definierten Begriffen mit Seitenangaben deren Definitionen in dem Sachverzeichnis aufgelistet sehen.

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Herrn Professor Wiersig für die Möglichkeit diese Arbeit schreiben zu können und bei Herrn Professor Grunau für die sehr hilfreiche Betreuung bedanken. Weiterhin will ich Herrn Eichelmann und Herrn Lettau danken, dem Ersten für seine Unterstützung und der Zurverfügungstellung seiner Hände für das Titelbild, und dem Zweiten für die mühevollen Korrektur.

2. Vorbereitung

2.1. Differentialgeometrische Grundlagen

Hier werden einige Werkzeuge erarbeitet, von denen wir später ausführlich Gebrauch machen werden. Als Grundlage der Betrachtung wird eine Definition einer glatten Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N benötigt, wobei wir zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten *Flächen* nennen. Dieser Abschnitt schöpft am meisten aus dem Buch [Sim1], was sich in der Notation widerspiegeln wird. Zur Vorbereitung definieren wir einen Halbraum:

$$\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} \quad \text{und} \quad \partial\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}.$$

2.1 Definition (C^r -Untermannigfaltigkeit)

Man nennt $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ genau dann eine n -dimensionale C^r -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} , $k \geq 0, n \geq 1$, wenn gilt: Für jedes $p \in \mathcal{M}$ existieren eine in \mathbb{R}^{n+k} offene Umgebung V von p , $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine offene Umgebung von 0 in \mathbb{R}^{n+k} und ein C^r -Diffeomorphismus $\bar{\varphi} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, sodass $\bar{\varphi}(0) = p$ und entweder

- ① $\bar{\varphi}(U \cap \mathbb{R}^n) = V \cap \mathcal{M}$, in diesem Falle heißt p *innerer Punkt* von \mathcal{M} , oder
- ② $\bar{\varphi}(U \cap \mathbb{R}_+^n) = V \cap \mathcal{M}$, in diesem Falle heißt p *Randpunkt* von \mathcal{M}

gilt, wobei wir hier $\mathbb{R}_{(+)}^n$ als $\mathbb{R}_{(+)}^n \times \{0\}^k$ ($\{0\}^k = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$) verstehen. Also kann man \mathcal{M} lokal C^r -glatt „geradebiegen“.

Wir benutzen im Folgenden die Notation $\varphi = \bar{\varphi}|_{\mathbb{R}^n \cap U}$, sodass φ eine C^r -glatte Funktion von $\mathbb{R}^n \cap U$ nach \mathbb{R}^{n+k} und eine *lokale Parametrisierung von \mathcal{M} um p* ist. Weiterhin bezeichnen wir die Menge der inneren Punkte von \mathcal{M} mit $\text{int } \mathcal{M}$. Außerdem sagen wir, \mathcal{M} ist eine *Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+k} mit bzw. ohne Rand*, falls es in \mathcal{M} Randpunkte gibt, bzw. \mathcal{M} nur aus inneren Punkten besteht. Vielmehr ist dann die *Kodimension* $\text{codim } \mathcal{M} = n + k - \dim \mathcal{M} = k$.

Die Ableitungen $\partial_1 \varphi(u), \dots, \partial_n \varphi(u)$ mit $u \in U \cap \mathbb{R}_{(+)}^n$ sind wegen der Diffeomorphie von $\bar{\varphi}$ linear unabhängige Vektoren im \mathbb{R}^{n+k} . Zudem stellt man fest, dass sie den *Tangentialraum* $T_{\varphi(u)} \mathcal{M}$ aufspannen. Sie sind somit eigentlich zu \mathcal{M} tangentielle Vektorfelder, aus welchen man nach Gram-Schmidt orthonormale tangentielle Vektorfelder in der Umgebung $V \cap \mathcal{M}$ bilden kann. Das wird in A.3 gezeigt.

Weiter müssen wir definieren, wie man auf \mathcal{M} differenziert, mit dem Ziel später Integral-Differentialsätze auf \mathcal{M} formulieren zu können. Als erstes brauchen wir aber etwas zum differenzieren, also auf \mathcal{M} differenzierbare Funktionen und anschließend die Begriffe der Richtungsableitung und des Gradienten.

2.2 Definition (Differenzierbarkeit)

Sei $p \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ und $W \subset \mathcal{M}$ eine Umgebung in \mathcal{M} von p , außerdem sei $f : W \rightarrow \mathbb{R}^\nu$. Wir sagen f ist in p *differenzierbar bzgl. \mathcal{M}* , falls es eine *lokale Fortsetzung im Definitionsbereich* $\bar{f} : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ gibt, sodass \bar{W} eine Umgebung von p in \mathbb{R}^{n+k} , $\mathcal{M} \cap \bar{W} \subset W$, \bar{f} differenzierbar in p ist und es gilt:

$$f|_{\mathcal{M} \cap \bar{W}} = \bar{f}|_{\mathcal{M} \cap \bar{W}}.$$

2.3 Definition (C^ℓ -glatte Funktion)

Sei \mathcal{M} eine n -dimensionale C^r -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} . Wir sagen $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ ($\nu \geq 0$) ist eine C^ℓ -glatte Funktion ($\ell \leq r$), falls es für jedes $p \in \mathcal{M}$ eine C^ℓ -glatte lokale Fortsetzung im Definitionsbereich $\bar{f}: \widetilde{W} \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ gibt, sodass \widetilde{W} eine Umgebung von p in \mathbb{R}^{n+k} ist, und es gilt:

$$f|_{\mathcal{M} \cap \widetilde{W}} = \bar{f}|_{\mathcal{M} \cap \widetilde{W}}.$$

Man kann sich in A.2 überzeugen, dass eine überall in \mathcal{M} differenzierbare Funktion C^1 -glatt ist. Weiterhin benutzt man die Definitionen auch für allgemeine Teilmengen des \mathbb{R}^{n+k} . Für \mathcal{M} als Mannigfaltigkeit gibt es noch einen Differenzierbarkeitsbegriff, der unabhängig davon ist, ob \mathcal{M} in einem umgebenden Raum eingebettet ist (siehe zum Beispiel in [LeeS]). Man stellt aber fest, dass beide Definitionen in diesen Fall übereinstimmen, weil man wie in A.2 eine in Koordinaten differenzierbare Funktion lokal fortsetzen kann.

2.4 Definition (Richtungsableitung & Differential)

Sei $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ eine C^1 -Funktion auf \mathcal{M} , $\tau \in T_p\mathcal{M}$, sowie mit $\varepsilon > 0$ $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ eine C^1 -Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = \tau$. Dann sei die *Richtungsableitung von f in Richtung τ* :

$$(1) \quad D_\tau f := \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0}.$$

Diese Definition hängt nicht von der expliziten Wahl von γ ab, was man am besten in lokaler Darstellung A.4 nachvollziehen kann. Weiter können wir das *Differential von f in p bzgl. \mathcal{M}* $df_p: T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ definieren als:

$$(2) \quad df_p(\tau) := D_\tau f.$$

2.5 Definition (Gradient)

Sei f wie oben und bilde nach \mathbb{R} ab, $p \in \mathcal{M}$ und $(\tau_i)_{i=1}^n \subset T_p\mathcal{M}$ eine Orthonormalbasis (ONB) von $T_p\mathcal{M}$. Dann ist der *Gradient $\nabla^{\mathcal{M}} f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$* von f definiert durch:

$$\nabla^{\mathcal{M}} f(p) := \sum_{i=1}^n (D_{\tau_i} f) \tau_i.$$

Man überzeugt sich schnell davon, dass die Definition nicht von einer speziellen Wahl von $(\tau_i)_{i=1}^n$ abhängt. Da nach Definition 2.2 f die Einschränkung von \bar{f} auf \mathcal{M} ist, kann man den Gradienten wiederum anders aufschreiben:

$$(3) \quad \nabla^{\mathcal{M}} f(p) = P_p \circ (\nabla^{\mathbb{R}^{n+k}} \bar{f}),$$

wobei $P_p: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow T_p\mathcal{M}$ orthogonale Projektion von \mathbb{R}^{n+k} in den $T_p\mathcal{M}$ und $\nabla^{\mathbb{R}^{n+k}} \bar{f}$ der gewöhnliche Gradient $(\partial_1 \bar{f}, \dots, \partial_{n+k} \bar{f})^T$ in \mathbb{R}^{n+k} sind. Das kann man sich deutlich machen, indem man für beliebiges, aber festes $p \in \mathcal{M}$ o.B.d.A $\mathbb{R}^n = T_p\mathcal{M}$ setzt.

2.6 Definition (Divergenz & Laplace)

Seien $X: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ ein C^1 -Vektorfeld, $(e_i)_{i=1}^{n+k}$ eine ausgewählte feste Orthonormalbasis von \mathbb{R}^{n+k} und $X^i = \langle X, e_i \rangle$, dann definieren wir die *Divergenz von X auf \mathcal{M}* durch:

$$(4) \quad \operatorname{div}_{\mathcal{M}} X := \sum_{i=1}^{n+k} \langle e_i, \nabla^{\mathcal{M}} X^i \rangle.$$

Man kann auch hier die Unabhängigkeit von der expliziten Wahl der festen Orthonormalbasis $(e_i)_{i=1}^{n+k}$ überprüfen, indem man bei einem Basiswechsel die Koordinaten X^i mittransformiert. Sei

$p \in \mathcal{M}$, dann gilt mit $X = \sum_{i=1}^{n+k} X^i \cdot e_i$ und $(\tau_i)_{i=1}^n \subset T_p\mathcal{M}$ als eine Orthonormalbasis von $T_p\mathcal{M}$ die Beziehung:

$$\operatorname{div}_{\mathcal{M}} X = \sum_{i=1}^{n+k} \left\langle e_i, \sum_{j=1}^n (D_{\tau_j} X^i) \tau_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \langle D_{\tau_j} X, \tau_j \rangle.$$

Den *Laplace-Beltrami-Operator* von f auf \mathcal{M} für eine C^2 -Funktion $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir als die Divergenz des Gradienten von f :

$$\Delta_{\mathcal{M}} f := \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \nabla^{\mathcal{M}} f.$$

In A.7 sieht man, dass diese Definition konsistent zu denen aus [Baer] und [LeeS] ist.

Wir kommen nun zu dem, auch als Gaußscher Integralsatz bezeichneten, Divergenzsatz für glatte Mannigfaltigkeiten. Dieser ist ein Satz der inneren Geometrie, somit beschränkt man sich auf die Tangentialvektorfelder. Die Bedeutung ist die Folgende: die Divergenz $\operatorname{div}_{\mathcal{M}} X$ misst die Ergiebigkeit der Quellen des Vektorfeldes X . Das innerhalb von \mathcal{M} „Produzierte“ oder „Vernichtete“ muss insgesamt über den Rand $\partial\mathcal{M}$ ab- oder reinfließen.

2.7 Satz (Tangentialer Divergenzsatz)

Sei $\overline{\mathcal{M}}$ der Abschluss von \mathcal{M} eine C^1 -glatte Mannigfaltigkeit mit C^1 -glatten Rand $\partial\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \setminus \operatorname{int} \mathcal{M}$, zudem sei $X: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ ein glattes Tangentialvektorfeld, d.h. $X(p) \in T_p\mathcal{M}$, mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} X = \overline{\{p \in \mathcal{M} \mid X(p) \neq 0\}}$. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}_{\mathcal{M}} X \, d\mathcal{H}^n = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

wobei $\nu: \partial\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ das äußere Einheitsnormalenvektorfeld an dem Rand $\partial\mathcal{M}$ ist.

Beweis: Den Beweis kann man in [LeeS] ausführlich studieren. ■

Nun kommen wir zu einer Größe der eingebetteten Geometrie, die, grob gesagt, beschreibt, wie sich der Normalenraum $T_p\mathcal{M}^{\perp}$ in ausgewählte Richtungen aus dem $T_p\mathcal{M}$ verändert, und damit auch die Krümmung definiert. Für viele Situationen ist es zu viel Information, sodass wir daraus weitere einfachere Krümmungsbegriffe ableiten werden.

2.8 Definition (Zweite Fundamentalform)

Sei \mathcal{M} wenigstens C^2 -glatt, dann können wir die *zweite Fundamentalform* von \mathcal{M} definieren als eine symmetrische Bilinearform $\mathbf{A}_p: T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow (T_p\mathcal{M})^{\perp}$ in p :

$$\mathbf{A}_p(\tau, \eta) := - \sum_{i=1}^k \left\langle \eta, D_{\tau} \nu^i \right\rangle \nu^i \Big|_p, \quad \tau, \eta \in T_p\mathcal{M},$$

dabei sind ν^1, \dots, ν^k in der Umgebung $U \cap \mathcal{M}$ von p definierte C^1 -Vektorfelder, die für jedes $z \in U \cap \mathcal{M}$ eine Orthonormalbasis von $(T_z\mathcal{M})^{\perp}$ bilden (mehr dazu in A.3). Zudem überzeugt man sich schnell, dass \mathbf{A}_p von der Wahl der ν^1, \dots, ν^k unabhängig ist. Die Symmetrie bzgl. Vertauschung von ν und τ kann man im Anhang A.5 nachlesen. Außerdem definieren wir das *Betragsquadrat der zweiten Fundamentalform* mit:

$$(5) \quad |\mathbf{A}|^2(p) := \sum_{ij} |\mathbf{A}_p(\tau_i, \tau_j)|^2,$$

wobei $(\tau_i)_{i=1}^n$ eine Orthonormalbasis von $T_p\mathcal{M}$ ist, die beliebig gewählt werden kann.

Haben wir $\text{codim } \mathcal{M} = 1$, d.h. der Normalraum $T_p\mathcal{M}^\perp$ ist eindimensional, und existiert noch zusätzlich ein globales *Einheitsnormalenfeld* N , dann definieren wir die *skalare zweite Fundamentalform* $A_p: T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$(6) \quad A_p(\eta, \tau) := \langle \mathbf{A}_p(\eta, \tau), N \rangle = -\langle \eta, D_\tau N \rangle \langle N, N \rangle = -\langle \eta, D_\tau N \rangle,$$

wobei $\eta, \tau \in T_p\mathcal{M}$. Analog haben wir das Betragsquadrat von A mit τ_1, \dots, τ_n als eine ONB von $T_p\mathcal{M}$

$$|A|^2(p) := |\mathbf{A}|^2(p) = \sum_{ij} |A_p(\tau_i, \tau_j)|^2.$$

2.9 Bemerkung (Geometrische Bedeutung)

Die geometrische Bedeutung der zweiten Fundamentalform versteht man zum Teil durch Betrachtung einer C^2 -Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = \tau \in T_p\mathcal{M}$. Dann gilt nämlich:

$$\mathbf{A}_p(\tau, \tau) = (\ddot{\gamma}(0))^\perp = \sum_{i=1}^k \langle \ddot{\gamma}(0), \nu^i \rangle \nu^i,$$

wobei ν_i durch A.3 gegeben ist. $\mathbf{A}_p(\tau, \tau)$ ist also nichts anderes als die Normalkomponente der Beschleunigung zu \mathcal{M} von der Raumkurve γ in \mathbb{R}^{n+k} . Um das zu zeigen nutzt man aus, dass für $|t| < \varepsilon$ gilt: $\langle \nu^i \circ \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \equiv 0$. Differenziert man die Beziehung, so folgt:

$$\langle \nu^i(p), \ddot{\gamma}(0) \rangle = -\langle D_\tau \nu^i, \tau \rangle.$$

Anschließend multipliziert man beide Seiten mit $\nu^i(p)$ und summiert über $i = 1, \dots, k$

$$(\ddot{\gamma}(0))^\perp = \sum_{i=1}^k \langle \nu^i(p), \ddot{\gamma}(0) \rangle \nu^i(p) = -\sum_{i=1}^k \langle D_\tau \nu^i, \tau \rangle \nu^i(p) = \mathbf{A}_p(\tau, \tau).$$

Eine Methode Information über Krümmung zu reduzieren, ist Spurbildung, denn man kann mit Hilfe von A.6 feststellen, dass im Grunde ein Mittelwert gebildet wird:

$$\text{Spur}(\mathbf{A}_p) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_p(\tau_i, \tau_i) = \frac{1}{\omega_n} \int_{T_p\mathcal{M}, |\tau|=1} \mathbf{A}_p(\tau, \tau) \, d\mathcal{H}^{n-1}(\tau).$$

Hier sind $(\tau_i)_{i=1}^n$ eine ONB von $T_p\mathcal{M}$ und ω_n das Volumen einer n -dimensionalen Einheitskugel.

2.10 Definition (Mittlere Krümmung)

Sei \mathcal{M} mindestens C^2 -glatt, der *Vektor der mittleren Krümmung* ist dann die Spur der zweiten Fundamentalform:

$$(7) \quad \mathbf{H}(p) := \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_p(\tau_i, \tau_i) \in (T_p\mathcal{M})^\perp,$$

mit τ_1, \dots, τ_n als eine Orthonormalbasis von $T_p\mathcal{M}$. Oft befindet sich der Faktor $1/n$ vor der Summe, den wir hier einfachheitshalber weglassen. Ist $\text{codim } \mathcal{M} = 1$, nehmen wie analog zu der skalaren zweiten Fundamentalform die *skalare mittlere Krümmung*, also sei $H: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(8) \quad H(p) := \langle \mathbf{H}, N \rangle(p) = \sum_{i=1}^n A_p(\tau_i, \tau_i).$$

Eine interessante Verbindung hat die mittlere Krümmung zu *Minimalflächen*, also Flächen die kritische Punkte des Flächeninhalts sind. So kann man über die erste Variation des Flächeninhalts herleiten, dass Minimalflächen notwendigerweise $\mathbf{H} \equiv 0$ erfüllen (nachzulesen in [Sim1]).

Jetzt wollen wir den Divergenzatz für allgemeine, nicht nur zwingend tangential, Vektorfelder an einer kompakten C^2 -Mannigfaltigkeit \mathcal{M} betrachten, d.h wir lassen die Bedingung $X_p \in T_p\mathcal{M}$ fallen.

2.11 Satz (Allgemeiner Divergenzatz)

Sei \mathcal{M} eine C^2 -Mannigfaltigkeit mit einem C^2 -glatten $(n-1)$ -dimensionalen Rand $\partial\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \setminus \text{int } \mathcal{M}$ und ν der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor an $\partial\mathcal{M}$. Außerdem sei X ein C^1 -Vektorfeld an \mathcal{M} mit kompaktem Träger in \mathcal{M} , dann gilt:

$$(9) \quad \int_{\mathcal{M}} \text{div}_{\mathcal{M}} X \, d\mathcal{H}^n = - \int_{\mathcal{M}} \langle X, \mathbf{H} \rangle \, d\mathcal{H}^n + \int_{\partial\mathcal{M}} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Beweis: Wir gehen wie in [Sim1, Seiten 45-45] vor. Als erstes zerlegen wir X in jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ in seinen Tangential- und Normalanteil, dazu seien ν^1, \dots, ν^k nach A.3 C^1 -glatte Vektorfelder, die in einer zu \mathcal{M} relativen Umgebung $V \cap \mathcal{M}$ von p für jedes $z \in V \cap \mathcal{M}$ eine Orthonormalbasis von $T_z\mathcal{M}^\perp$ bilden. Dann seien:

$$X^\perp := \sum_{j=1}^k \langle \nu^j, X \rangle \nu^j \quad \text{und} \quad X^\top := X - X^\perp$$

C^1 -glatte globale Vektorfelder, unabhängig von der expliziten Wahl von ν^1, \dots, ν^k . Da wir mit dem Satz 2.7 eine Aussage für das Tangentialvektorfeld X^\top haben, konzentrieren wir uns auf X^\perp . Wir werten $\text{div}_{\mathcal{M}} X^\perp$ in p aus, so sei mit τ_1, \dots, τ_n ONB von $T_p\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \text{div}_{\mathcal{M}} X^\perp(p) &= \sum_{i=1}^n \left\langle D_{\tau_i} \left[\sum_{j=1}^k \langle \nu^j, X \rangle \nu^j \right], \tau_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \left\langle \frac{d}{dt} \left[\left\langle \nu^j, X \right\rangle \circ \gamma_i(t) \right]_{t=0}, \tau_i \right\rangle, \end{aligned}$$

wobei $\gamma_i: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$, $\gamma_i(0) = p$, $\dot{\gamma}_i(0) = \tau_i$ eine C^1 -Kurve ist,

$$\begin{aligned} \text{div}_{\mathcal{M}} X^\perp(p) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \left\{ \frac{d}{dt} \left[\langle \nu^j, X \rangle \circ \gamma_i(t) \right]_{t=0} \underbrace{\langle \nu^j(p), \tau_i \rangle + \langle \nu^j, X \rangle}_0 \Big|_p \cdot \left\langle D_{\tau_i} \nu^j, \tau_i \right\rangle \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^k \langle \tau_i, D_{\tau_i} \nu^j \rangle \nu^j, X(p) \right\rangle = - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{A}_p(\tau_i, \tau_i), X(p) \rangle \\ &= -\langle \mathbf{H}, X \rangle(p). \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität von $\text{div}_{\mathcal{M}}(\cdot)$ ist $\text{div}_{\mathcal{M}} X = \text{div}_{\mathcal{M}} X^\top + \text{div}_{\mathcal{M}} X^\perp$, und aus Satz 2.7 folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \text{div}_{\mathcal{M}} X \, d\mathcal{H}^n &= \int_{\mathcal{M}} \text{div}_{\mathcal{M}} X^\top \, d\mathcal{H}^n + \int_{\mathcal{M}} \text{div}_{\mathcal{M}} X^\perp \, d\mathcal{H}^n \\ &\stackrel{2.7}{=} \int_{\partial\mathcal{M}} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\mathcal{M}} \langle X, \mathbf{H} \rangle \, d\mathcal{H}^n. \end{aligned}$$

Später werden wir uns mit glatten zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^3 , also Flächen, beschäftigen. Für diese hat man einen zusätzlichen klassischen Krümmungsbegriff, der aus der inneren Geometrie der Fläche hervorgeht, d.h. komplett durch ihre intrinsische Metrik festgelegt wird.

2.12 Definition (Gaußsche Krümmung)

Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ eine C^2 -glatte Fläche, $p \in \mathcal{M}$ und τ_1, τ_2 eine ONB von $T_p\mathcal{M}$. Dann ist die *Gaußsche Krümmung* in p :

$$\mathcal{K}(p) := A_p(\tau_1, \tau_1)A_p(\tau_2, \tau_2) - A_p(\tau_1, \tau_2)^2.$$

In A.7 kann man sehen, dass diese Definition zu derjenigen, die \mathcal{K} als Determinante der Weingartenabbildung ($W = -dN$, N Normalenfeld) definiert, äquivalent ist.

2.13 Bemerkung

Man kann den Betrag der Gaußschen Krümmung mit $|A|^2$ abschätzen. Mit der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel ($\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$, falls $a, b > 0$) erhalten wir:

$$(10) \quad |\mathcal{K}|(p) \leq \frac{1}{2}(A_p(\tau_1, \tau_1)^2 + A_p(\tau_2, \tau_2)^2) + A_p(\tau_1, \tau_2)^2 = \frac{1}{2}|A|^2(p).$$

Außerdem bekommt man eine weitere sehr nützliche Identität, die die Gaußsche Krümmung zusätzlich noch mit der skalaren mittleren Krümmung in Zusammenhang bringt:

$$(11) \quad \begin{aligned} H^2(p) - 2\mathcal{K}(p) &= A_p(\tau_1, \tau_1)^2 + 2A_p(\tau_1, \tau_1)A_p(\tau_2, \tau_2) + A_p(\tau_2, \tau_2)^2 \\ &\quad - 2A_p(\tau_1, \tau_1)A_p(\tau_2, \tau_2) + 2A_p(\tau_1, \tau_2)^2 \\ &= |A|^2(p). \end{aligned}$$

Daraus stellt man fest, dass man den Betrag der mittleren Krümmung mit dem Betrag der zweiten Fundamentalform abschätzen kann:

$$(12) \quad H^2(p) \leq |A|^2(p) + 2|K|(p) \stackrel{(10)}{\leq} 2|A|^2(p).$$

Weiterhin wird für den Randterm ein weiterer Krümmungsbegriff benötigt. Der Rand einer Fläche ist in diesem Fall durch eine Kurve gegeben.

2.14 Definition (Geodätische Krümmung)

Seien $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ eine C^2 -glatte *orientierbare* Fläche, d.h. es existiert ein globales Einheitsnormalenfeld N , und $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ eine glatte nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, also $|\gamma'(s)| \equiv 1$. Wir wählen den Einheitsvektor

$$\nu(s) := N(\gamma(s)) \times \gamma'(s) \in T_{\gamma(s)}\mathcal{M},$$

sodass $\{\gamma'(s), \nu(s), N \circ \gamma(s)\}$ eine positiv orientierte ONB des \mathbb{R}^3 und $(\nu(s), \gamma'(s))$ eine ONB von $T_{\gamma(s)}\mathcal{M}$ sind. Die *Krümmung der Kurve* ist dann nach [Baer]: $\kappa(s) = |\gamma''(s)|$ und die *geodätische Krümmung von γ* ist der tangentielle Teil der Gesamtkrümmung:

$$\kappa_g(s) := \langle \gamma''(s), \nu(s) \rangle.$$

Wir werden außerdem den ersten lokal-globalen Satz für Flächen, nämlich den Satz von Gauß-Bonnet brauchen. Er ist lokal-global in dem Sinne, dass er zwei sehr unterschiedliche Quantitäten verbindet, einmal die von der lokalen Geometrie abhängige Gaußsche Krümmung und die von der globalen Topologie abhängige *Euler-Charakteristik* $\chi(\mathcal{M})$ von \mathcal{M} , die wir über Triangulierungen definieren werden.

Ist nämlich \mathcal{M} eine kompakte C^2 -glatte Fläche, dann besitzt \mathcal{M} nach [Rad] eine *glatte Triangulierung* (S, Φ) , d.h. es gibt ein $S = \bigcup_{i=1}^k \Delta_i$, sodass Δ_i Dreiecke (konvexe Hülle dreier nicht auf einer Geraden liegenden Punkte) sind, die sich gegenseitig nur entweder in gemeinsamen Ecken oder Kanten schneiden können. Weiterhin gibt es einen Homöomorphismus $\Phi: S \rightarrow \mathcal{M}$, sodass $\Phi|_{\Delta_i}: \Delta_i \rightarrow \Phi(\Delta_i)$ für jedes $j = 1, \dots, k$ ein C^2 -Diffeomorphismus ist. Anschaulich passiert das Folgende: Man zerschneidet \mathcal{M} in k gekrümmte Dreiecke, die sich nicht überlappen.

2.15 Definition (Euler-Charakteristik)

Sei \mathcal{M} eine kompakte C^2 -glatte Fläche mit oder ohne Rand, mit einer Triangulierung (S, Φ) , $S = \bigcup_{i=1}^k \Delta_i$. Dann nennen wir die *Euler-Charakteristik* von \mathcal{M} :

$$\chi(\mathcal{M}) := N_v - N_e + N_f,$$

wobei jeweils N_v die Anzahl der Ecken von S , N_e die Anzahl der Kanten und N_f die Anzahl der Facetten (Δ_i 's) von S sind.

Es ist ein wichtiges Resultat, dass $\chi(\mathcal{M})$ tatsächlich eine topologische Invariante, und somit unabhängig von der Wahl der Triangulierung ist (siehe [Sie, Theorem 13.3.1]). Für kompakte orientierbare zusammenhängende C^2 -Flächen mit C^2 -glattem Rand ist $\chi(\mathcal{M}) = 2 - 2g - r$, wobei g das Geschlecht, also maximale Anzahl von möglichen Schnitten entlang einfach geschlossener und disjunkter Kurven, so dass die zerschnittene Fläche zusammenhängend ist, und r die Anzahl der Randkomponenten als geschlossene Kurven sind (siehe [DHS, Seite 38]).

In dem Randterm von Gauß-Bonnet tauchen die geodätischen Krümmungen der Parametrisierungen der Randkurven auf. Diese Vorzeichen hängen von der Durchlaufrichtung der Parametrisierungen ab, also müssen wir in folgender Definition eine Richtung auszeichnen. Da \mathcal{M} orientierbar ist, haben wir nach [LeeS, Prop. 15.24] einen orientierbaren Rand $\partial\mathcal{M}$ mit einer Orientierung gegeben durch nach außen gerichtete Vektorfelder an $\partial\mathcal{M}$.

2.16 Definition (Positive Orientierung)

Seien $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierbare C^2 -glatte Fläche mit C^2 -glattem Rand $\partial\mathcal{M}$, N das Einheitsnormalenfeld an \mathcal{M} und $\gamma: I \rightarrow \partial\mathcal{M}$ eine geschlossene Kurve. Weiterhin sei $\nu(s)$ wie in Definition 2.14, dann nennen wir γ *positiv orientiert*, falls ν das *nach innen gerichtete Normalenfeld entlang $\gamma(I) \subset \partial\mathcal{M}$* ist.

2.17 Satz (Gauß-Bonnet)

Sei \mathcal{M} eine kompakte C^2 -glatte Fläche mit C_1, \dots, C_ℓ C^2 -glatte geschlossene Kurven, die den Rand $\partial\mathcal{M}$ formen. Dann gilt:

$$(GB) \quad \int_{\mathcal{M}} \mathcal{K} \, d\mathcal{H}^2 + \sum_{i=1}^{\ell} \int_{C_i} \kappa_g(s) \, ds = 2\pi\chi(\mathcal{M}),$$

wobei die Randkomponenten $\{C_i\}_{i=1}^n$ *positiv orientiert zu \mathcal{M} parametrisiert sein müssen*.

Beweis: Den Beweis findet man in [Carm]. ■

Hier haben wir den Satz von Gauß-Bonnet nur für den ambienten Raum \mathbb{R}^3 , es gibt aber auch Verallgemeinerungen auf höhere Kodimensionen (siehe den Abschnitt „The Gauss–Bonnet Theorem“ in [LeeR]).

2.2. Flächen- & Koflächenformel

Im späteren Verlauf werden wir wichtige Werkzeuge aus der geometrischen Integrationstheorie brauchen: die Flächen- und Koflächenformel. Deren Bedeutung ist die Folgende: Hat man eine Lipschitz-Funktion f gegeben, so kann man ein Integral gewissermaßen in den Bildbereich von f umformulieren. Als erstes überlegen wir uns, wie Volumenelemente im Bild- und Urbereich von f miteinander in Beziehung stehen. Das erledigt die Jacobische von f .

2.18 Definition (Jacobische)

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in x differenzierbar mit $N \leq n$, dann nennen wir die N -dimensionale Jacobische von f in x :

$$(13) \quad J_N f(x) = \sup \left\{ \frac{\mathcal{H}^N(Df_x(P))}{\mathcal{H}^N(P)} \mid P \text{ ist ein } N\text{-dim. Parallelepipid in } \mathbb{R}^n \right\}.$$

Als erstes bemerke man, dass falls der Rang der Jacobi-Matrix von f in x kleiner als N ist, also $\text{rang } Df(x) < N$, gilt: $J_N f(x) = 0$. Dieses Objekt heißt nicht umsonst Jacobische, denn im Falle $n = m$, also in der Situation der multivariablen Analysis, gilt:

$$\text{für } n = m: \quad J_m f(x) = J_n f(x) = \left| \det(Df(x)) \right|,$$

da die Jacobi-Matrix $Df(x)$ hier $n \times n$ -quadratisch ist. Haben wir $n < m$, bildet also f in einen höherdimensionaleren Raum ab, dann haben wir mit der $m \times n$ -Jacobi-matrix $Df(x)$:

$$\text{für } n < m: \quad J_n f(x) = \sqrt{\det \left[(Df(x))^T \circ (Df(x)) \right]},$$

wobei hier T für transponierte Matrix steht. Für den Fall, dass $n > m$, also dass f in einen dimensional kleineren Raum abbildet, haben wir:

$$\text{für } n > m: \quad J_m f(x) = \sqrt{\det \left[(Df(x)) \circ (Df(x))^T \right]}.$$

Alle diese Resultate kann man in [Krz] nachvollziehen.

Kommen wir nun zu der Flächenformel, die gültig ist für den Fall, dass der Bildbereich höherdimensionaler als der Urbereich ist, also $n \leq m$. Den Begriff Fläche benutzen wir nicht ohne Grund, denn die Flächenformel verallgemeinert die Formel des Flächeninhalts einer Fläche auf höherdimensionale Untermannigfaltigkeiten mit Selbstdurchschneidungen.

2.19 Satz (Flächenformel)

Seien $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Lipschitz-Funktion mit $n \leq m$ und B eine Borelmenge des \mathbb{R}^n , dann gilt erstens:

$$(14) \quad \int_B J_n f(x) \, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \text{card}(B \cap f^{-1}(y)) \, d\mathcal{H}^n(y)$$

und zweitens haben wir für eine \mathcal{L}^n -messbare positive Funktion $g: B \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(15) \quad \int_B J_n f(x) \cdot g(x) \, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{x \in B \cap f^{-1}(y)} g(x) \, d\mathcal{H}^n(y).$$

Beweis: Für den Beweis schaue man in [Krz] nach. ■

Man sollte sich wegen der Verallgemeinerung auf die Lipschitz-Funktionen nicht zu viel sorgen, denn man kann mit dem Satz von Rademacher und dem Fortsetzungssatz von Whitney die Aussage von C^1 - auf die Lipschitz-Funktionen übertragen (siehe [Krz]).

Der Zusammenhang mit dem Flächeninhalt ist folgender: Wir setzen in Gleichung (14) $n = 2$ und stellen fest, dass für eine glatte Fläche $f(A)$ gilt: $\text{card}(A \cap f^{-1}(y)) = \chi(f(A))$, also steht auf der rechten Seite von (14) der Flächeninhalt von $f(A)$: $\mathcal{H}^2(f(A))$.

Kommen wir nun zu dem Fall, dass die Dimension des Bildes von f kleiner als die vom Urbereich ist, d.h. $n \geq m$. Die Koformel zu der Flächenformel ist dann die sogenannte Koflächenformel. Diese wird den Satz von Fubini für krummlinige Koordinaten verallgemeinern.

2.20 Satz (Koflächenformel)

Seien $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Lipschitz-Funktion, $n \geq m$ und B eine Borelmenge von \mathbb{R}^m , dann gilt erstens:

$$(16) \quad \int_B J_m f(x) \, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(B \cap f^{-1}(y)) \, d\mathcal{L}^m(y)$$

und zweitens haben wir für eine \mathcal{L}^m -messbare positive Funktion $g: B \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(17) \quad \int_B J_m f(x) \cdot g(x) \, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{B \cap f^{-1}(y)} g(x) \, d\mathcal{H}^{n-m}(x) \, d\mathcal{L}^m(y).$$

Beweis: Für den Beweis schaue man in [Krz] nach. ■

Im Fall $m = n$ stimmen die Koflächen- und Flächenformel überein, da auch die Jacobische in beiden Fällen nach 2.18 gleich $|\det(Df(x))|$ ist, sodass man die *Transformationsformel* hat. Weiter gilt: Wenn man als Funktion eine orthogonale Projektion $f: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ für $n > m$ in die ersten m Koordinaten wählt, so entpuppt sich die Koflächenformel als *Satz von Fubini*.

2.21 Bemerkung ($n = m = 1$)

Einen Spezialfall der Koflächenformel und Flächenformel mit $n = m = 1$ werden wir im Satz 4.2 benutzen. So sei $[a, b]$ ein Intervall mit $a < b$ und $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, dann ist f eine Lipschitz-Funktion auf $[a, b]$, und es gibt eine Lipschitz-stetige Fortsetzung \bar{f} von f auf \mathbb{R} mit gleichen Lipschitz-Konstante (siehe [Sim1, Theorem 5.1]). Wir wenden (16) auf \bar{f} mit $A \subset [a, b]$ anwenden, dazu berechnen wir die Jacobische auf (a, b) :

$$J_1 \bar{f}(x) = J_1 f(x) = \left| \det(Df(x)) \right| = \left| \frac{d}{dx} f(x) \right|, \quad \forall x \in (a, b).$$

Schließlich folgt für ein $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ und eine Borelmenge $B \subset [a, b]$:

$$(18) \quad \int_B \left| \frac{d}{dx} f(x) \right| dx = \int_{\mathbb{R}} \text{card}(B \cap f^{-1}(y)) dy.$$

Man kann die Flächen- und Koflächenformel auch für C^1 -Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n wie in Definition 2.1 gewinnen. Dazu braucht man eine sinnvolle Definition von einer Jacobischen auf Untermannigfaltigkeiten. Diese wird analog zu (13) definiert:

2.22 Definition (Jacobische auf Untermannigfaltigkeiten)

Seien \mathcal{M} eine n -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} , $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x \in \mathcal{M}$ differenzierbar bzgl. \mathcal{M} und $N \leq n$. Dann nennen wir $J_N^{\mathcal{M}} f(x)$ die N -dimensionale Jacobische von f bzgl. \mathcal{M} bei x :

$$(19) \quad J_N^{\mathcal{M}} f(x) = \sup \left\{ \frac{\mathcal{H}^N(\mathrm{d}f_x(P))}{\mathcal{H}^N(P)} \mid P \text{ ist ein } N\text{-dim. Parallelepipede in } T_x\mathcal{M} \right\},$$

wobei $\mathrm{d}f_x$ in (2) definiert wurde. Weiterhin haben wir folgende Beziehungen für Volumenverhältnisse:

$$\text{für } n \leq m: \quad J_n^{\mathcal{M}} f(x) \cdot \mathcal{H}^n(P) = \mathcal{H}^n(\mathrm{d}f_x(P)),$$

für alle n -dim. Parallelepipede P in $T_x\mathcal{M}$ und ähnlich:

$$\text{für } n \geq m: \quad J_m^{\mathcal{M}} f(x) \cdot \mathcal{H}^m(P) = \mathcal{H}^m(\mathrm{d}f_x(P)),$$

für alle m -dim. Parallelepipede P , die im bzgl. $T_x\mathcal{M}$ orthogonalen Komplement von $\ker \mathrm{d}f_x = \{y \in T_x\mathcal{M} \mid \mathrm{d}f_x(y) = 0\}$ enthalten sind.

2.23 Satz (Koflächenformel für Untermannigfaltigkeiten)

Seien \mathcal{M} eine n -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} , $n \geq m$ und $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Abbildung. Sei g eine positive \mathcal{H}^n -messbare Funktion auf \mathcal{M} , dann gilt für alle Borelmengen $B \subset \mathbb{R}^m$:

$$(20) \quad \int_B J_m^{\mathcal{M}} f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{B \cap f^{-1}(y)} g \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-m} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^m(y).$$

Beweis: Den Beweis kann man in [Sim1] und [Krz] nachlesen. ▀

2.24 Bemerkung (slicing)

Diesen Satz werden wir später in 4.2 anwenden. Insbesondere werden wir dort eine Fläche \mathcal{M} wie mit einem Eierschneider in eine Richtung $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ in die y -Niveaulinien $\{x \in \mathcal{M} \mid \langle x, e \rangle = y\}$ zerschneiden. Man sagt dazu auch „slicing“. Dafür brauchen wir einen Spezialfall der Koflächenformel, es sei nun $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) := \langle e, x \rangle.$$

Für diesen wollen wir die Jacobische bestimmen, hier ist $m = 1$ und damit sind die eindimensionalen Parallelepipede in $T_x\mathcal{M}$ einfach Strecken in $T_x\mathcal{M}$ oder einfach Vektoren aus dem $T_x\mathcal{M}$, also:

$$J_1^{\mathcal{M}} f(x) = \sup \left\{ \frac{|\mathrm{d}f_x(v)|}{|v|} \mid v \in T_x\mathcal{M} \right\} = \sup \left\{ |\mathrm{d}f_x(v)| \mid v \in T_x\mathcal{M}, |v| = 1 \right\}.$$

Sei $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ eine C^1 -Kurve so, dass $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = v$ gilt, haben wir wegen 2.4:

$$|\mathrm{d}f_x(v)| = |D_v f| = \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\gamma(s)) \Big|_{s=0} \right| = |\langle e, \gamma'(0) \rangle| = |\langle e, v \rangle|.$$

Also haben wir eine einfache Darstellung als Maß der Projektion von e in den Tangentialraum $T_x\mathcal{M}$

$$(21) \quad J_1^{\mathcal{M}} f(x) = \sup \left\{ |\langle e, v \rangle| \mid v \in T_x\mathcal{M}, |v| = 1 \right\} \leq 1.$$

Man bemerke insbesondere, dass man die Jacobische mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung nach oben durch 1 abschätzen kann. Schließklich erhalten wir:

$$(22) \quad \int_{\mathcal{M}} \sup_{\substack{v \in T_x\mathcal{M} \\ |v|=1}} |\langle e, v \rangle| \cdot g(x) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{(e,y)=t\} \cap \mathcal{M}} g \, \mathrm{d}\mathcal{H}^1(y) \, \mathrm{d}t.$$

Als wichtige Folgerung werden wir Sard's-ähnliches Theorem so betrachten, wie wir es später brauchen werden, und wie es bei Simon [Sim1] als Theorem 10.4 erwähnt wird. Dieses sagt aus, dass wir beim slicen bis auf eine Nullmenge nur C^1 -Untermannigfaltigkeiten als Niveaumengen $f^{-1}(y)$ haben. Insbesondere scheidet für fast alle $y \in f(\mathcal{M})$ die lokale Menge $\bar{f}^{-1}(y)$ (\bar{f} ist lokale Fortsetzung von f im Sinne von 2.2) \mathcal{M} transversal.

2.25 Lemma (Sard-ähnliches Theorem)

Seien \mathcal{M} eine n -dimensionale C^r -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} ohne Rand und $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n > m$ eine C^k -Funktion mit $k \leq r$, dann gilt für \mathcal{L}^m -fast alle $y \in f(\mathcal{M})$: $f^{-1}(y)$ kann in eine $(n-m)$ -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit ohne Rand und eine abgeschlossene Menge vom \mathcal{H}^{n-m} -Maß null zerlegt werden. Insbesondere gilt:

$$f^{-1}(y) = (f^{-1}(y) \setminus C) \cup (f^{-1}(y) \cap C),$$

wobei $C = \{x \in \mathcal{M}: J_m^{\mathcal{M}} f(x) = 0\}$, $\mathcal{H}^{n-m}(f^{-1}(y) \cap C) = 0$ und $f^{-1}(y) \setminus C$ eine $(n-m)$ -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit ohne Rand für \mathcal{L}^m -fast alle $y \in f(\mathcal{M})$ sind.

Beweis: Wir wenden Koflächenformel (20) auf $B = C$ an. Dort ist $J_m^{\mathcal{M}} f = 0$, also:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(C \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^m(y).$$

Da $\mathcal{H}^{n-m}(C \cap f^{-1}(y)) \geq 0$, folgt $\mathcal{H}^{n-m}(C \cap f^{-1}(y)) = 0$ \mathcal{L}^m -fast überall für $y \in \mathbb{R}^m$.

Also beschränken wir uns auf die $y \in f(\mathcal{M})$, bei welchen $\mathcal{H}^{n-m}(C \cap f^{-1}(y)) = 0$ gilt. Sei $p \in f^{-1}(y) \setminus C$, da dort $J_m^{\mathcal{M}} f(p) \neq 0$ gilt, hat df_p den vollen Rang m . Hier gehen wir ähnlich wie in [Tu] vor. Weil \mathcal{M} eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand des \mathbb{R}^{n+k} ist, existieren

$$\bar{\varphi} \in C^r(U; \mathbb{R}^{n+k}), \quad \bar{\varphi}(U \cap \mathbb{R}^n) = V \cap \mathcal{M}, \quad \bar{\varphi}(0) = p,$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine Umgebung von 0 in \mathbb{R}^{n+k} , V eine Umgebung in \mathbb{R}^{n+k} und außerdem $\partial_1 \bar{\varphi}(0), \dots, \partial_{n+k} \bar{\varphi}(0)$ linear unabhängig sind. Seien $\tilde{W} \subset V$ eine Umgebung von p in \mathbb{R}^{n+k} und $\bar{f}: \tilde{W} \rightarrow \mathbb{R}^m$ die C^k -glatte Fortsetzung von f wie in A.2. Wir setzen $\tilde{U} := \bar{\varphi}^{-1}(\tilde{W})$ und betrachten die C^k -glatte Abbildung $\bar{f} \circ \bar{\varphi}$ mit einer Teilmatrix deren Jacobi-Matrix also

$$\bar{f} \circ \bar{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \text{und die } m \times n \text{ Matrix } \left(\frac{\partial(\bar{f} \circ \bar{\varphi})^i}{\partial x^j}(0) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Die Teilmatrix der Jacobi-Matrix hat in 0 wegen $J_m^{\mathcal{M}} f(p) \neq 0$ den Rang m . Nach Ummummerierung können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Matrix

$$\left(\frac{\partial(\bar{f} \circ \bar{\varphi})^i}{\partial x^j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq m}$$

den vollen Rang m hat. Wir finden dann $S \subset \mathbb{R}^m$ und $Q \subset \mathbb{R}^{n+k-m}$ Umgebungen von 0 mit $S \times Q \subset \tilde{W}$, so dass $(x^1, \dots, x^m) \in S$ und $(x^{m+1}, \dots, x^{n+k}) \in Q$ und schränken dann \bar{f} auf $S \times Q$ ein. Anschließend wenden wir den Satz über die implizite Funktion [Dieu, Theorem 10.2.3] an und erhalten, dass $\exists S_0 \subset S, Q_0 \subset Q$ offene Umgebungen von $s_0 = 0, q_0 = 0$ und eine eindeutige C^k -Funktion $F: Q_0 \rightarrow S_0$ mit:

$$\{(s, q) \in S_0 \times Q_0 \mid \bar{f} \circ \bar{\varphi}(w, q) = y\} = \{(F(q), q) \mid q \in Q_0\}.$$

Insbesondere gilt mit der Notation $\{0\}^k = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$:

$$(23) \left\{ (s, q) \in S_0 \times Q_0 \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^k) \mid f \circ \bar{\varphi}(w, q) = y \right\} = \left\{ (F(q), q) \mid q \in Q_0 \cap (\mathbb{R}^{n-m} \times \{0\}^k) \right\}.$$

Durch weiteres Verkleinern der Umgebungen S_0 und Q_0 auf \widehat{S}_0 und \widehat{Q}_0 können wir erreichen, dass $s + F(q) \in S_0, \forall (s, q) \in \widehat{S}_0 \times \widehat{Q}_0 \subset S_0 \times Q_0$. Wir setzen $\widehat{\varphi}: \widehat{S}_0 \times \widehat{Q}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ als eine C^k -glatte Abbildung mit $\widehat{\varphi}(s, q) := (s + F(q), q)$. Dann ist deren Jacobi-Matrix:

$$D\widehat{\varphi}(s, q) = D\bar{\varphi}(s + F(q), 1) \circ \begin{pmatrix} 1 & DF \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (s, q),$$

und es gilt $\det \widehat{\varphi}(0) = \det \bar{\varphi}(0) \cdot 1 \neq 0$. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung [Dieu, Theorem 10.2.5] gibt eine Umgebung $U_b \subset \widehat{S}_0 \times \widehat{Q}_0$, sodass $\widehat{\varphi}|_{U_b}: U_b \rightarrow \widehat{\varphi}(U_b)$ ein Diffeomorphismus ist. Es folgt:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}\left(U_b \cap (\{0\}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \times \{0\}^k)\right) &= \bar{\varphi}\left(\left\{ (F(0, x), x, \{0\}^k) \mid (\{0\}^m, x, \{0\}^k) \in U_b \right\}\right) \\ &\stackrel{(23)}{=} f^{-1}(y) \cap \widehat{\varphi}(U_b) \end{aligned}$$

D.h., dass $f^{-1}(y) \setminus C$ eine $(n - m)$ -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit ohne Rand um p ist. Diese Aussage gilt für alle $p \in f^{-1}(y) \setminus C$. ■

Der eigentliche Satz von Sard erfordert mehr Glattheit, liefert dafür aber ein stärkeres Resultat, das wir auch später im Satz 4.2 benutzen werden. Für die Begriffe sehe man [LeeS] und [Str] an.

2.26 Definition (Kritischer Punkt & Wert)

Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} C^r -Mannigfaltigkeiten, $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine C^r -Funktion. Wir sagen: $p \in \mathcal{M}$ ist ein *regulärer Punkt* von f , falls $df_p: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}$ surjektiv ist, anderenfalls nennen wir p einen *kritischen Punkt* von f . Weiterhin sagen wir: $c \in \mathcal{N}$ ist ein *regulärer Wert* von f , falls alle Punkte aus $f^{-1}(c)$ reguläre Punkte sind, anderenfalls nennen wir c einen *kritischen Wert* von f .

Insbesondere gilt, falls $\dim \mathcal{M} < \dim \mathcal{N}$, dass jeder Punkt aus \mathcal{M} ein kritischer Punkt von f ist.

2.27 Satz (von Sard)

Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} C^r -Mannigfaltigkeiten der Dimensionen jeweils n_1 und n_2 . Außerdem sei $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine C^r -Funktion, und

$$r \geq \max(n_1 - n_2, 0) + 1,$$

dann haben die kritischen Werte von f Maß null, d.h. die Menge der kritischen Werte ist eine Nullmenge in Koordinaten.

Beweis: Siehe [LeeS] und [Str]. ■

Man kann weiterhin feststellen, dass die Glattheitsanforderung $r \geq \max(n_1 - n_2, 0) + 1$ notwendig ist. So konnten Whitney in [Whit] und Sard in [Sard] Gegenbeispiele konstruieren, die auf einer Funktion basieren, die nicht konstant auf einer zusammenhängenden Menge kritischer Punkte ist.

Nun verschärfen wir das Resultat von Lemma 2.25. Wir stellen nämlich fest, dass falls \mathcal{M} und f C^{n-N+1} -glatt und $\mathcal{N} = \mathbb{R}^N$ sind, dann ist wegen des obigen Satz 2.27 df_x surjektiv und somit auch $J_m^M f(x) > 0 \forall x \in f^{-1}(y)$, sowie $f^{-1}(y) \cap C = \emptyset$, für \mathcal{L}^N -fast alle y . Insgesamt können wir dann folgern:

2.28 Folgerung

Sei \mathcal{M} eine n -dimensionale C^{n-N+1} -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} ohne Rand, $n > N > 0$ und $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine C^{n-N+1} -Funktion, dann gilt für \mathcal{L}^N -fast alle $y \in f(\mathcal{M})$: $f^{-1}(y)$ ist eine $(n-N)$ -dimensionale C^{n-N+1} -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} ohne Rand.

2.29 Bemerkung (Jordansche Kurve)

Jetzt schauen wir uns den Spezialfall an, in dem \mathcal{M} eine kompakte C^2 -Fläche ($n = 2, N = 1$) mit endlichem Flächeninhalt $|\mathcal{M}|$ ist, und fahren weiter mit mit Bemerkung 2.24 fort. Es sei für ein festes $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ die Abbildung $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \langle x, e \rangle$. So ist wegen:

$$\infty > |\mathcal{M}| \geq \int_{\mathcal{M}} \sup_{\substack{v \in T_x \mathcal{M} \\ |v|=1}} |\langle e, \tau \rangle| \, d\mathcal{H}^2(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^1(\{(e, y) = t\} \cap \mathcal{M}) \, dt,$$

$\mathcal{H}^1(\{(e, y) = t\} \cap \mathcal{M}) < \infty$ für fast alle t . Im Weiteren beschränken wir uns nur auf diesen Fall. Da nun f C^2 -glatt ist, können wir aus der vorherigen Folgerung 2.28 ableiten, dass $\{(e, y) = t\} \cap \text{int } \mathcal{M}$ für fast alle $t \in f(\mathcal{M})$ eine eindimensionale C^2 -Untermannigfaltigkeit ist, die keine Selbstüberschneidungen besitzt. Nur diese t betrachten wir.

Sei nun J_t eine Zusammenhangskomponente von $\{(e, y) = t\} \cap \text{int } \mathcal{M}$ mit der Länge $\mathcal{H}^1(J_t) = L < \infty$. Zusammenhängend bedeutet für eine glatte Mannigfaltigkeit auch wegzusammenhängend (siehe [LeeS] und insbesondere [LeeT]), d.h. es gibt für je zwei Punkte $y_1, y_2 \in J_t$ einen stetigen Weg:

$$\gamma: [a, b] \rightarrow J_t \quad \text{mit} \quad \gamma(a) = y_1 \text{ und } \gamma(b) = y_2.$$

Insbesondere bedeutet das, dass J_t eine C^2 -glatte Kurve ist, denn jeder Punkt lässt sich durch den Wegzusammenhang zur Kurve γ dazu verbinden. Genauer: Sei γ wie oben ersteinmal fest, aber nach der Bogenlänge parametrisiert, und $|[a, b]| \leq L$. Man erreicht jeden Punkt $x \in J_t$, indem man γ nach der Bogenlänge fortsetzt, und somit a verkleinert oder b vergrößert. So gilt auch o.B.d.A $\gamma((0, L)) \subset J_t$, ansonsten verschiebe a und b um einen gemeinsamen Wert.

Sei nun $\{(e, y) = t\} \cap \partial \mathcal{M} = \emptyset$. Wegen der Stetigkeit von $y \mapsto \langle e, y \rangle$ ist dann auch

$$\left\langle \lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x), e \right\rangle = t, \quad \left\langle \lim_{x \rightarrow L} \gamma(x), e \right\rangle = t.$$

D.h. wir können γ so erweitern, dass $\gamma([0, L]) \subset J_t$, $\mathcal{H}^1(\gamma([0, L])) = L$.

Angenommen $\gamma(0) \neq \gamma(L)$, weil J_t eine C^2 -glatte Untermannigfaltigkeit ohne Rand ist, so gibt es eine Umgebung V um die $\gamma(0)$, so dass $\gamma(L) \notin V$ und nach Definition 2.1 $V \cap J_t = \varphi((c, d))$, wobei φ Parametrisierung einer C^2 -glatte Kurve ohne Selbstschnitte ist. D.h. nun dass man γ in der Umgebung V um eine bestimmte Länge fortsetzen kann, was im Widerspruch zu $\mathcal{H}^1(\gamma([0, L])) = L$ steht. Insgesamt ist somit J_t eine geschlossene C^2 -Jordankurve.

2.3. Willmore-Funktional

Mit den im vorhergehenden Abschnitt festgelegten Begriffen, können wir das Funktional definieren, das wir schließlich untersuchen wollen. Anschließend erwähnen wir einige Eigenschaften und Resultate.

2.30 Definition (Willmore-Funktional)

Sei nun \mathcal{M} eine zweidimensionale C^2 -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , d.h. eine *Fläche*. Dann nennen wir die *Willmore-Energie dieser Fläche* \mathcal{M}

$$(24) \quad \mathcal{W}(\mathcal{M}) = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} \mathbf{H}^2 \, d\mathcal{H}^2.$$

Dieses ist nach Thomas Willmore (1919-2005) benannt, einem Differentialgeometer, der dieses Funktional popularisierte, obwohl dieses Thema schon 1923 von Thomsen [Th] und 1929 von Blaschke [Bla] untersucht worden ist. Es gibt auch eine Formulierung ohne den Faktor $\frac{1}{4}$. Meistens hängt es davon ab, ob man in der Definition des Mittelkrümmungsvektors \mathbf{H} zusätzlich zur Mittelung noch halbiert oder nicht. Im Fall $n = 3$ ist es einfach mit Hilfe von A.7 (a) einzusehen, dass $|\mathbf{H}| = |\lambda_1 + \lambda_2|$, wobei λ_1, λ_2 die Hauptkrümmungen von \mathcal{M} und somit die Eigenwerte der Weingartenabbildung sind.

Darüber hinaus erweitert man gerne die Definition des Willmore-Funktional auf immergierte Flächen, um zum Beispiel auch Selbstdurchschneidungen zu erlauben. Sei Σ eine C^1 -glatte Fläche, dann ist $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ eine *Immersion*, falls für alle $p \in \Sigma$ dessen Differential $df_p: T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ injektiv ist. Falls Σ C^2 -glatt und f eine C^2 -glatte Immersion ist, definieren wir:

$$\mathcal{W}(f(\Sigma)) = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} \mathbf{H}^2 \, d\mu_g,$$

wobei $d\mu_g$ die durch $g = f^*g_{\text{eucl}}$, also durch das Pullback der euklidischen Metrik, induzierte Flächenform ist.

Gemäß der grundlegenden Frage der Variationsrechnung wollen wir kritische Punkte und insbesondere Minima des Funktional unter geeigneten Nebenbedingungen finden, wie zum Beispiel topologische Bedingungen oder Randbedingungen. Wir nennen diese auch *Willmore-Flächen*. Wegen $\mathcal{W}(\mathcal{M}) \geq 0$ sieht man schnell ein, dass Minimalflächen Willmore-Flächen sind, da für diese $\mathbf{H} \equiv 0$ gilt und somit deren Willmore-Energie gleich null ist. Weiterhin ist es sinnvoll die zu diesem Problem zugehörige Euler-Lagrange-Formel zu kennen, die man auch *Willmore-Gleichung* nennt.

2.31 Satz (Willmore-Gleichung)

Sei \mathcal{M} eine Willmore-Fläche, $\text{codim } \mathcal{M} = 1$, dann gilt die Gleichung

$$(W) \quad \frac{1}{2} \left\{ \Delta_{\mathcal{M}} H + 2H \left(\frac{1}{4} H^2 - \mathcal{K} \right) \right\} = 0,$$

$\Delta_{\mathcal{M}}$ ist dabei der Laplace-Beltrami-Operator auf \mathcal{M} .

Beweis: Siehe [Will]. ■

Die Gleichung (W) ist wegen der Abhängigkeit $\Delta_{\mathcal{M}}$'s von \mathcal{M} quasi-linear und von der vierten Ordnung, wie wir es zum Beispiel in der Gleichung (46) und der sich ihr anschließenden Diskussion explizit sehen werden. Wegen dieser Struktur ist die Handhabung von (W) nicht einfach.

Es gibt auch alternative Definitionen des Willmore-Funktional. Eins davon ist ergänzt durch das Integral über die Gaußsche Krümmung:

$$(25) \quad \mathcal{W}_{alt}(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{1}{4} \mathbf{H}^2 - \mathcal{K} \right) d\mathcal{H}^2.$$

Dieses Funktional \mathcal{W}_{alt} hat die interessante Eigenschaft, dass es unter konformen Transformationen des \mathbb{R}^n invariant bleibt [KS, 1.2 Conformal invariance], also insbesondere auch unter linearen Isometrien, Skalierungen ($x \mapsto \lambda x$ für $\lambda > 0$) und Inversionen an Sphären, deren Zentrum nicht in \mathcal{M} liegt (falls $0 \notin \mathcal{M}$, dann $x \mapsto x/|x|^2$).

Bei Variationsproblemen kann man sich einerseits auf *abgeschlossene Immersionen ohne Rand* beschränken. Dort sind Variationsprobleme für \mathcal{W} und \mathcal{W}_{alt} beim festen Geschlecht g äquivalent, denn nach dem Satz von Gauß-Bonnet 2.17 folgt, dass man das Integral über \mathcal{K} als konstant annehmen kann. Zu solchen „geschlossenen“ Flächen gibt es ein interessantes Resultat von Willmore, das mit der Suche nach Minimierern zusammenhängt [Will, Theorem 7.3.1]: Ist Σ eine orientierbare abgeschlossene Fläche ohne Rand, dann gilt für eine glatte Immersion $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$(26) \quad \mathcal{W}(f(\Sigma)) \geq 4\pi,$$

mit der Gleichheit genau dann wenn Σ als eine Sphäre eingebettet ist. Die Existenz von kompakten Willmore-Minimierern ohne Rand mit beliebigem vorgegebenen Geschlecht ergibt sich aus einer Arbeit von Simon [Sim1] zusammen mit der Arbeit von Bauer und Kuwert [BK].

Weiterhin wollen wir in dieser Arbeit *Flächen mit Rändern* betrachten und insbesondere *Randwertprobleme* für die Gleichung (W) untersuchen. Man studiert zum Beispiel *Dirichlet-Randwertprobleme*, in den man den Rand und den Tangentialraum der Fläche entlang des Randes festlegt. Schätzle hat in [Scha] über einen sehr allgemeinen Zugang, der aber nicht zu viel geometrische Information liefert, die Existenz von Willmore-Flächen unter vorgegebenen Dirichlet-Randdaten bewiesen. Ein weiteres Randwertproblem ist das von *Navier*. Dort legt man den Rand und die mittlere Krümmung auf dem Rand fest. Beide Randwertprobleme werden in Bemerkung 4.5 behandelt.

Man studiert Randwertprobleme auch im Zusammenhang mit Symmetrien. So haben die Autoren in [DDG] gezeigt, dass man Existenzresultate für Rotationsflächen unter Dirichlet-Randbedingungen hat, wobei auch in den Situationen Willmore-Lösungen existieren, für die sonst das klassische Katenoid als Minimalfläche nicht existieren würde.

Die Eindeutigkeit zu festen Randdaten ist im Allgemeinen nicht gegeben. Es lassen sich sogar Bifurkationen beobachten (siehe [DG1]). In bestimmten Situationen ist es aber Palmer in [Pal] bzw. Dall’Acqua in [Dall] gelungen, Eindeutigkeitsresultate für das Dirichletproblem zu zeigen.

Außerdem stellt man auch für Randwertprobleme fest, dass wegen Gauß-Bonnet \mathcal{W} und \mathcal{W}_{alt} äquivalent sind. Der Grund dafür ist einerseits festgehaltenes $\chi(\mathcal{M})$ und andererseits ein Randterm mit κ_g , den man wiederum mit den Randwerten kontrollieren kann, wie es später in Lemma 4.3 deutlich wird. Somit überträgt sich in diesem Sinne bei festen Randbedingungen die konforme Invarianz auf $\mathcal{W}(\mathcal{M})$.

Bei physikalischen Untersuchungen ist das Willmore-Funktional zum ersten mal im 19. Jahrhundert als elastische Energie in Modellen dünner Platten aufgetreten (siehe [Dah]). Eine ähnliche Rolle in Modellen biologischer Membranen spielt ein verwandtes Funktional, das sogenannte *Helfrich-Funktional*, das für eine glatte Immersion $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, die ein Volumen einschließt, oft als:

$$\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2}^{H_0}(f(\Sigma)) = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 d\mu_g - \lambda_1 \mu_g(\Sigma) + \lambda_2 \text{Vol } \Sigma,$$

wobei $\text{Vol } \Sigma$ das von $f(\Sigma)$ eingeschlossene Volumen ist, gesetzt wird (siehe [CW]). In der allgemeinen Relativitätstheorie taucht ein Willmore-Term in der *Hawking-Masse* auf. Dort definiert man für eine randlose Fläche Σ in einer dreidimensionalen Untermannigfaltigkeit \mathcal{M} der relativistischen Raumzeit:

$$m_H(\Sigma) := \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} \left(1 - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} H^2 \, dA \right).$$

Das ist nur einer von mehreren Versuchen einen Massebegriff einzuführen. So kann man feststellen, dass dieser sich mit anderen Massebegriffen in Zusammenhang bringen lässt [Scho]. In der String-Theorie taucht das Willmore-Funktional in „*Polyakov extrinsic action*“ als ein zusätzlicher Steifigkeitsterm in der Wirkung der Weltflächen auf (siehe dazu [Car]).

Außerdem findet das Willmore-Funktional Anwendung in der Bildverarbeitung. Insbesondere benutzt man den zugehörigen lokal Willmore-energieverringenden Gradientenfluss, auch *Willmore-Fluss* genannt. Sei $f_t: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine glatte Familie der Immersionen, dann sucht man gemäß (W) solche Familien, die mit N als Normalenfeld auf $f(\Sigma)$ die Gleichung:

$$\langle \partial_t f, N \rangle = -\frac{1}{2} \left\{ \Delta_{f(\Sigma)} H + 2H \left(\frac{1}{4} H^2 - \mathcal{K} \right) \right\}$$

für jeden Punkt in Σ erfüllen (siehe [DKS]). So kann man diesen Fluss benutzen, um verrauschte 3-D Figuren geschickt zu glätten, oder um zu versuchen die ursprüngliche Form beschädigter Skulpturen zu rekonstruieren [CDR].

3. Durchmesser-Abschätzung für kompakte Flächen ohne Rand

Für eine gegebene zusammenhängende Fläche im \mathbb{R}^n gibt es geometrische Ungleichungen, die grundlegende Größen wie Durchmesser, Krümmung und Oberfläche in Relation zueinander setzen. Zwei interessante Ergebnisse dazu hat Leon Simon in der Arbeit [Sim2] geliefert. Eines davon wird in diesem Abschnitt gezeigt. So werden wir uns in 3.3 auf kompakte Flächen ohne Rand beschränken und feststellen, dass man den *extrinsischen Durchmesser*

$$(27) \quad \text{diam } \mathcal{M} := \sup_{\substack{x \neq y, \\ y, x \in \mathcal{M}}} |x - y|,$$

gegen den Flächeninhalt $|\mathcal{M}|$ und die Willmore-Energie $\mathcal{W}(\mathcal{M})$ von oben und nach unten abschätzen kann. Als Vorarbeit braucht man das folgende Lemma, dessen Beweis den Rechnungen auf den Seiten 285 und 286 aus [Sim2] folgt. Wir benutzen offene Kugeln:

$$B_\rho(x) := \{y : |x - y| < \rho\}, \quad B_\rho := B_\rho(0).$$

3.1 Lemma

Sei \mathcal{M} eine glatte Fläche in \mathbb{R}^n , $\overline{\mathcal{M}} \setminus \text{int } \mathcal{M} = \partial\mathcal{M} = \emptyset$ und $y \in \mathcal{M}$ beliebig aber fest. Weiter definieren wir $\mathcal{M}_\rho = \mathcal{M} \cap B_\rho(y)$ und $|\mathcal{M}_\rho| = \int_{\mathcal{M}_\rho} d\mathcal{H}^2$. Dann gilt:

$$(28) \quad \pi \leq \rho^{-2} |\mathcal{M}_\rho| + \frac{1}{4} \mathcal{W}(\mathcal{M}_\rho).$$

Beweis: Sei $0 < \sigma < \rho$. Wir setzen die Vektorfelder:

$$(29) \quad X(x) := x - y, \quad |X|_\sigma(x) := \max\{|X|(x), \sigma\}, \quad \Phi(x) := (|X|_\sigma^{-2} - \rho^{-2})_+ X(x).$$

$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein Lipschitz-Vektorfeld mit kompaktem Träger. Dieses setzen wir in den Divergenzatz 2.11 mit $\partial\mathcal{M} = \emptyset$, der nach A.11 auch für Lipschitz-Vektorfelder gilt, ein:

$$(30) \quad \int_{\mathcal{M}} \text{div}_{\mathcal{M}} \Phi \, d\mathcal{H}^2 = - \int_{\mathcal{M}} \langle \Phi, \mathbf{H} \rangle \, d\mathcal{H}^2.$$

Wir wollen nun die Divergenz von Φ berechnen, wobei wir einige Fälle unterscheiden müssen. Als erstes stellen wir fest, dass in $\mathcal{M} \setminus B_\rho(y)$ gilt: $|X| \geq \rho$, d.h. $(|X|_\sigma^{-2} - \rho^{-2}) \leq 0$. Also ist in $\mathcal{M} \setminus B_\rho(y)$ $\Phi \equiv 0$ und somit $\text{div}_{\mathcal{M}} \Phi = 0$. Andererseits ist in \mathcal{M}_σ $|X|_\sigma = \sigma$, und es gilt in $z \in \mathcal{M}_\sigma$:

$$\begin{aligned} \text{div}_{\mathcal{M}} \Phi \Big|_{\mathcal{M}_\sigma} &= (\sigma^{-2} - \rho^{-2}) \sum_{i=1}^2 \langle D_{\tau_i} x, \tau_i \rangle = (\sigma^{-2} - \rho^{-2}) \sum_{i=1}^2 \langle \tau_i, \tau_i \rangle \\ &= 2(\sigma^{-2} - \rho^{-2}), \end{aligned}$$

wobei τ_1, τ_2 eine ONB von $T_z\mathcal{M}$ ist. Jetzt seien $\mathcal{M}_{\rho,\sigma} = \mathcal{M} \cap B_\rho(y) \setminus B_\sigma(y)$, $z \in \mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ und τ_1, τ_2 eine ONB von $T_z\mathcal{M}$. Dann gilt:

$$\text{div}_{\mathcal{M}} \Phi \Big|_{\mathcal{M}_{\rho,\sigma}} = \sum_{i=1}^2 \left\langle D_{\tau_i} \left\{ (|X|^{-2} - \rho^{-2}) X \right\}, \tau_i \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^2 \left\langle (D_{\tau_i} |X|^{-2}) X, \tau_i \right\rangle + (|X|^{-2} - \rho^{-2}) \sum_{i=1}^2 \langle D_{\tau_i} x, \tau_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{d}{dt} \left[|X|^{-2} \circ \gamma_i(t) \right]_{t=0} \langle X, \tau_i \rangle + (|X|^{-2} - \rho^{-2}) \sum_{i=1}^2 \langle \tau_i, \tau_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^2 (-2) |X|^{-3} \frac{\langle X, \tau_i \rangle}{|X|} \langle X, \tau_i \rangle + 2(|X|^{-2} - \rho^{-2}) \\
&= -2 \frac{|X^\top|^2}{|X|^4} + 2 \frac{|X^\perp|^2 + |X^\top|^2}{|X|^4} - 2\rho^{-2} = 2 \frac{|X^\perp|^2}{|X|^4} - 2\rho^{-2},
\end{aligned}$$

sodass $X^\top = \sum_{i=1}^2 \langle \tau_i, X \rangle \tau_i$, $X^\perp = X - X^\top$ und $\gamma_i: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ C^1 -Kurven mit $\gamma_i(0) = z$ und $\gamma_i'(0) = \tau_i$ sind. Wir können den $\mathcal{M} \setminus B_\rho(y)$ -Anteil in (30) weglassen und die Integration in Teile der vorherigen Fallunterscheidung zerlegen:

$$\begin{aligned}
2 \int_{\mathcal{M}_\sigma} (\sigma^{-2} - \rho^{-2}) d\mathcal{H}^2 + 2 \int_{\mathcal{M}_{\rho,\sigma}} \frac{|X^\perp|^2}{|X|^4} d\mathcal{H}^2 - 2 \int_{\mathcal{M}_{\rho,\sigma}} \rho^{-2} d\mathcal{H}^2 \\
= - \int_{\mathcal{M}_\rho} (|X|_\sigma^{-2} - \rho^{-2}) \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^2.
\end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir $|\mathcal{M}_\sigma| = \int_{\mathcal{M}_\sigma} d\mathcal{H}^2$. Es folgt:

$$(31) \quad 2\sigma^{-2}|\mathcal{M}_\sigma| + 2 \int_{\mathcal{M}_{\rho,\sigma}} \frac{|X^\perp|^2}{|X|^4} d\mathcal{H}^2 = 2\rho^{-2}|\mathcal{M}_\rho| - \int_{\mathcal{M}_\rho} (|X|_\sigma^{-2} - \rho^{-2}) \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^2.$$

Unter Benutzung der Identität:

$$(32) \quad \left(\frac{1}{4} \mathbf{H} + \frac{X^\perp}{|X|^2} \right)^2 = \frac{1}{16} |\mathbf{H}|^2 + \frac{1}{2} \frac{\langle \mathbf{H}, X^\perp \rangle}{|X|^2} + \frac{|X^\perp|^2}{|X|^4}$$

folgt zusammen mit $\langle \mathbf{H}, X \rangle = \langle \mathbf{H}, X^\perp \rangle$, da $\mathbf{H}(p)$ normal zu $T_p\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
2\sigma^{-2}|\mathcal{M}_\sigma| + 2 \int_{\mathcal{M}_{\rho,\sigma}} \left(\frac{1}{4} \mathbf{H} + \frac{X^\perp}{|X|^2} \right)^2 d\mathcal{H}^2 - \int_{\mathcal{M}_{\rho,\sigma}} \frac{\langle \mathbf{H}, X \rangle}{|X|^2} d\mathcal{H}^2 - \frac{2}{16} \int_{\mathcal{M}_{\rho,\sigma}} |\mathbf{H}|^2 d\mathcal{H}^2 \\
= 2\rho^{-2}|\mathcal{M}_\rho| - \int_{\mathcal{M}_\rho} |X|_\sigma^{-2} \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^2 + \int_{\mathcal{M}_\rho} \rho^{-2} \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^2 \\
= 2\rho^{-2}|\mathcal{M}_\rho| - \int_{\mathcal{M}_{\rho,\sigma}} \frac{\langle \mathbf{H}, X \rangle}{|X|^2} d\mathcal{H}^2 - \int_{\mathcal{M}_\sigma} \sigma^{-2} \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^2 + \int_{\mathcal{M}_\rho} \rho^{-2} \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^2.
\end{aligned}$$

Kürzt man beide Seiten durch 2 und bringt $\mathcal{W}(\mathcal{M}_\sigma) = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}_\sigma} |\mathbf{H}|^2 d\mathcal{H}^2$ auf die rechte Seite, so folgt:

$$(33) \quad \sigma^{-2}|\mathcal{M}_\sigma| + \int_{\mathcal{M}_{\rho,\sigma}} \left(\frac{1}{4} \mathbf{H} + \frac{X^\perp}{|X|^2} \right)^2 d\mathcal{H}^2 \\
= \rho^{-2}|\mathcal{M}_\rho| + \frac{1}{4} \mathcal{W}(\mathcal{M}_{\rho,\sigma}) - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}_\sigma} \sigma^{-2} \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}_\rho} \rho^{-2} \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^2.$$

Da $y \in \mathcal{M}$, gilt $\sigma^{-2}|\mathcal{M}_\sigma| \rightarrow \pi$ für $\sigma \searrow 0$, dazu siehe Anhang A.8, und die Einleitung des Abschnitts 2.2 über Dichten von Maßen in [Krz]. Wir betrachten erst den letzten Term und benutzen die

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (zur Erinnerung: $X = x - y$):

$$(34) \quad \left| \int_{\mathcal{M}_\sigma} \sigma^{-2} \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^2 \right|^2 \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \int_{\mathcal{M}_\sigma} \sigma^{-2} \underbrace{\sigma^{-2} |x - y|^2}_{\leq 1} d\mathcal{H}^2 \cdot \int_{\mathcal{M}_\sigma} |\mathbf{H}|^2 d\mathcal{H}^2 \\ \leq \sigma^{-2} |\mathcal{M}_\sigma| \cdot 4\mathcal{W}(\mathcal{M}_\sigma) \xrightarrow{\sigma \searrow 0} 0.$$

Jetzt schicken wir $\sigma \searrow 0$ und erhalten aus (33) eine nützliche Formel:

$$(35) \quad \pi + \int_{\mathcal{M}_\rho} \left(\frac{1}{4} \mathbf{H} + \frac{X^\perp}{|X|^2} \right)^2 d\mathcal{H}^2 = \rho^{-2} |\mathcal{M}_\rho| + \frac{1}{4} \mathcal{W}(\mathcal{M}_\rho) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}_\rho} \rho^{-2} \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^2.$$

Kehren wir kurz zurück zu der Identität (32) und schätzen ab, indem wir die Quadrat-Terme $|\mathbf{H}|^2, |X^\perp|^2 \geq 0$ weglassen:

$$\frac{\langle X, \mathbf{H} \rangle}{2|X|^2} \leq \left(\frac{1}{4} \mathbf{H} + \frac{X^\perp}{|X|^2} \right)^2.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $|X|^2$, so bedeutet das für (35):

$$\pi + \int_{\mathcal{M}_\rho} \left(\frac{1}{4} \mathbf{H} + \frac{X^\perp}{|X|^2} \right)^2 d\mathcal{H}^2 \leq \rho^{-2} |\mathcal{M}_\rho| + \frac{1}{4} \mathcal{W}(\mathcal{M}_\rho) + \int_{\mathcal{M}_\rho} \underbrace{\frac{|X|^2}{\rho^2}}_{\leq 1} \left(\frac{1}{4} \mathbf{H} + \frac{X^\perp}{|X|^2} \right)^2 d\mathcal{H}^2.$$

Schließlich resultiert die gewünschte Ungleichung:

$$\pi \leq \rho^{-2} |\mathcal{M}_\rho| + \frac{1}{4} \mathcal{W}(\mathcal{M}_\rho). \quad \blacksquare$$

3.2 Bemerkung

Eigentlich würde die Aussage auch für abgeschlossene C^2 -glatte Flächen mit Rand gelten, solange $B_\rho(y) \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset$ gilt, denn dies ist im Grunde eine lokale Aussage für hinreichend kleines ρ . So betrachte man für ein $y \in \text{int } \mathcal{M}$ die C^2 -Funktion $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x) := \|x - y\|$. Dann gilt für hinreichend kleines $\rho_0 > 0$, dass $\forall \rho < \rho_0 : B_\rho(y) \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset$, und nach Bemerkung 2.28 ist dies für fast alle $\rho < \rho_0$ $f^{-1}(\rho)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit, die genauso glatt wie \mathcal{M} ist.

Weiterhin ist dann für fast alle $\rho < \rho_0$ $B_\rho(y) \cap \mathcal{M}$ eine mit $\partial B_\rho(y) \cap \mathcal{M} = f^{-1}(\rho)$ glatt berandete Untermannigfaltigkeit. Man kann also den Divergenzsatz 2.11 mit $\Phi(x)$ wie oben in (29) benutzen, und feststellen, dass $\Phi = 0$ auf dem Rand von $B_\rho(y) \cap \mathcal{M}$ ist. Insgesamt fällt der Randterm in (9) weg, und die Ungleichung (28) folgt mit analogen Rechnungen wie in dem vorherigen Lemma für fast alle $\rho < \rho_0$. Da $|\mathcal{M}_\rho|$ und $\mathcal{W}(\mathcal{M}_\rho)$ monoton wachsen, gilt (28) für alle $\rho < \rho_0$.

Wählt man ein ρ fest, so kann man Flächeninhalt und Willmore-Energie vom Schnitt \mathcal{M}_ρ nicht gleichzeitig beliebig klein wählen. Besonders interessant wird es bei $\mathbf{H} \equiv 0$, also Minimalflächen, denn dann ist nämlich $\pi \leq \rho^{-2} |\mathcal{M}_\rho|$. Man kann noch mehr über diesen Fall aussagen, so wächst zum Beispiel $\rho^{-2} |\mathcal{M}_\rho|$ sogar monoton mit ρ . Aus (31) mit $\mathbf{H} \equiv 0$ folgt:

$$2\sigma^{-2} |\mathcal{M}_\sigma| + 2 \int_{\mathcal{M}_{\rho,\sigma}} \frac{|X^\perp|^2}{|X|^4} d\mathcal{H}^2 = 2\rho^{-2} |\mathcal{M}_\rho|, \quad \sigma < \rho,$$

und somit auch $\sigma^{-2} |\mathcal{M}_\sigma| \leq \rho^{-2} |\mathcal{M}_\rho|$, wenn man den quadratischen Term weg lässt. Deswegen spricht man in diesem Fall von einer *Monotonie-Formel* (siehe in [Sim1]).

Eine weitere Beobachtung macht man, wenn man für ein kompaktes randloses \mathcal{M} $\rho \rightarrow \infty$ schickt. Ist nämlich $\mathcal{W}(\mathcal{M}) < \infty$, so gilt mit dem gleich folgenden Satz 3.3, dass $|\mathcal{M}_\rho| \leq |\mathcal{M}| < \infty$. Dann gilt:

$$(36) \quad \pi \leq \frac{1}{4} \mathcal{W}(\mathcal{M}).$$

Dieses Ergebnis entspricht dem von Willmore in (26), denn man kann sich überlegen, dass man die obere Ungleichung mit ähnlichen Argumenten auch für Immersionen zeigen kann. Das liegt darin begründet, dass für Immersionen $|\mathcal{M}_\sigma|/\sigma^2 \rightarrow k\pi$ für $\sigma \rightarrow 0$ gilt, wobei k Anzahl der Selbstdurchschneidungen in y ist. Gilt insbesondere $\mathcal{W}(\mathcal{M}) < 8\pi$, dann hat man eine reguläre Einbettung, also eine Untermannigfaltigkeit ohne Selbstdurchschneidungen.

Nun kommen wir zu der versprochenen Durchmesser-Abschätzung einer Fläche mit vorgegebener Fläche und Willmore-Energie. Dieser Satz hält sich hauptsächlich an [Top1] und [Sim2].

3.3 Satz (Lemma 1.1 in [Sim2])

Sei \mathcal{M} eine glatte, kompakte und zusammenhängende Fläche mit $\partial\mathcal{M} = \emptyset$, dann gilt:

$$(37) \quad \sqrt{\frac{|\mathcal{M}|}{\mathcal{W}(\mathcal{M})}} \leq \text{diam } \mathcal{M} < \frac{2}{\pi} \sqrt{|\mathcal{M}| \mathcal{W}(\mathcal{M})}.$$

Beweis: Als erstes zeigen wir die *linke Ungleichung*. Dafür wenden wir für ein festes $y \in \mathcal{M}$ den Divergenzsatz 2.11 auf das spezielle Vektorfeld $\Phi(x) = x - y$ an. Da $\text{div}_{\mathcal{M}} x = \sum_{i=1}^2 \langle D_{\tau_i} x, \tau_i \rangle = \sum_{i=1}^2 \langle \tau_i, \tau_i \rangle = 2$, folgt:

$$\int_{\mathcal{M}} 2 \, d\mathcal{H}^2 = - \int_{\mathcal{M}} \langle x - y, \mathbf{H} \rangle \, d\mathcal{H}^2.$$

Wenden wir die Cauchy-Schwarzsche- und die Hölder-Ungleichung auf die rechte Seite an:

$$2|\mathcal{M}| \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \int_{\mathcal{M}} \underbrace{|x - y|}_{\leq \text{diam } \mathcal{M}} |\mathbf{H}| \, d\mathcal{H}^2 \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \text{diam } \mathcal{M} \sqrt{|\mathcal{M}|} \cdot \sqrt{\int_{\mathcal{M}} |\mathbf{H}|^2 \, d\mathcal{H}^2} \leq 2 \text{diam } \mathcal{M} \sqrt{|\mathcal{M}|} \cdot \sqrt{\mathcal{W}(\mathcal{M})}.$$

Geteilt durch $2\sqrt{|\mathcal{M}| \mathcal{W}(\mathcal{M})}$, ergibt sich die gewünschte linke Ungleichung.

Für die *rechte Ungleichung* (dieser Teil des Beweises stammt aus [Top1, Lemma 1]) nehmen wir ein beliebiges aber festes $y \in \mathcal{M}$ und definieren $d := \max_{x \in \mathcal{M}} |x - y|$; das existiert, da \mathcal{M} kompakt ist. Sei

$$\rho := 2\sqrt{\frac{|\mathcal{M}|}{\mathcal{W}(\mathcal{M})}}.$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Falls $d < 4\rho$ gilt, hat man schon das Ergebnis:

$$d < 4\rho = 8\sqrt{\frac{|\mathcal{M}|}{\mathcal{W}(\mathcal{M})}} \stackrel{(36)}{\leq} 8\sqrt{\frac{|\mathcal{M}|}{\mathcal{W}(\mathcal{M})} \frac{\mathcal{W}(\mathcal{M})}{4\pi}} \leq \frac{2}{\pi} \sqrt{|\mathcal{M}| \mathcal{W}(\mathcal{M})}.$$

Andererseits, falls $d \geq 4\rho$ gilt, so können wir eine natürliche Zahl $N \geq 2$ finden, die

$$\frac{d}{2\rho} - 1 < N \leq \frac{d}{2\rho}$$

erfüllt. Jetzt nehmen wir für jedes $i = 1, \dots, N$ jeweils ein $x_i \in \partial B_{2i\rho}(y)$ mit $x_0 = y$. Somit sind $\text{int } B_\rho(x_i) \cap \mathcal{M}$ disjunkt. Jetzt wenden wir (28) für alle x_i an:

$$\pi \leq \frac{|\mathcal{M} \cap B_\rho(x_i)|}{\rho^2} + \frac{1}{4} \mathcal{W}(\mathcal{M} \cap B_\rho(x_i)).$$

Summiert man über i , so ergibt sich:

$$(38) \quad (N+1)\pi \leq \sum_{i=0}^N \left\{ \frac{|\mathcal{M} \cap B_\rho(x_i)|}{\rho^2} + \frac{1}{4} \mathcal{W}(\mathcal{M} \cap B_\rho(x_i)) \right\} \leq \frac{|\mathcal{M}|}{\rho^2} + \frac{1}{4} \mathcal{W}(\mathcal{M}),$$

da $\text{int } B_\rho(x_i)$ disjunkt und $\bigcup_{i=0}^N \mathcal{M} \cap B_\rho(x_i) \subset \mathcal{M}$. Also folgt dann mit Definition von ρ :

$$d < 2\rho(N+1) \leq \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{|\mathcal{M}|}{\rho} + \frac{\rho}{4} \mathcal{W}(\mathcal{M}) \right\} = \frac{2}{\pi} \sqrt{|\mathcal{M}| \mathcal{W}(\mathcal{M})}.$$

Wir haben $d = d(y)$ abhängig von y gewählt. Nun maximieren wir $d(y)$ bzgl. y und stellen fest, dass $\text{diam } \mathcal{M} = \max_{y \in \mathcal{M}} d(y) = d(y_0)$ für ein $y_0 \in \mathcal{M}$. Das zeigt die Behauptung. \blacksquare

3.4 Bemerkung

Schaut man sich die rechte Ungleichung in (37) nochmal genauer an, so könnte man vermuten, dass eine verschärfte Beziehung für jede glatte, zusammenhängende, kompakte und nichtberandete Fläche \mathcal{M} :

$$(39) \quad \text{diam } \mathcal{M} \leq C \int_{\mathcal{M}} |\mathbf{H}| \, d\mathcal{H}^2 =: C \|\mathbf{H}\|_{L^1(\mathcal{M})}$$

gelten könnte. Die rechte Ungleichung in (37) würde dann einfach mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung aus dieser folgen. Da man wie in (12) $|\mathbf{H}|$ durch $\sqrt{2}|\mathbf{A}|$ abschätzen kann, hätte man $\text{diam } \mathcal{M} \leq C \|\mathbf{A}\|_{L^1(\mathcal{M})}$ erhalten. Vergleiche dazu (47) für kompakte Flächen ohne Rand. Tatsächlich zeigt Topping nicht nur (39) in [Top2], sondern sogar eine verschärfte Ungleichung.

So gilt es für eine m -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ohne Rand, die in \mathbb{R}^n glatt immigiert ist, dass deren *intrinsischer Durchmesser* $d_{\text{int}} = \max_{x,y \in \mathcal{M}} \text{dist}_{\mathcal{M}}(x,y)$ folgendermaßen abgeschätzt werden kann:

$$d_{\text{int}} \leq C(m) \int_{\mathcal{M}} |\mathbf{H}|^{m-1} \, d\mathcal{H}^m,$$

wobei $C(2) = \frac{32}{\pi}$. Da der intrinsische Durchmesser d_{int} größer ist als der äußere $\text{diam } \mathcal{M}$, hat man für $m = 2$ die Beziehung (39).

4. Randwertprobleme für zweidimensionale Willmore-Graphen

In diesem Abschnitt kommen wir endlich zu der Situation, auf die wir hingearbeitet haben. Wie versprochen, betrachten wir nun Graphen, also in diesem Fall genügend glatte Flächen mit Rand, für die wir einige Randwertprobleme formulieren werden.

4.1 Definition (Graph)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit einem genügend glatten Rand $\partial\Omega$ und der äußeren Randnormale ν . Für eine C^2 -glatte Funktion $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir:

$$\Gamma(u) := \left\{ (x, u(x)) \mid x \in \bar{\Omega} \right\}$$

ihren *Graph*. Diese Situation wird im folgenden Bild veranschaulicht:

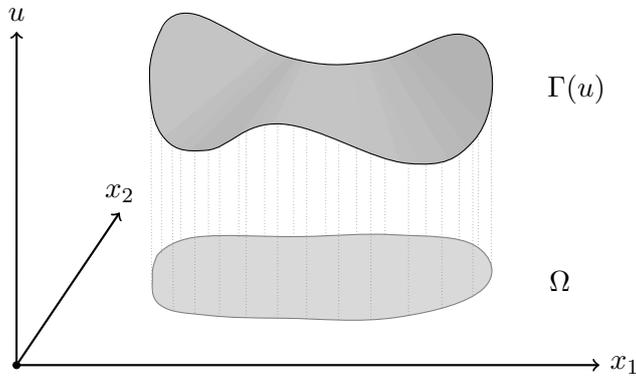


Abbildung 1: Graph einer Funktion u

Nun werden wir die im vorbereitenden Abschnitt 2 eingeführten differentialgeometrischen Begriffe für Graphen betrachten. So stellen wir zuerst fest, dass die Funktion u die Fläche $\Gamma(u)$ folgendermaßen parametrisiert :

$$(40) \quad \varphi: \bar{\Omega} \ni (x^1, x^2) \mapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ u(x^1, x^2) \end{pmatrix} \in \Gamma(u) \subset \mathbb{R}^3, \quad \partial_1 \varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_{x^1} \end{pmatrix}, \quad \partial_2 \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_{x^2} \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Funktion $\bar{\varphi}$ der Glattbiegung ist $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, u(x_1, x_2) + x_3)$. Die *erste Fundamentalform* ist hier die Einschränkung des euklidischen Skalarprodukts des \mathbb{R}^3 auf $\Gamma(u)$, also in lokaler Darstellung:

$$(g_{ij}) := (\langle \partial_i \varphi, \partial_j \varphi \rangle) = \begin{pmatrix} 1 + u_{x^1}^2 & u_{x^1} u_{x^2} \\ u_{x^1} u_{x^2} & 1 + u_{x^2}^2 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen das Normalenvektorfeld so, dass es nach oben gerichtet ist. Lokal sieht es dann folgendermaßen aus:

$$(41) \quad N \circ \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla u \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Im Weiteren sollten wir die sinnvolle Schreibabkürzung für die Jacobische der Flächenformel benutzen

$$Q := \sqrt{1 + |\nabla u|^2} = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Wir bezeichnen die Inverse von (g_{ij}) mit (g^{ij}) . Diese ist

$$(g^{ij}) = \frac{1}{Q^2} \begin{pmatrix} 1 + u_{x_2}^2 & -u_{x_1}u_{x_2} \\ -u_{x_1}u_{x_2} & 1 + u_{x_1}^2 \end{pmatrix}.$$

Da nun der Normalenraum $T_p\mathcal{M}^\perp$ hier nur eindimensional ist, also aus einer Linie besteht, können wir uns nach (6) auf die skalare zweite Fundamentalform $A_p: T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränken. In lokaler Darstellung sieht diese wie folgt aus:

$$A_{ij} = A_\varphi(\partial_i\varphi, \partial_j\varphi) = -\langle \partial_i\varphi, D_{\partial_j\varphi}N \rangle.$$

Da wir aber $\langle N \circ \varphi, \partial_i\varphi \rangle = 0$ haben, gilt die Beziehung $\langle D_{\partial_i\varphi}N, \partial_j\varphi \rangle + \langle N, D_{\partial_i\varphi}\partial_j\varphi \rangle = 0$. Wegen Lemma A.4 gilt: $D_{\partial_i\varphi}\partial_j\varphi = \partial_{ij}\varphi$. Also folgt schließlich:

$$(42) \quad A_{ij} = \langle N, \partial_{ij}\varphi \rangle = \frac{1}{Q} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x_i x_j} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u_{x_1} \\ -u_{x_2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{u_{x_i x_j}}{Q}.$$

Die lokale Darstellung der Weingarten-Abbildung $W = -dN$ ist dann:

$$(43) \quad \begin{aligned} (A_j^i) &= \left(\sum_\ell g^{i\ell} A_{\ell j} \right) = \frac{1}{QQ^2} \begin{pmatrix} 1 + u_{x_2}^2 & -u_{x_1}u_{x_2} \\ -u_{x_1}u_{x_2} & 1 + u_{x_1}^2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} u_{x^1 x^1} & u_{x^1 x^2} \\ u_{x^2 x^1} & u_{x^2 x^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{Q^3} \begin{pmatrix} (1 + u_{x_2}^2)u_{x^1 x^1} - u_{x_1}u_{x_2}u_{x^1 x^2} & (1 + u_{x_2}^2)u_{x^1 x^2} - u_{x_1}u_{x_2}u_{x^2 x^2} \\ -u_{x_1}u_{x_2}u_{x^1 x^1} + (1 + u_{x_1}^2)u_{x^1 x^2} & -u_{x_1}u_{x_2}u_{x^1 x^2} + (1 + u_{x_1}^2)u_{x^2 x^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen der Kodimension 1 nehmen wir nach (8) wieder die skalare mittlere Krümmung. Als Schreibvereinfachung benutzen wir:

$$H = H \circ \varphi, \quad \mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \varphi, \quad |A| = |A| \circ \varphi,$$

wobei es jeweils aus dem Kontext deutlich sein wird, ob es sich bei H, \mathcal{K} und $|A|$ um lokale Darstellungen handelt oder nicht. Weiterhin wollen wir die mittlere Krümmung in lokaler Darstellung A_{ij} aufschreiben. Dazu stellen wir fest, dass die mittlere Krümmung die Spur der Weingarten-Abbildung ist (siehe Anhang A.7):

$$H = \text{Spur}((A_j^i)) = \frac{1}{Q^3} \left\{ (1 + u_{x_2}^2)u_{x^1 x^1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x^1 x^2} + (1 + u_{x_1}^2)u_{x^2 x^2} \right\}.$$

Wir vereinfachen die Rechnungen, indem wir feststellen, dass (div ist die gewöhnliche Divergenz in \mathbb{R}^2 und nicht die $\text{div}_{\mathcal{M}}$)

$$(44) \quad \begin{aligned} \text{div} \left(\frac{\nabla u}{Q} \right) &= \partial_1 \left(\frac{u_{x^1}}{Q} \right) + \partial_2 \left(\frac{u_{x^2}}{Q} \right) \\ &= \frac{1}{Q^3} (u_{x^1 x^1} (1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) - u_{x_1} (u_{x^1 x^1} u_{x_1} + u_{x^1 x^2} u_{x_2}) \\ &\quad + u_{x^2 x^2} (1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) - u_{x_2} (u_{x^1 x^2} u_{x_1} + u_{x^2 x^2} u_{x_2})) \\ &= H \end{aligned}$$

gilt. Die Gaußsche Krümmung ist nach der Rechnung in A.7 die Determinante der Weingarten-Abbildung:

$$\mathcal{K} = \det((A_j^i)) = \frac{\det D^2 u}{Q^4}.$$

Weiterhin haben wir folgende Beziehungen für die zweite Fundamentalform (siehe Anhang A.7 und A.9):

$$(45) \quad |A|^2 = \sum_{i,j,k,\ell} g^{ij} g^{k\ell} A_{ik} A_{j\ell} \quad \text{und} \quad |A|^2 \geq \sum_{i,j=1}^2 \frac{u_{x^i x^j}^2}{Q^6}.$$

Außerdem nimmt das *Willmore-Funktional* für den Graph von u die folgende Gestalt an:

$$\mathcal{W}(u) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} H^2 \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx = \frac{1}{4} \int_{\Omega} \left| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{Q} \right) \right|^2 Q dx,$$

und der Laplace-Beltrami-Operator auf \mathcal{M} einer C^2 -Funktion $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ auf \mathcal{M} sieht dann nach A.7 folgendermaßen aus:

$$(46) \quad \begin{aligned} (\Delta_{\Gamma(u)} F) \circ \varphi^{-1} &= \frac{1}{Q} \partial_i (Q g^{ij} \partial_j (F \circ \varphi^{-1})) \\ &= \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \frac{1}{Q} \left((1 + u_{x^2}^2) \frac{\partial}{\partial x^1} F - u_{x^1} u_{x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} F \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{Q} \left(-u_{x^1} u_{x^2} \frac{\partial}{\partial x^1} F + (1 + u_{x^1}^2) \frac{\partial}{\partial x^2} F \right) \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man wie in der Willmore-Gleichung (W) für $F = H$ ein und beachtet die lokale Darstellung von H in (44), so wird deutlich, dass die Willmore-Gleichung eine quasi-lineare Gleichung vierter Ordnung ist.

4.1. Supremum-Abschätzung

So wie man im Satz 3.3 den Durchmesser einer kompakten randlosen Fläche mit dessen Flächeninhalt und Willmore-Energie unter Kontrolle bekommt, kann man dasselbe für Flächen mit Rand versuchen, wobei man die Ausdehnung des Randes extra berücksichtigen muss. So stellt man in [Sim2, Lemma 1.2] tatsächlich fest, dass für eine C^2 -Fläche \mathcal{M}

$$(47) \quad \operatorname{diam} \mathcal{M} \leq C \left(\int_{\mathcal{M}} |\mathbf{A}| d\mathcal{H}^2 + \sum_i \operatorname{diam} \Gamma_i \right)$$

gilt, wobei C eine nur von der Dimension des umgebenden Raumes abhängige Konstante und die Γ_i 's die Zusammenhangskomponenten von $\partial\mathcal{M}$ sind. Diese Aussage wollen wir für Graphen zeigen. Somit wird für diese aus dem Durchmesser dann $\sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ und aus den Randkomponenten werden $\operatorname{diam} \partial\Omega$ und $\max_{x \in \partial\Omega} |u|$. An dieser Stelle wird die Nützlichkeit der Koflächenformel und des Satzes von Sard deutlich.

4.2 Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wiederum ein beschränktes Gebiet mit C^2 -glattem Rand $\partial\Omega$, $g \in C^0(\partial\Omega)$ und $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $u|_{\partial\Omega} = g$, dann gilt die Abschätzung:

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq C \left\{ \|A\|_{L^1(\Gamma(u))} + \operatorname{diam} \partial\Omega + \max_{x \in \partial\Omega} |g| \right\},$$

mit einer universellen Konstante C .

Beweis: Dieser Beweis ist von [Sim2, Beweis Lemma 1.2] beeinflusst. Zuerst machen wir die Fallunterscheidung

$$1. \text{ Fall: } \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq 4 \left\{ \max_{x \in \partial\Omega} |g| + \text{diam } \partial\Omega \right\},$$

$$2. \text{ Fall: } \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \geq 4 \left\{ \max_{x \in \partial\Omega} |g| + \text{diam } \partial\Omega \right\}.$$

Im ersten Fall ist die Aussage mit $C = 4$ schon gezeigt, deswegen beschränken wir uns auf den zweiten Fall. Da $|u|$ stetig auf dem Kompaktum $\bar{\Omega}$ ist, nimmt es dort auch sein Maximum an. O.B.d.A. sei $x_m \in \Omega$ mit $u(x_m) = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$, ansonsten verwende $-u$ statt u . Wir betrachten:

$$\hat{u} := u - \max_{x \in \partial\Omega} |g|$$

Dann ist $\hat{u}|_{\partial\Omega} \leq 0$. Diese Beziehung werden wir später brauchen. Im Weiteren betrachten wir nur den Positivteil $(\hat{u})^+ \geq 0$, und definieren dort die Menge:

$$I := \left\{ \alpha \in (0, \sup_{x \in \bar{\Omega}} \hat{u}(x)) \mid \max_{x \in \hat{u}^{-1}(\alpha)} |\nabla \hat{u}(x)| \geq 1 \right\}.$$

Die dazu komplementäre offene Menge I_C , im Sinne $(0, \sup_{x \in \Omega} \hat{u}(x)) = I \cup I_C$, ist dann:

$$I_C := \left\{ \alpha \in (0, \sup_{x \in \bar{\Omega}} \hat{u}(x)) \mid \forall x \in \bar{\Omega} \text{ mit } \hat{u}(x) = \alpha : |\nabla \hat{u}(x)| < 1 \right\}.$$

Nun werden wir feststellen, dass $|I| \geq \sup_{x \in \Omega} \hat{u}(x) - \text{diam } \partial\Omega$. Dazu betrachten wir Niveaus aus I_C . Beim Übergang von u zu \hat{u} bleibt das Maximum immer noch bei x_m . Von diesem Punkt gehen Strahlen aus, die durch Kurven $c_e: (0, \text{diam } \partial\Omega) \rightarrow \Omega$ repräsentiert werden:

$$c_e(s) := x_m + s \cdot e, \quad e \in \mathbb{S}^1.$$

Wir beschränken nun $\hat{u} \circ c_e$ auf ein Intervall $[0, \beta]$, $\hat{u} \circ c_e|_{[0, \beta)} > 0$, und $\hat{u} \circ c_e(\beta) = 0$. Das ist möglich, weil $\hat{u}|_{\partial\Omega} \leq 0$. Wir benutzen die Vorarbeit aus dem Bemerkung 2.21, und erhalten mit $(\hat{u} \circ c_e) \in C^1([0, \beta])$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |I_C| &= \int_{I_C} dx \leq \int_{\mathbb{R}} \text{card} \left((\hat{u} \circ c_e)^{-1}(I_C) \cap (\hat{u} \circ c_e)^{-1}(x) \right) dx \\ &\stackrel{(18)}{=} \int_{(\hat{u} \circ c_e)^{-1}(I_C)} \left| \frac{d}{dt} (\hat{u} \circ c_e(t)) \right| dt = \int_{(\hat{u} \circ c_e)^{-1}(I_C)} \left| \langle \nabla \hat{u} \circ c_e(t), c'_e(t) \rangle \right| dt \\ &\stackrel{\leq}{\text{CSU}} \int_{(\hat{u} \circ c_e)^{-1}(I_C)} \underbrace{|\nabla \hat{u} \circ c_e(t)|}_{<1} \underbrace{|e|}_{=1} dt \leq \beta \leq \text{diam } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Es resultiert die Ungleichung:

$$(48) \quad |I| = \sup_{x \in \Omega} \hat{u}(x) - |I_C| \geq \sup_{x \in \Omega} \hat{u}(x) - \text{diam } \partial\Omega.$$

Jetzt versuchen wir für ein festes $\alpha \in I$ mehr Information zu gewinnen. Dazu betrachten wir lieber $\hat{u} \circ \varphi^{-1}: \Gamma(\hat{u}) \rightarrow \mathbb{R}$, wobei φ hier die Parametrisierung (40) von $\Gamma(\hat{u})$ sein soll. Man überzeuge sich, dass wir damit genau die „slicing“ Funktion $f: \Gamma(\hat{u}) \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten mit $f(p) := \langle p, e_3 \rangle$ aus Bemerkung 2.24:

$$\hat{u} \circ \varphi^{-1}(p) = \langle e_3, p \rangle = f(p).$$

Die Menge $f^{-1}(\alpha)$ ist nach der Bemerkung 2.29 für fast alle α eine Vereinigung von glatten Jordanschen Kurven. Im Weiteren beschränken wir uns nur auf diese $\alpha \in I_r, |I_r| = |I|$, mit:

$$I_r := \left\{ \alpha \in I \mid J_1^{\Gamma(\hat{u})} f(p) > 0, \forall p \in f^{-1}(\alpha) \right\}.$$

Sei nun J_α eine Jordansche Kurve der Länge L , parametrisiert nach der Bogenlänge durch $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow f^{-1}(\alpha)$, auf welcher das Supremum $\sup_{p \in f^{-1}(\alpha)} |\nabla \hat{u} \circ \varphi^{-1}(p)| \geq 1$ in $\gamma(0)$ angenommen wird. Dann haben wir:

$$0 = \langle \gamma'(0), \gamma(L) - \gamma(0) \rangle = \left\langle \gamma'(0), \int_0^L \gamma'(s) ds \right\rangle = \int_0^L \langle \gamma'(0), \gamma'(s) \rangle ds.$$

Das heißt nun, dass nach dem Zwischenwertsatz ein $s_1 \in (0, L)$ mit $\langle \gamma'(0), \gamma'(s_1) \rangle = 0$ existiert. Wir stellen fest, dass $\gamma'(0), \gamma'(s_1)$ und e_3 zueinander orthogonal sind, also ist $\{\gamma'(0), \gamma'(s_1), e_3\}$ eine ONB des \mathbb{R}^3 . Sei das Normalenfeld wie in (41), dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} & |N \circ \gamma(s_1) - N \circ \gamma(0)|^2 \\ &= |N \circ \gamma(s_1)|^2 + |N \circ \gamma(0)|^2 - 2\langle N \circ \gamma(s_1), N \circ \gamma(0) \rangle \\ &= 2 - 2\left\langle N \circ \gamma(0), \langle N \circ \gamma(s_1), e_3 \rangle e_3 + \langle N \circ \gamma(s_1), \gamma'(0) \rangle \gamma'(0) + \overbrace{\langle N \circ \gamma(s_1), \gamma'(s_1) \rangle \gamma'(s_1)}^{=0} \right\rangle \\ &= 2 - 2\langle N \circ \gamma(0), e_3 \rangle \cdot \langle N \circ \gamma(s_1), e_3 \rangle - 2\overbrace{\langle N \circ \gamma(0), \gamma'(0) \rangle \cdot \langle N \circ \gamma(s_1), \gamma'(0) \rangle}^{=0} \\ &\geq 2 - 2\left| \langle N \circ \gamma(0), e_3 \rangle \right| \cdot \underbrace{\left| \langle N \circ \gamma(s_1), e_3 \rangle \right|}_{\leq 1, \text{ CSU}} \\ &\geq 2 - 2\left| \langle N \circ \gamma(0), e_3 \rangle \right| \\ &\stackrel{(41)}{=} 2 - \frac{2}{\sqrt{1 + |\nabla \hat{u} \circ \varphi^{-1} \circ \gamma(0)|^2}}. \end{aligned}$$

Da $\gamma(0)$ extra so gewählt war, dass $|\nabla \hat{u} \circ \varphi^{-1} \circ \gamma(0)|^2 \geq 1$, folgt die Abschätzung:

$$|N \circ \gamma(s_1) - N \circ \gamma(0)|^2 \geq 2 - \frac{2}{\sqrt{1 + |\nabla \hat{u} \circ \varphi^{-1} \circ \gamma(0)|^2}} \geq 2 - \sqrt{2}.$$

Nun können wir schlussfolgern:

$$(49) \quad \sqrt{2 - \sqrt{2}} \leq |N \circ \gamma(s_1) - N \circ \gamma(0)| \leq \left| \int_0^{s_1} \frac{d}{ds} (N \circ \gamma)(s) ds \right| \leq \int_0^L \left| \frac{d}{ds} (N \circ \gamma)(s) \right| ds.$$

Als nächstes werden wir feststellen, dass man die Ableitung der Normalen durch $|A|$ abschätzen kann. Sei $e(s) \in T_{\gamma(s)}\Gamma(\hat{u})$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ ein normierter Vektor, sodass $\{e(s), \gamma'(s)\}$ eine ONB von $T_{\gamma(s)}\Gamma(\hat{u})$ ist. Man kann $e(s)$ gewinnen, indem man zum Beispiel e_3 in den Tangentialraum $T_{\gamma(s)}\Gamma(\hat{u})$ projiziert. Diese Projektionen sind wegen $J_1^{\Gamma(\hat{u})} f(p) > 0$ in I_r auf die Länge 1 normierbar.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{ds} (N \circ \gamma)(s) \right|^2 \stackrel{(1)}{=} |D_{\gamma'(s)} N|^2 = \langle D_{\gamma'(s)} N, \gamma'(s) \rangle^2 + \langle D_{\gamma'(s)} N, e(s) \rangle^2 + \underbrace{\langle D_{\gamma'(s)} N, N \circ \gamma(s) \rangle^2}_{=0} \\ (50) \quad &= \left| A_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)) \right|^2 + \left| A_{\gamma(s)}(\gamma'(s), e(s)) \right|^2 \\ &\leq 2 \left| A_{\gamma(s)}(\gamma'(s), e(s)) \right|^2 + \left| A_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)) \right|^2 + \left| A_{\gamma(s)}(e(s), e(s)) \right|^2 \\ &\stackrel{(5)}{=} |A|^2 \circ \gamma(s). \end{aligned}$$

Nun wollen wir die Koflächenformel benutzen, um die gewünschte Abschätzung zu erhalten. Dazu haben wir in der Bemerkung 2.24 genau diesen Fall betrachtet. Setzen wir in (22) $g = |A| \geq 0$ ein, so folgt mit f , gewählt wie oben:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma(u)} |A|(x) \, d\mathcal{H}^2(x) &\geq \int_{\Gamma(u)} \underbrace{J_1^{\Gamma(u)} f(x)}_{\leq 1} \cdot |A|(x) \, d\mathcal{H}^2(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{(e_3, y) = \alpha\} \cap \Gamma(u)} |A|(y) \, d\mathcal{H}^1(y) \, d\alpha \\
&\geq \int_0^\infty \int_{\{(e_3, y) = \alpha\} \cap \Gamma(\hat{u})} |A|(y) \, d\mathcal{H}^1(y) \, d\alpha \geq \int_I \int_{f^{-1}(\alpha)} |A|(y) \, d\mathcal{H}^1(y) \, d\alpha \\
&\geq \int_{I_r} \int_{J_\alpha} |A|(y) \, d\mathcal{H}^1(y) \, d\alpha \stackrel{(50)}{\geq} \int_{I_r} \int_{J_\alpha} \left| \frac{d}{ds} (N \circ \gamma) \right| (s) \, ds \, d\alpha \\
&\stackrel{(49)}{\geq} \int_{I_r} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \, d\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot |I_r| = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot |I| \\
&\stackrel{(48)}{\geq} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \left\{ \sup_{x \in \Omega} \hat{u}(x) - \text{diam } \partial\Omega \right\}.
\end{aligned}$$

Setzt man die Definition von \hat{u} ein, so folgt die Abschätzung für das Supremum von u auch im zweiten Fall:

$$\sup_{x \in \Omega} |u|(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \cdot \|A\|_{L^1(\Gamma(u))} + \text{diam } \partial\Omega + \sup_{x \in \partial\Omega} |g|.$$

Da $\sqrt{2 - \sqrt{2}}^{-1} \leq 4$, folgt mit $C = 4$ die Behauptung des Satzes. ▀

4.2. Randbedingungen

Die Supremum-Abschätzung aus dem vorhergehenden Abschnitt wollen wir nun für verschiedene Randwertprobleme benutzen. Insbesondere sind wir an a-priori-Abschätzungen für C^2 -glatte Funktionen $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ interessiert, die für ein festes $M \geq 0$ und ein vorgegebenes C^2 -glatte $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(\text{WM}) \quad \mathcal{W}(u) \leq M, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

erfüllen. Also geben wir nur $\partial\Gamma(u)$ und eine Schranke für Willmore-Energie vor.

Der obige Satz 4.2 entspricht nicht ganz unserer Situation, denn dort benutzt man $\|A\|_{L^1(\mathcal{M})}$ und nicht die Willmore-Energie. Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung und des Satzes von Gauß-Bonnet lässt sich nun zeigen, dass man mit der Willmore-Energie und zusätzlicher Beschränkung des Flächeninhalts $\|A\|_{L^1(\mathcal{M})}$ doch abschätzen kann.

Für die allgemeine Situation kann man aber $|\mathcal{M}|$ nicht durch $\mathcal{W}(\mathcal{M})$ beschränken. So überlege man sich eine sich ausdehnende Sphäre, die trotz der skalierungsinvarianten konstanten Willmore-Energie immer größer werdenden Flächeninhalt hat. Im Gegensatz dazu kann man, wie die Autoren in [DG2] zeigen, für Graphen den Flächeninhalt doch unter (WM) einfangen.

Da $\Gamma(u)$ eine Fläche mit Rand ist, muss man im Satz von Gauß-Bonnet (GB) den Beitrag des Randes von $\Gamma(u)$ extra betrachten. Dafür werden wir im folgenden Lemma die geodätische Krümmung von $\partial\Gamma(u)$ durch die Randdaten und geodätische Krümmung von $\partial\Omega$ abschätzen, wie es in [DG2] gezeigt wurde. Erstaunlicherweise braucht man dazu nicht die volle Kenntnis über die Tangentialräume am Rand $\partial\Gamma(u)$, also die Normalenableitung von u am Rand $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ muss nicht zwingend bekannt sein.

4.3 Lemma (Geodätische Krümmung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^2 -glattem Rand $\partial\Omega$ mit der äußeren Normale $\nu: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$, $M > 0$ eine Zahl und $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $u = g$ auf $\partial\Omega$, für ein C^2 -glattes $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt die Abschätzung:

$$(51) \quad \|\kappa_g\|_{C^0(\partial\Gamma(u))} \leq \|g\|_{C^2(\partial\Omega)} + \|\kappa\|_{C^0(\partial\Omega)},$$

wobei κ_g die geodätische Krümmung von $\partial\Gamma(u)$ und κ die geodätische Krümmung von $\partial\Omega$ ist.

Beweis: Dieser Beweis stammt aus [DG2]. Wir nehmen $s \mapsto \gamma(s) \in \partial\Omega$ eine positiv orientierte Parametrisierung nach der Bogenlänge ($\|\gamma'(s)\| = 1, \forall s \in \mathbb{R}$) von $\partial\Omega$, wodurch wir einen normierten Tangentialvektor $\tau(s) := \gamma'(s)$ haben. Der dazu gehörige zu $\partial\Omega$ äußere Normalenvektor $\nu \circ \gamma(s)$ ist:

$$(52) \quad \nu \circ \gamma(s) = \begin{pmatrix} \tau^2(s) \\ -\tau^1(s) \end{pmatrix},$$

sodass $(\nu \circ \gamma(s), \tau(s))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 ist. Insbesondere gilt für die Definition aus der \mathbb{R}^2 -Kurventheorie $\tau'(s) = \gamma''(s) = -\kappa(s) \cdot \nu \circ \gamma(s)$ mit κ als Krümmung von $\partial\Omega$, wobei das „-“ Zeichen daher kommt, dass wir den äußeren und nicht den inneren Normalenvektor gewählt haben. Zur Vereinfachung schreiben wir:

$$g(s) := g \circ \gamma(s), \quad h(s) := \frac{\partial u}{\partial \nu} \circ \gamma(s), \quad y(s) := \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ g(s) \end{pmatrix}.$$

Sei N ein wie oben in (41) gewählter Normalenvektor. Wir stellen fest, dass wegen $\langle N, e_3 \rangle > 0$, die Abbildung $s \mapsto y(s) \in \partial\Gamma(u)$ eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes $\partial\Gamma(u)$ ist. Dann ist dessen *geodätische Krümmung* gegeben durch (siehe A.10):

$$\kappa_g(s) = \frac{1}{|y'(s)|^3} \det \left(y'(s), y''(s), N \circ y(s) \right).$$

Um die Flächennormale an $y(\cdot)$ aus den Randdaten zu erhalten, brauchen wir zwei linear unabhängige Vektoren aus dem Tangentialraum am $y(\cdot)$. Dazu rechnen wir erst mal den Tangentialvektor entlang $y(\cdot)$ aus:

$$y'(s) = \begin{pmatrix} \gamma'(s) \\ g'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(s) \\ g'(s) \end{pmatrix}.$$

Einen anderen Vektor aus $T_{\gamma(s)}\Gamma(u)$ finden wir, indem wir die Parametrisierung (41)

$$\varphi: \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) := \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix},$$

betrachten, und diese anschließend in Normalenrichtung ν wie in (52) auf dem Rand $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ableiten.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial \nu} \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} \Big|_{\partial\Omega} = \begin{pmatrix} \nu \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{pmatrix} \Big|_{\partial\Omega} = \begin{pmatrix} \nu \\ h \end{pmatrix}.$$

Jetzt bilden wir das Kreuzprodukt zwischen $y'(s)$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\gamma(s))$, um die Richtung der Flächennormale zu gewinnen:

$$\begin{pmatrix} \tau^2 \\ -\tau^1 \\ h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tau^1 \\ \tau^2 \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g'\tau^1 - \tau^2 h \\ \tau^1 h - g'\tau^2 \\ (\tau^2)^2 + (\tau^1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau^1 g' - \tau^2 h \\ -\tau^2 g' + \tau^1 h \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g'\tau - h\nu \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei wir benutzt haben, dass $|\tau|^2 = 1$ gilt. Für die Flächeneinheitsnormale an $y(\cdot)$ bedeutet das:

$$N(y(s)) = \frac{1}{\sqrt{1 + g'^2 + h^2}} \begin{pmatrix} -g'\tau - h\nu \\ 1 \end{pmatrix} (s).$$

Die geodätische Krümmung von $\partial\Gamma(u)$ ist dann nach (66):

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \frac{1}{(|\tau|^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + g'^2 + h^2}} \det \begin{pmatrix} \tau & \tau' & -g'\tau - h\nu \\ g' & g'' & 1 \end{pmatrix} (s) \\ &= \frac{1}{(1 + g'^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + g'^2 + h^2}} \det \begin{pmatrix} \tau & -\kappa\nu & -g'\tau - h\nu \\ g' & g'' & 1 \end{pmatrix} (s) \\ &= \frac{1}{(1 + g'^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + g'^2 + h^2}} \{g'^2 \kappa(\nu \times \tau) + g''h(\tau \times \nu) - \kappa(\tau \times \nu)\} (s), \end{aligned}$$

wobei wir hier, mit der Notation $a \times b = a^1 b^2 - a^2 b^1 = \det(a, b)$, nach der untersten Zeile entwickelt und $\tau \times \tau = 0$ und $\nu \times \nu = 0$ benutzt haben. Es folgt mit $\tau \times \nu = -(\tau^1)^2 - (\tau^2)^2 = -1$:

$$(53) \quad \kappa_g(s) = \frac{g''(s)h(s) - \kappa(s)(1 + g'(s)^2)}{(1 + g'(s)^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + g'(s)^2 + h(s)^2}} \cdot \underbrace{(\tau \times \nu)}_{-1}.$$

Wir sehen, dass man mit der Kenntnis der Krümmung κ von $\partial\Omega$ aus den Randbedingungen h und g die geodätische Krümmung von $\partial\Gamma(u)$ errechnen kann. Weiter werden wir sehen, dass man die geodätische Krümmung κ_g auch ohne $h = \frac{\partial u}{\partial \nu} \circ \gamma$ abschätzen kann. Dazu nehmen wir (53)

$$\begin{aligned} |\kappa_g| &= \frac{|g''(s) \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} \circ \gamma(s) - \kappa(s)(1 + g'(s)^2)|}{(1 + g'(s)^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + g'(s)^2 + (\frac{\partial u}{\partial \nu} \circ \gamma(s))^2}} \\ &\leq \underbrace{\frac{|g''(s)|}{(1 + g'(s)^2)^{\frac{3}{2}}}}_{\leq |g''(s)|} \cdot \underbrace{\frac{|\frac{\partial u}{\partial \nu} \circ \gamma(s)|}{\sqrt{1 + g'(s)^2 + (\frac{\partial u}{\partial \nu} \circ \gamma(s))^2}}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{|\kappa(s)|}{(1 + g'(s)^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + g'(s)^2 + (\frac{\partial u}{\partial \nu} \circ \gamma(s))^2}}}_{\leq |\kappa(s)|}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)} = \max_s |g(s)| + \max_s |g'(s)| + \max_s |g''(s)|$. Also haben wir die Abschätzung:

$$\|\kappa_g\|_{C^0(\partial\Gamma(u))} \leq \|g\|_{C^2(\partial\Omega)} + \|\kappa\|_{C^0(\partial\Omega)}. \quad \blacksquare$$

Nun kommen wir zum Hauptresultat dieser Arbeit: eine a-priori-Abschätzung für (WM), wie sie in [DG2] gezeigt wurde. Sind nämlich Ω mit $u|_{\partial\Omega}$ vorgegeben und $\mathcal{W}(u)$ beschränkt, so kann man das Supremum $\sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ und den Flächeninhalt $|\Gamma(u)|$ abschätzen.

4.4 Satz (Supremum-Abschätzung für Randwertprobleme)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^2 -glattem Rand, $M > 0$ eine Zahl, $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -glatte und $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit:

$$\mathcal{W}(u) \leq M \quad \text{und} \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dann gilt die Abschätzung:

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| + \int_{\Omega} Q \, dx \leq C.$$

Hier hängt C von $\|\kappa\|_{C^0(\partial\Omega)}$, $|\partial\Omega|$, $|\Omega|$, $\chi(\Omega)$, $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$ und M ab.

Beweis: Dieser Beweis stammt aus [DG2]. Aus Lemma 4.2 folgt mit der Hölder-Ungleichung die Abschätzung:

$$(54) \quad \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq C \left\{ \|A\|_{L^1(\Gamma(u))} + \text{diam } \partial\Omega + \max_{x \in \partial\Omega} |g| \right\} \leq C \left\{ \int_{\Omega} |A|Q \, dx + 1 \right\} \\ \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} C \left\{ \left(\int_{\Omega} |A|^2 Q \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega} Q \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\}.$$

Da $\partial\Omega$ eine geschlossene Kurve ist, gilt $\text{diam } \partial\Omega \leq |\partial\Omega| := \mathcal{H}^1(\partial\Gamma(u))$, also hängt C in (54) direkt von $\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}$ und $|\partial\Omega|$ ab. Als nächstes stellen wir aus (45), Gauß-Bonnet und der Vorarbeit in Lemma 4.3 fest, dass:

$$(55) \quad \int_{\Omega} |A|^2 Q \, dx \stackrel{(11)}{=} \int_{\Omega} H^2 Q \, dx - 2 \int_{\Omega} \mathcal{K} Q \, dx \\ \stackrel{(\text{GB})}{=} 4\mathcal{W}(u) + 2 \int_{\partial\Gamma(u)} \kappa_g \, ds - 4\pi\chi(\Gamma(u)). \\ \leq 4\mathcal{W}(u) + 2\|\kappa_g\|_{C^0(\partial\Omega)} \cdot |\partial\Gamma(u)| - 4\pi\chi(\Gamma(u)) \\ \stackrel{(51)}{\leq} 4\mathcal{W}(u) + 2(\|g\|_{C^2(\partial\Omega)} + \|\kappa\|_{C^0(\partial\Omega)}) \cdot |\partial\Gamma(u)| - 4\pi\chi(\Gamma(u)).$$

Sei nun $s \mapsto \gamma(s) \in \partial\Omega$ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge. Dann ist $s \mapsto (\gamma(s), g \circ \gamma(s)) \in \partial\Gamma(u)$ eine Parametrisierung von $\partial\Gamma(u)$. Es folgt:

$$|\partial\Gamma(u)| = \int_0^{|\partial\Omega|} \left| \frac{d}{ds} (\gamma(s), g \circ \gamma(s)) \right| ds \leq \int_0^{|\partial\Omega|} \sqrt{1 + \|g\|_{C^1(\partial\Omega)}^2} \cdot \underbrace{|\gamma'(s)|}_{=1} ds \\ \leq \sqrt{1 + \|g\|_{C^2(\partial\Omega)}^2} \cdot |\partial\Omega|.$$

Die Euler-Charakteristik ist $\chi(\Gamma(u)) = \chi(\Omega)$, da das Geschlecht $g = 0$ und die Anzahl der Randkomponenten r durch $\partial\Omega$ festgelegt ist. Wir schätzen $\mathcal{W}(u)$ mit M und den Rest mit einer Konstante C ab, die von $\|\kappa\|_{C^0(\partial\Omega)}$, $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$, $\chi(\Omega)$ und $|\partial\Omega|$ abhängt.

$$\int_{\Omega} |A|^2 Q \, dx \leq 4M + C.$$

Dieses Ergebnis setzen wir in (54) ein und erhalten:

$$(56) \quad \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq C \left\{ \left(\int_{\Omega} Q \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\}.$$

Unserer nächstes Ziel ist es den Flächeninhalt $\int_{\Omega} Q \, dx$ abzuschätzen. Dazu werden wir den zweidimensionalen Divergenzsatz auf Ω anwenden und $Q^2 = 1 + |\nabla u|^2$ benutzen:

$$(57) \quad \int_{\Omega} uH \, dx \stackrel{(44)}{=} \int_{\Omega} u \, \text{div} \left(\frac{\nabla u}{Q} \right) dx \stackrel{\text{Div. Satz}}{=} - \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{Q} \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{u \frac{\partial u}{\partial \nu}}{Q} \, ds \\ = - \int_{\Omega} Q \, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{u}{Q} \, ds.$$

Zusammen mit der Ungleichung (56) haben wir

$$\int_{\Omega} Q \, dx = \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{u}{Q} \, ds - \int_{\Omega} uH \, dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\Omega| + \int_{\partial\Omega} g \frac{\langle \nabla u, \nu \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} ds + \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \int_{\Omega} |H| dx \\
&\stackrel{\text{CSU}}{\leq} C + \int_{\partial\Omega} |g| \frac{|\nabla u|}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} ds + C \left\{ \left(\int_{\Omega} Q dx \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\} \int_{\Omega} |H| dx \\
&\stackrel{(56)}{\leq} C + \int_{\partial\Omega} |g| ds + \sqrt{|\Omega|} C \left\{ \left(\int_{\Omega} Q dx \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\} \left(\int_{\Omega} |H|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C + \|g\|_{C^0(\partial\Omega)} \cdot |\partial\Omega| + C \left\{ \left(\int_{\Omega} Q dx \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\} \underbrace{\left(\int_{\Omega} |H|^2 Q dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq M} \\
&\leq C + C \left(\int_{\Omega} Q dx \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

wobei $|\Omega| := \mathcal{H}^2(\Omega)$. Man bemerke, dass die Konstante C nicht von der Normalenableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ abhängt. Für den nächsten Schritt betrachte man zunächst für $a \geq 0$ die Beziehung:

$$(58) \quad \sqrt{a} \leq \max \left\{ \frac{1}{b}, ba \right\} \leq ba + \frac{1}{b},$$

für jedes $b > 0$. Diese kann man sich durch eine Fallunterscheidung problemlos nachvollziehen. Wir setzen $a = \int_{\Omega} Q dx$ und $b = \frac{1}{2C} > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} Q dx &\leq C + C \left(\int_{\Omega} Q dx \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(58)}{\leq} C + C \left\{ \frac{1}{2C} \int_{\Omega} Q dx + 2C \right\} \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q dx + 2C^2 + C.
\end{aligned}$$

Also können wir den Flächeninhalt und damit nach (56) auch $\sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ abschätzen. D.h. wir haben:

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| + \int_{\Omega} Q dx \leq C,$$

wobei hier C von $\|\kappa\|_{C^0(\partial\Omega)}$, $|\partial\Omega|$, $|\Omega|$, $\chi(\Omega)$, $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$ und M abhängt. ■

4.5 Bemerkung (Dirichlet-/ & Navier-Randbedingungen)

Nun können wir in (WM) zusätzliche Randbedingungen fordern. So können wir einerseits den Tangentialraum der Fläche $\Gamma(u)$ an dessen Rand $\partial\Gamma(u)$ bzw. die Normalenableitung von u auf $\partial\Omega$ festlegen oder andererseits die mittlere Krümmung auf dem Rand vorgegeben. Die erste Situation entspricht den *Dirichlet-Randbedingungen*:

$$(DRB) \quad u = g, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ auf } \partial\Omega,$$

wobei ν die äußere Normale an $\partial\Omega$ ist. Die zweite Situation entspricht den *Navier-Randbedingungen*:

$$(NA) \quad u = g, \quad H[u] = h \text{ auf } \partial\Omega.$$

Wenn man Minimierer für das Willmore-Funktional für vorgegebenes g sucht, also festes $\partial\Gamma(u)$, entscheidet man sich oft für die Randvorgabe $H[u](x) = 0$ auf $\partial\Omega$. Nach einem Ergebnis aus [BJ] bedeutet das für eine Willmore-Fläche, die diese Randwertvorgaben erfüllt, dass diese schon eine Minimalfläche sein muss. D.h. man kann auf die Ergebnisse der Minimalflächentheorie zugreifen.

Insgesamt stellt man nun aus dem Resultat 4.2 fest, dass man für die Abschätzung des Maximums von u und des Flächeninhalts die Randvorgaben $H[u] = h$ oder $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ auf dem Rand $\partial\Omega$ gar nicht braucht, sondern nur das Wissen über g und $\mathcal{W}(u) \leq M$.

A. Appendix

A.1 Satz (Fortsetzung)

Sei \mathcal{M} eine n -dimensionale C^1 -glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} , $p \in \mathcal{M}$, V eine Umgebung von p in \mathbb{R}^{n+k} , $\bar{\varphi}$ wie in Definition 2.1 mit $\bar{\varphi}(U \cap \mathbb{R}^n) = \mathcal{M} \cap V$ und $f: \mathcal{M} \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $f \circ \varphi: U \cap \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in 0 ist. Dann gibt es eine Umgebung $\tilde{V} \subset V$ von p in \mathbb{R}^{n+k} und eine Fortsetzung $\bar{f}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$, die differenzierbar in p ist, sodass:

$$f|_{\mathcal{M} \cap \tilde{V}} = \bar{f}|_{\mathcal{M} \cap \tilde{V}}.$$

Beweis: Es gibt eine Umgebung $O \times Q \subset U$ von 0 in \mathbb{R}^{n+k} mit $O \subset \mathbb{R}^n$ und $Q \subset \mathbb{R}^k$ jeweils offen und $\bar{\varphi}(O \times Q) = \tilde{V} \subset V$, sodass \tilde{V} eine Umgebung von p in \mathbb{R}^{n+k} ist. Sei $P: O \times Q \rightarrow O$ eine Projektion in die ersten n Koordinaten:

$$P(o, q) = o, \quad \forall o \in O, \forall q \in Q,$$

sodass $P \circ \bar{\varphi}^{-1}(\tilde{V}) \subset O$, weil $\bar{\varphi}$ bijektiv ist. Wir definieren eine Fortsetzung $\bar{f}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\bar{f} := f \circ \varphi \circ P \circ \bar{\varphi}^{-1}.$$

Nun ist $f \circ \varphi$ differenzierbar in 0 nach Voraussetzung. P ist als eine Projektion auch glatt, und wegen der C^1 -Diffeomorphie von $\bar{\varphi}$ ist $\bar{\varphi}^{-1}$ C^1 -glatt. Da $P \circ \bar{\varphi}^{-1}(p) = 0$, folgt nach der Kettenregel, dass \bar{f} differenzierbar in p ist. Weiterhin gilt:

$$\bar{f}|_{\mathcal{M} \cap \tilde{V}} = f \circ \varphi \circ P \circ \bar{\varphi}^{-1}|_{\mathcal{M} \cap \tilde{V}} = f \circ \varphi \circ P|_{(O \times Q) \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}^k} = f \circ \varphi|_O = f|_{\mathcal{M} \cap \tilde{V}},$$

d.h. \bar{f} ist die gewünschte Fortsetzung von f . ■

A.2 Satz (C^ℓ -glatte Fortsetzung)

Sei \mathcal{M} eine n -dimensionale C^r -glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} , $p \in \mathcal{M}$, V eine Umgebung von p in \mathbb{R}^{n+k} , $\bar{\varphi}$ wie in Definition 2.1 mit $\bar{\varphi}(U \cap \mathbb{R}^2) = \mathcal{M} \cap V$ und $f: \mathcal{M} \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $f \circ \varphi: U \cap \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ C^ℓ -glatt ($\ell \leq r$) in 0 ist. Dann gibt es eine Umgebung $\tilde{V} \subset V$ von p in \mathbb{R}^{n+k} und eine C^ℓ -glatte Fortsetzung $\bar{f}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass:

$$f|_{\mathcal{M} \cap \tilde{V}} = \bar{f}|_{\mathcal{M} \cap \tilde{V}}.$$

Beweis: Wir wählen genau die gleiche Fortsetzung wie in A.1: $\bar{f}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\bar{f} := f \circ \varphi \circ P \circ \bar{\varphi}^{-1}.$$

Nun ist $f \circ \varphi$ C^ℓ -glatt nach Voraussetzung. P ist als eine Projektion auch glatt, und wegen der C^r -Diffeomorphie von $\bar{\varphi}$ ist $\bar{\varphi}^{-1}$ C^r -glatt [Dieu, Theorem 10.2.5]. Nach der Kettenregel folgt, dass \bar{f} C^ℓ glatt ist. ■

A.3 Satz

Sei \mathcal{M} eine n -dimensionale C^2 -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} und $p \in \mathcal{M}$. Dann existiert eine Umgebung $V \cap \mathcal{M}$ von p mit dort definierten C^1 -Vektorfeldern $(\tau_i)_{i=1}^n$ und $(\nu^j)_{j=1}^k$, sodass $\forall z \in V \cap \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} (\tau_i(z))_{i=1}^n & \text{ ist eine ONB von } T_z \mathcal{M}, \\ (\nu^j(z))_{j=1}^k & \text{ ist eine ONB von } T_z \mathcal{M}^\perp. \end{aligned}$$

Beweis: Seien $P_z: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow T_z\mathcal{M}$ orthogonale Projektionen aus 2.5, dann orthonormieren wir sukzessiv mit dem Gram-Schmidt-Verfahren simultan $\partial_i\varphi$ aus 2.1 für alle $z \in V \cap \mathcal{M}$:

$$\hat{\tau}_i := \partial_i\varphi - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \partial_i\varphi, \hat{\tau}_j \rangle}{|\hat{\tau}_j|^2} \hat{\tau}_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

$(\hat{\tau}_i)_{i=1}^n$ sind C^1 -glatte Vektorfelder, weil $(\partial_i\varphi)_{i=1}^n$ glatt und linear unabhängig, insbesondere können wir deswegen auch normieren und erhalten schließlich die gewollten:

$$\tau_i := \frac{1}{|\hat{\tau}_i|} \hat{\tau}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nun sei o.B.d.A. $T_p\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$. Dann ist $\text{span}(e_{n+1}, \dots, e_{n+k}) = T_p\mathcal{M}^\perp$. Da die Tangentialvektorfelder $\partial_i\varphi$ aus 2.1 stetig sind, kann man sich überlegen, dass für eine genügend kleine Umgebung $V \cap \mathcal{M}$ dann gilt:

$$|P_z \circ e_i| < \varepsilon_n, \quad i = n+1, \dots, n+k, \quad \forall z \in V \cap \mathcal{M},$$

wobei ε_n so klein gewählt wird, dass die Vektoren aus $T_z\mathcal{M}^\perp$

$$\tilde{\nu}_i := e_i - P_z \circ e_i, \quad i = n+1, \dots, n+k, \quad \forall z \in V \cap \mathcal{M}$$

linear unabhängig bleiben für $z \in V \cap \mathcal{M}$ und somit $T_z\mathcal{M}^\perp$ aufspannen. Nun bildet man nun mit dem Gram-Schmidt-Verfahren die orthogonalen glatten Vektorfelder

$$\hat{\nu}^i := \tilde{\nu}_{n+i} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \tilde{\nu}_{n+i}, \hat{\nu}^j \rangle}{|\hat{\nu}^j|^2} \hat{\nu}^j, \quad i = 1, \dots, k.$$

Diese werden in $U \cap \mathcal{M}$ nie null, deswegen können wir diese normieren und erhalten die gewünschten C^1 -glatten Vektorfelder:

$$\nu^i := \frac{1}{|\hat{\nu}^i|} \hat{\nu}^i, \quad i = 1, \dots, k. \quad \blacksquare$$

A.4 Lemma (Ableitung in Koordinatenrichtung)

Sei $p \in \mathcal{M}$, V eine Umgebung von p in \mathbb{R}^{n+k} und φ mit dazugehörigem U wie in der Definition 2.1. Weiterhin sei $f: U \cap \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -glatte Abbildung in Koordinaten. Dann gilt für alle $x \in U \cap \mathbb{R}^n$:

$$D_{\partial_i\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1}) = \partial_i f(x).$$

Beweis: Sei $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\gamma'(0) = \partial_i\varphi(x)$ und $\gamma(0) = \varphi(x)$, dann sei die Kurve in Koordinaten: $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)(s) := \varphi^{-1} \circ \gamma(s)$.

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \frac{d}{ds} \varphi((\gamma_1, \dots, \gamma_n)(s)) = \sum_{i=1}^n \partial_i\varphi((\gamma_1, \dots, \gamma_n)(s)) \cdot \gamma'_i(s) \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma'_i(s) \cdot (\partial_i\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \gamma)(s). \end{aligned}$$

$\gamma'_i(s)$ sind dabei eindeutige lokale Koordinaten von $\gamma'(s)$. Vielmehr folgt $\gamma'_j(0) = \delta_{ij}$.

$$\begin{aligned} D_{\partial_i\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1}) &= \frac{d}{ds} \left[f \circ \varphi^{-1}(\gamma(s)) \right]_{s=0} = \frac{d}{ds} \left[f(\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s)) \right]_{s=0} \\ &= \sum_{\ell=1}^n \partial_\ell f(\gamma_1(0), \dots, \gamma_n(0)) \cdot \gamma'_\ell(0) = \partial_i f(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A.5 Satz

\mathbf{A}_p ist für jedes $p \in \mathcal{M}$ symmetrisch.

Beweis: Seien $\tau, \eta \in T_p\mathcal{M}$, dann haben wir nach Definition:

$$\mathbf{A}_p(\tau, \eta) = - \sum_{i=1}^k \langle \eta, D_\tau \nu^i \rangle \nu^i,$$

also reicht es zu zeigen, dass es gilt:

$$\langle \eta, D_\tau \nu^i \rangle = \langle \tau, D_\eta \nu^i \rangle.$$

Zuerst zeigen wir die Aussage für eine durch lokale Koordinaten φ aus der Definition 2.1 erzeugte Basis. Also ist $\partial_1 \varphi \circ \varphi^{-1}, \dots, \partial_n \varphi \circ \varphi^{-1}$ Basis des Tangentialraums für alle Punkte in der Umgebung $V \cap \mathcal{M}$. Aus der Orthogonalitätsbeziehung $0 = \langle \partial_i \varphi, \nu^k \circ \varphi \rangle$ erhalten wir für alle $x \in U \cap \mathbb{R}^n$:

$$0 = \langle \partial_{ji} \varphi, \nu^k \circ \varphi \rangle(x) + \langle \partial_i \varphi, \partial_j (\nu^k \circ \varphi) \rangle(x) \stackrel{A.4}{=} \langle \partial_{ji} \varphi, \nu^k \circ \varphi \rangle(x) + \langle \partial_i \varphi(x), D_{\partial_j \varphi(x)} \nu^k \rangle,$$

d.h. für Basisvektoren haben wir wegen $\partial_{ij} \varphi = \partial_{ji} \varphi$ die Symmetrie bewiesen. Seien nun $\eta = \sum_{i=1}^n \eta^i \partial_i \varphi(0)$ und $\tau = \sum_{j=1}^n \tau^j \partial_j \varphi(0)$, dann folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p(\nu, \tau) &= - \sum_{\ell=1}^k \langle \eta, D_\tau \nu^\ell \rangle \nu^\ell(p) = - \sum_{\ell=1}^k \sum_{i,j=1}^n \eta^i \tau^j \langle \partial_i \varphi(0), D_{\partial_j \varphi(0)} \nu^\ell \rangle \nu^\ell(p) \\ &= - \sum_{\ell=1}^k \sum_{i,j=1}^n \eta^i \tau^j \langle \partial_j \varphi(0), D_{\partial_i \varphi(0)} \nu^\ell \rangle \nu^\ell(p) = \mathbf{A}_p(\tau, \nu). \end{aligned}$$

■

A.6 Satz

Man hat mit $(\tau_i)_{i=1}^n$ als eine Orthonormalbasis von $T_p\mathcal{M}$ und ω_n als den Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel folgende Relation:

$$\text{Spur}(\mathbf{A}_p) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_p(\tau_i, \tau_i) = \frac{1}{\omega_n} \int_{T_p\mathcal{M}, |\tau|=1} \mathbf{A}_p(\tau, \tau) \, d\mathcal{H}^{n-1}(\tau).$$

Beweis: Sei $p \in \mathcal{M}$ fest. Da die Basis $(\nu_i)_{i=1}^k$ von $T_p\mathcal{M}^\perp$ orthonormal ist, können wir uns auf die Komponente

$$A^k(\eta, \mu) := \langle \mathbf{A}_p(\eta, \mu), \nu_k \rangle = - \langle \eta, D_\mu \nu_k \rangle$$

beschränken. Da nun $\mathbf{A}_p(\cdot, \cdot)$ eine symmetrische Bilinearform auf $T_p\mathcal{M}$ ist, ist es auch $A^k(\cdot, \cdot)$, d.h. die dazugehörige Matrix ist diagonalisierbar und es existieren Eigenvektoren $(\tau_i)_{i=1}^n$, die eine ONB von $T_p\mathcal{M}$ bilden und zugehörige Eigenwerte $(\lambda_i)_{i=1}^n$ haben. O.B.d.A soll gelten $\tau_i = e_i$, $(e_i)_{i=1}^n$ kanonische Basis des \mathbb{R}^n . Dann haben wir mit $\eta = \sum_{i=1}^n \eta^i e_i$:

$$A^k(\eta, \eta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta^i \eta^i = \langle \chi, \eta \rangle,$$

wobei $\chi(\eta) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta^i e_i$ sein soll. Weiter benutzen wir den Divergenzsatz 2.7 um über die Einheitskugel in $T_p\mathcal{M}$ zu integrieren, dazu stellen wir fest, dass η die äußere Normale zu $\{\eta \in T_p\mathcal{M}, |\eta| = 1\}$ ist.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\omega_n} \int_{T_p \mathcal{M}, |\eta|=1} \mathbf{A}_p(\eta, \eta) \, d\mathcal{H}^{n-1}(\eta) \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{T_p \mathcal{M}, |\eta|=1} \langle \chi, \eta \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(\eta) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|x| \leq 1} \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i e_i \right) \mathcal{L}^n(x) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i = \operatorname{Spur}(A^k),
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass ω_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel ist. ▀

A.7 Satz (Lokale Darstellungen)

Sei \mathcal{M} eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} , dann gilt für die skalare mittlere Krümmung und den Betragsquadrat der zweiten Fundamentalform:

$$(a) \quad H = \operatorname{Spur}((A_j^i)),$$

$$(b) \quad |A|^2 = \sum_{i,j,k,\ell} g^{ij} g^{k\ell} A_{ik} A_{j\ell}.$$

Dann gilt für die Divergenz eines Tangentialvektorfeldes $W \circ \varphi = \sum_i W^i \partial_i \varphi$ lokal:

$$(c) \quad \operatorname{div}_{\mathcal{M}} W \circ \varphi = \sum_i \partial_i W^i + \sum_{i,k} W^i \Gamma_{ki}^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \partial_i (\sqrt{g} \cdot W^i)$$

mit Christoffelsymbolen $\Gamma_{ki}^j := \frac{1}{2} \sum_{\ell} g^{j\ell} (g_{k\ell,i} + g_{i\ell,k} - g_{ki,\ell})$. Für die Divergenz eines allgemeinen Vektorfeldes $W: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ gilt lokal:

$$(d) \quad \operatorname{div}_{\mathcal{M}} W \circ \varphi = \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \langle \partial_k (W \circ \varphi), \partial_\ell \varphi \rangle.$$

Sei $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -glatt, dann gilt lokal:

$$(e) \quad (\nabla^{\mathcal{M}} F) \circ \varphi = \sum_{i,k,\ell} g^{k\ell} \partial_k (F \circ \varphi) \partial_\ell \varphi,$$

$$(f) \quad (\Delta_{\mathcal{M}} F) \circ \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,\ell} \partial_i (\sqrt{g} \cdot g^{i\ell} \partial_\ell (F \circ \varphi)).$$

Nun sei \mathcal{M} eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Es gilt:

$$(g) \quad \mathcal{K} = \det((A_j^i)).$$

Außerdem hat man für die Gauß-Krümmung eines Graphen $\Gamma(u)$:

$$(h) \quad \mathcal{K} = \frac{\det D^2 u}{Q^4}.$$

Beweis: Seien im Folgenden $p \in \mathcal{M}$, φ wie in Definition 2.1, $g_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$ und g^{ij} die Einträge der zu (g_{ij}) inversen Matrix. Wir zeigen alle Beziehungen nacheinander:

(a) Zur Vorbereitung stellen wir fest, dass es für Vektoren $W, V \in T_p\mathcal{M}$ mit $W = \sum_i W^i \partial_i \varphi(0)$ und $V = \sum_j V^j \partial_j \varphi(0)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle V, W \rangle &= \sum_{i,j} V^i W^j g_{ij} \Big|_0 = \sum_{i,j} V^i W^j \sum_{k,\ell} g_{ik} g^{k\ell} g_{\ell j} \Big|_0 = \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \sum_i V^i g_{ik} \sum_j W^j g_{\ell j} \Big|_0 \\
(59) \quad &= \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \left\langle \sum_i V^i \partial_i \varphi, \partial_k \varphi \right\rangle \left\langle \sum_j W^j \partial_j \varphi, \partial_\ell \varphi \right\rangle \Big|_0 \\
&= \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \langle V, \partial_k \varphi \rangle \langle W, \partial_\ell \varphi \rangle \Big|_0.
\end{aligned}$$

Weiterhin sei $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ eine Orthonormalbasis von $T_p\mathcal{M}$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
\text{Spur} \left((A_j^i) \right) \Big|_0 &= \sum_{i,j} g^{ij} A_{ji} \Big|_0 = \sum_{i,j} g^{ij}(0) A_p(\partial_j \varphi(0), \partial_i \varphi(0)) \\
&= \sum_{i,j} g^{ij}(0) A_p \left(\sum_k \langle \partial_j \varphi, \tau_k \rangle \tau_k, \sum_\ell \langle \partial_i \varphi, \tau_\ell \rangle \tau_\ell \right) \\
&= \sum_{i,j,k,\ell} g^{ij} \langle \partial_j \varphi, \tau_k \rangle \langle \partial_i \varphi, \tau_\ell \rangle \Big|_0 A_p(\tau_k, \tau_\ell) \\
&= \sum_{k,\ell} A_p(\tau_k, \tau_\ell) \sum_{i,j} g^{ij} \langle \partial_j \varphi, \tau_k \rangle \langle \partial_i \varphi, \tau_\ell \rangle \Big|_0 \\
&\stackrel{(59)}{=} \sum_{k,\ell} A_p(\tau_k, \tau_\ell) \langle \tau_k, \tau_\ell \rangle = \sum_k A_p(\tau_k, \tau_k) = H(p).
\end{aligned}$$

(b) Sei im Folgenden $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ eine Orthonormalbasis von $T_p\mathcal{M}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,\ell} g^{ij} g^{k\ell} A_{ik} A_{j\ell} \Big|_0 &= \sum_{i,j,k,\ell} g^{ij} g^{k\ell} A_\varphi(\partial_i \varphi, \partial_k \varphi) A_\varphi(\partial_j \varphi, \partial_\ell \varphi) \Big|_0 \\
&= \sum_{i,j,k,\ell} g^{ij} g^{k\ell} \sum_{m,n} \langle \partial_i \varphi, \tau_m \rangle \langle \partial_k \varphi, \tau_n \rangle A_p(\tau_m, \tau_n) \sum_{s,t} \langle \partial_j \varphi, \tau_s \rangle \langle \partial_\ell \varphi, \tau_t \rangle A_p(\tau_s, \tau_t) \Big|_0 \\
&= \sum_{m,n,s,t} A_p(\tau_m, \tau_n) A_p(\tau_s, \tau_t) \sum_{i,j} g^{ij} \langle \partial_i \varphi, \tau_m \rangle \langle \partial_j \varphi, \tau_s \rangle \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \langle \partial_k \varphi, \tau_n \rangle \langle \partial_\ell \varphi, \tau_t \rangle \Big|_0 \\
&= \sum_{m,n,s,t} A_p(\tau_m, \tau_n) A_p(\tau_s, \tau_t) \langle \tau_m, \tau_s \rangle \langle \tau_n, \tau_t \rangle \\
&= \sum_{m,n} A_p(\tau_m, \tau_n) A_p(\tau_m, \tau_n) \\
&= |A|^2(p).
\end{aligned}$$

(c) Wir benutzen die Notation: $\partial_i g_{k\ell} = g_{k\ell,i}$. Zur Vorbereitung berechnen wir:

$$\begin{aligned}
g_{i\ell,k} + g_{k\ell,i} - g_{ik,\ell} &= \langle \partial_{ki} \varphi, \partial_\ell \varphi \rangle + \langle \partial_{k\ell} \varphi, \partial_i \varphi \rangle + \langle \partial_{ik} \varphi, \partial_\ell \varphi \rangle + \langle \partial_{i\ell} \varphi, \partial_k \varphi \rangle \\
(60) \quad &\quad - \langle \partial_{\ell i} \varphi, \partial_k \varphi \rangle - \langle \partial_{\ell k} \varphi, \partial_i \varphi \rangle \\
&= 2 \langle \partial_{ki} \varphi, \partial_\ell \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Sei $W \circ \varphi = \sum_i W^i \partial_i \varphi$, dann haben wir wie in (a)

$$\text{div}_{\mathcal{M}}(W)(p) = \sum_i \langle D_{\tau_i} W, \tau_i \rangle = \sum_{i,j} \langle D_{\tau_i} W, \tau_j \rangle \langle \tau_i, \tau_j \rangle = \sum_{i,j,k,\ell} \langle D_{\tau_i} W, \tau_j \rangle g^{k\ell} \langle \tau_i, \partial_k \varphi \rangle \langle \tau_j, \partial_\ell \varphi \rangle \Big|_0$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \langle D_{\partial_k \varphi} W, \partial_\ell \varphi \rangle \Big|_0 = \sum_{i,k,\ell} g^{k\ell}(0) \langle D_{\partial_k \varphi(0)} (W^i \partial_i \varphi), \partial_\ell \varphi(0) \rangle \\
&\stackrel{A.4}{=} \sum_{i,k,\ell} \partial_k W^i g^{k\ell} \langle \partial_i \varphi, \partial_\ell \varphi \rangle \Big|_0 + \sum_{i,k,\ell} W^i g^{k\ell} \langle \partial_{ki} \varphi, \partial_\ell \varphi \rangle \Big|_0 \\
&\stackrel{(60)}{=} \sum_i \partial_i W^i \Big|_0 + \sum_{i,k} W^i \Gamma_{ki}^k \Big|_0,
\end{aligned}$$

mit Christoffelsymbolen $\Gamma_{ki}^j = \frac{1}{2} \sum_\ell g^{j\ell} (g_{k\ell,i} + g_{i\ell,k} - g_{k\ell,i})$. Seien (b_{ij}) die $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen, die durch das Streichen der k -ten Zeilen und ℓ -ten Spalten entstehen, und $\text{ad}(g_{k\ell})$ die Adjunkte von $(g_{k\ell})$. Nach der Cramer'schen Regel [Gr, Satz 5.5.4] gilt:

$$(61) \quad g^{ij} \cdot g = (\text{ad}(g_{k\ell}))_{ij} = (-1)^{i+j} \det b_{ji}.$$

Da (g_{ij}) symmetrisch ist, ist auch $\det b_{ij} = \det b_{ji}$. Weiterhin haben mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz [Gr, Satz 5.4.5] und der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\partial_i g &= \sum_{k,\ell} \frac{\partial g}{\partial g_{k\ell}} \cdot g_{k\ell,i} = \sum_{k,\ell} g_{k\ell,i} \frac{\partial}{\partial g_{k\ell}} \left\{ \sum_j (-1)^{(k+j)} g_{kj} \cdot \det b_{kj} \right\} \\
&= \sum_{k,\ell,j} (-1)^{(k+j)} g_{k\ell,i} \cdot \underbrace{\frac{\partial g_{kj}}{\partial g_{k\ell}}}_{=\delta_{j\ell}} \cdot \det b_{kj} + \sum_{k,\ell,j} (-1)^{(k+j)} g_{k\ell,i} \cdot g_{kj} \cdot \underbrace{\frac{\partial \det b_{kj}}{\partial g_{k\ell}}}_{=0} \\
&= \sum_{k,\ell} (-1)^{k+\ell} g_{k\ell,i} \cdot \det b_{k\ell} \stackrel{(61)}{=} g \cdot \sum_{k,\ell} g^{k\ell} g_{k\ell,i} \\
&= g \sum_{k,\ell} g^{k\ell} (\langle \partial_{ik} \varphi, \partial_\ell \varphi \rangle + \langle \partial_{i\ell} \varphi, \partial_k \varphi \rangle) = 2g \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \langle \partial_{ik} \varphi, \partial_\ell \varphi \rangle = 2g \sum_k \Gamma_{ki}^k.
\end{aligned}$$

Also hat man jetzt für die Divergenz

$$(\text{div}_{\mathcal{M}} W) \circ \varphi = \sum_i \partial_i W^i + \sum_i W^i \frac{\partial_i g}{2g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \partial_i (\sqrt{g} \cdot W^i).$$

(d) Wie in (c) hat man

$$\begin{aligned}
\text{div}_{\mathcal{M}}(W)(p) &= \sum_i \langle D_{\tau_i} W, \tau_i \rangle = \sum_{i,j} \langle D_{\tau_i} W, \tau_j \rangle \langle \tau_i, \tau_j \rangle = \sum_{i,j,k,\ell} \langle D_{\tau_i} W, \tau_j \rangle g^{k\ell} \langle \tau_i, \partial_k \varphi \rangle \langle \tau_j, \partial_\ell \varphi \rangle \Big|_0 \\
&= \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \langle D_{\partial_k \varphi} W, \partial_\ell \varphi \rangle \Big|_0 = \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \langle \partial_k (W \circ \varphi), \partial_\ell \varphi \rangle \Big|_0
\end{aligned}$$

(e) Für den Gradienten gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla^{\mathcal{M}} F(p) &= \sum_i (D_{\tau_i} F) \tau_i = \sum_{i,j} (D_{\tau_i} F) \tau_j \langle \tau_i, \tau_j \rangle \\
&\stackrel{(59)}{=} \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \sum_i (D_{\tau_i} F) \langle \tau_i, \partial_k \varphi \rangle \sum_j \langle \tau_j, \partial_\ell \varphi \rangle \tau_j \Big|_0 \\
&= \sum_{k,\ell} g^{k\ell}(0) (D_{\partial_k \varphi(0)} F) \partial_\ell \varphi(0) \stackrel{A.4}{=} \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \partial_k (F \circ \varphi) \partial_\ell \varphi \Big|_0.
\end{aligned}$$

(f) Für den Laplace-Beltrami-Operator folgt:

$$(\Delta_{\mathcal{M}} F) \circ \varphi = (\operatorname{div}_{\mathcal{M}} \nabla^{\mathcal{M}} F) \circ \varphi \stackrel{(e)}{=} \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,\ell} \partial_i (\sqrt{g} \cdot g^{i\ell} \partial_\ell (F \circ \varphi)).$$

(g) Wir gehen genauso wie im (b) vor. Seien τ_1, τ_2 eine ONB von $T_p \mathcal{M}$, dann folgt analog zu (a):

$$\begin{aligned} & 2(A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2) \Big|_0 \\ &= \left\{ (A_1^1 + A_2^2)^2 - (A_1^1)^2 - (A_2^2)^2 - 2A_2^1 A_1^2 \right\} \Big|_0 \\ &= \sum_{i,j} A_i^i A_j^j \Big|_0 - \sum_{i,j} A_j^i A_i^j \Big|_0 \\ &= \sum_{i,j,n,m} g^{im} A_{mi} g^{jn} A_{nj} \Big|_0 - \sum_{i,j,n,m} g^{im} A_{mj} g^{jn} A_{ni} \Big|_0 \\ &= \sum_{i,j,n,m} \sum_{q,p,s,t} g^{im} g^{jn} \langle \partial_m \varphi, \tau_q \rangle \langle \partial_i \varphi, \tau_p \rangle \cdot A_p(\tau_q, \tau_p) \cdot \langle \partial_n \varphi, \tau_s \rangle \langle \partial_j \varphi, \tau_t \rangle \cdot A_p(\tau_s, \tau_t) \Big|_0 \\ &\quad - \sum_{i,j,n,m} \sum_{q,p,s,t} g^{im} g^{jn} \langle \partial_m \varphi, \tau_q \rangle \langle \partial_j \varphi, \tau_p \rangle \cdot A_p(\tau_q, \tau_p) \cdot \langle \partial_n \varphi, \tau_s \rangle \langle \partial_i \varphi, \tau_t \rangle \cdot A_p(\tau_s, \tau_t) \Big|_0 \\ &= \sum_{q,p,s,t} A_p(\tau_q, \tau_p) A_p(\tau_s, \tau_t) \sum_{i,m} g^{im} \langle \partial_m \varphi, \tau_q \rangle \langle \partial_i \varphi, \tau_p \rangle \sum_{n,j} g^{jn} \langle \partial_n \varphi, \tau_s \rangle \langle \partial_j \varphi, \tau_t \rangle \Big|_0 \\ &\quad - \sum_{q,p,s,t} A_p(\tau_q, \tau_p) A_p(\tau_s, \tau_t) \sum_{i,m} g^{im} \langle \partial_m \varphi, \tau_q \rangle \langle \partial_i \varphi, \tau_t \rangle \sum_{n,j} g^{jn} \langle \partial_n \varphi, \tau_s \rangle \langle \partial_j \varphi, \tau_p \rangle \Big|_0 \\ &= \sum_{q,p,s,t} A_p(\tau_q, \tau_p) A_p(\tau_s, \tau_t) \delta_p^q \delta_t^s - \sum_{q,p,s,t} A_p(\tau_q, \tau_p) A_p(\tau_s, \tau_t) \delta_t^q \delta_p^s \\ &= \sum_{q,s} A_p(\tau_q, \tau_q) A_p(\tau_s, \tau_s) - \sum_{q,s} A_p(\tau_q, \tau_s) A_p(\tau_s, \tau_q) \\ &= (A_p(\tau_1, \tau_1) + A_p(\tau_2, \tau_2))^2 - A_p(\tau_1, \tau_1)^2 - A_p(\tau_2, \tau_2)^2 - 2A_p(\tau_1, \tau_2)^2 \\ &= 2A_p(\tau_1, \tau_1) A_p(\tau_2, \tau_2) - 2A_p(\tau_1, \tau_2)^2 \\ &= 2\mathcal{K}(p). \end{aligned}$$

(h) Für die Gaußsche Krümmung eines Graphs berechnen wir (vgl. Weingartenabbildung):

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \det((A_j^i)) \\ &\stackrel{(43)}{=} \frac{1}{Q^6} \left\{ \left((1 + u_{x_2}^2) u_{x_1 x_1} - u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} \right) \cdot \left(-u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} + (1 + u_{x_1}^2) u_{x_2 x_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(-u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_1} + (1 + u_{x_1}^2) u_{x_1 x_2} \right) \cdot \left((1 + u_{x_2}^2) u_{x_1 x_2} - u_{x_1} u_{x_2} u_{x_2 x_2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{Q^6} \left\{ u_{x_1 x_1} \left((1 + u_{x_2}^2) (1 + u_{x_1}^2) u_{x_2 x_2} - u_{x_1}^2 u_{x_2}^2 u_{x_2 x_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \underbrace{(1 + u_{x_2}^2) u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} + u_{x_1} u_{x_2} (1 + u_{x_2}^2) u_{x_1 x_2}}_{=0} \right) \right. \\ &\quad \left. + u_{x_1 x_2} \left(u_{x_1}^2 u_{x_2}^2 u_{x_1 x_2} - (1 + u_{x_1}^2) (1 + u_{x_2}^2) u_{x_1 x_2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \underbrace{-u_{x^1}u_{x^2}(1+u_{x^1}^2)u_{x^2x^2} + (1+u_{x^1}^2)u_{x^1}u_{x^2}u_{x^2x^2}}_{=0} \right\} \\
&= \frac{1}{Q^6} \left\{ u_{x^1x^1}(u_{x^2x^2}(1+u_{x^1}^2+u_{x^2}^2)) + u_{x^1x^2}(-u_{x^1x^2}(1+u_{x^1}^2+u_{x^2}^2)) \right\} \\
&= \frac{1}{Q^4}(u_{x^1x^1}u_{x^2x^2} - u_{x^1x^2}^2) \\
&= \frac{\det D^2u}{Q^4}.
\end{aligned}$$

■

A.8 Satz (Dichte von $\mathcal{H}^2 \llcorner \mathcal{M}$)

Sei \mathcal{M} eine C^1 -Fläche ohne Rand in \mathbb{R}^m , dann gilt für $y \in \mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_\rho = \mathcal{M} \cap B_\rho(y)$:

$$\frac{|\mathcal{M}_\sigma|}{\sigma^2} \xrightarrow{\sigma \searrow 0} \pi.$$

Beweis: Sei o.B.d.A (der Flächeninhalt ist bewegungsinvariant) $y = 0$, $T_y\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^m | x_i = 0, i = 3, \dots, m\}$ und die Abbildung $\bar{\varphi}$ wie in Definition 2.1, so dass für hinreichend kleines σ :

$$\bar{\varphi}: U \cap \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap \mathcal{M} \supset \mathcal{M}_\sigma, \quad 0 \in U \subset \mathbb{R}^2, \quad \bar{\varphi}(0) = 0$$

gilt. U ist eine Umgebung von 0 in \mathbb{R}^m und $\bar{\varphi}(U \cap \mathbb{R}^2)$ eine relativ offene (bzgl. \mathcal{M}) Umgebung von 0 . Zusätzlich ist $\bar{\varphi}$ ein Diffeomorphismus und es gelte (ansonsten auf U eine Drehstreckung vorschalten):

$$(62) \quad d\bar{\varphi}_0(e_1) = e_1 \quad \text{und} \quad d\bar{\varphi}_0(e_2) = e_2.$$

Weiter betrachten wir die Einschränkung φ von $\bar{\varphi}$ auf \mathbb{R}^2 . Dann ist das Differential von φ in 0 eine Identität. Weiterhin haben wir nach Definition 2.18 für die Jacobische:

$$\begin{aligned}
J_2\varphi(x) &= \sqrt{\det \left[(D\varphi(x))^T \circ (D\varphi(x)) \right]} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle \partial_1\varphi, \partial_1\varphi \rangle & \langle \partial_1\varphi, \partial_2\varphi \rangle \\ \langle \partial_2\varphi, \partial_1\varphi \rangle & \langle \partial_2\varphi, \partial_2\varphi \rangle \end{pmatrix}} \\
&= \sqrt{\det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}} = \sqrt{g},
\end{aligned}$$

wobei $g_{ij} = \langle \partial\varphi_i, \partial\varphi_j \rangle$ Einträge der lokalen Darstellung des Metrik-Tensors und $g = \det((g_{ij}))$ Determinante des Metrik-Tensors sind. Wegen (62) ist $\partial\varphi_i(0) = e_i$ gilt:

$$J_2\varphi(0) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = 1.$$

Da φ C^1 -glatt ist, sind $D\varphi$ und somit \sqrt{g} (wegen Stetigkeit der Determinanten) gleichmäßig stetig bzgl. x auf einer hinreichend kleinen Kugel in $U \cap \mathbb{R}^2$. Wähle für ein gegebenes $\delta > 0$ ein geeignetes $r > 0$ so klein, dass für alle $p \in B_r(0) \subset U \cap \mathbb{R}^2$ gilt:

$$|J_2\varphi(x) - 1| < \delta, \quad \forall x \in B_r(0).$$

Betrachten wir für ein $0 \neq x \in B_r(0)$ eine C^1 -Kurve $\gamma: [0, |x|] \rightarrow B_r(0)$ mit $\gamma(0) = 0, \gamma(|x|) = x, \gamma(s) = sx/|x|$ und $s \in [0, |x|]$. Für diese gilt:

$$\frac{d}{ds}\varphi(\gamma(s)) = \frac{d}{ds}\varphi\left(s \frac{x}{|x|}\right) = \sum_{i=1}^2 \partial_i\varphi\left(s \frac{x}{|x|}\right) \cdot \frac{x_i}{|x|} = D\varphi\left(s \frac{x}{|x|}\right) \cdot \frac{x}{|x|}$$

Da $D\varphi$ stetig und $D\varphi(0) = (e_1, e_2)$, kann man

$$(63) \quad |D\varphi(p) - (e_1, e_2)| \leq \delta, \quad \forall p \in B_r(0) \cap \mathbb{R}^2$$

erreichen, indem man gegebenenfalls r weiter verkleinert. Sei nun σ so klein, dass $\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma) \subset B_r(0)$. Ansonsten würde es eine Folge $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ mit $\omega_i \rightarrow 0$ geben, mit $\varphi^{-1}(\omega_i) \notin B_r(0)$. Da aber φ ein Diffeomorphismus ist, gilt $\varphi^{-1}(\omega_i) \rightarrow 0$, und das ist ein Widerspruch! Es folgt für $0 \neq x \in B_r(0) \cap \mathbb{R}^2$:

$$(64) \quad \begin{aligned} |\varphi(x) - x| &= |\varphi(x) - \varphi(0) - x - 0| = \left| \int_0^{|x|} \frac{d}{ds} \varphi(\gamma(s)) \, ds - \int_0^{|x|} \gamma'(s) \, ds \right| \\ &= \left| \int_0^{|x|} \left\{ D\varphi \left(s \frac{x}{|x|} \right) \cdot \frac{x}{|x|} - \frac{x}{|x|} \right\} ds \right| \\ &\leq \int_0^{|x|} \underbrace{\left| D\varphi \left(s \frac{x}{|x|} \right) - (e_1, e_2) \right|}_{\leq \delta, (63)} \underbrace{\left| \frac{x}{|x|} \right|}_{=1} ds \\ &\leq \delta |x|. \end{aligned}$$

Sei weiterhin $\sigma < r$, dann haben wir einerseits wegen (64):

$$x \in B_{\sigma/(1+\delta)}(0) \subset B_r(0) \quad \Rightarrow \quad |x| \leq \sigma - \delta|x| \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x)| \leq |\varphi(x) - x| + |x| \stackrel{(64)}{\leq} \sigma,$$

andererseits gilt ebenfalls wegen (64):

$$x \in \varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma) \subset B_r(0) \quad \Rightarrow \quad |x| \leq |\varphi(x) - x| + |\varphi(x)| \leq \delta|x| + \sigma \quad \Rightarrow \quad |x| \leq \frac{\sigma}{1-\delta}.$$

Insgesamt haben wir dann

$$B_{\sigma/(1+\delta)}(0) \subset \varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma) \subset B_{\sigma/(1-\delta)}(0) \quad \Rightarrow \quad \pi \frac{\sigma^2}{(1+\delta)^2} \leq |\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)| \leq \pi \frac{\sigma^2}{(1-\delta)^2}.$$

Schicken wir $\delta \rightarrow 0$ und somit auch $\sigma \rightarrow 0$, so erhalten wir $|\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)|/\sigma^2 \rightarrow \pi$. Außerdem haben wir insbesondere noch $\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma) : |J_2\varphi(x) - 1| \leq \delta$, d.h. wir setzen in die Flächenformel (14) $B = \varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)$ ein und erhalten wegen der Injektivität von φ :

$$\text{card}(\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma) \cap \varphi^{-1}(z)) = \chi_{\mathcal{M}_\sigma}(z).$$

Die Flächenformel ist dann:

$$|\mathcal{M}_\sigma| = \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)} J_2\varphi(x) \, d\mathcal{L}^2(x).$$

So haben wir mit $\delta \rightarrow 0$ und damit $\sigma \rightarrow 0$ ($\sigma < r$):

$$\begin{aligned} \left| |\mathcal{M}_\sigma|/\sigma^2 - \pi \right| &\leq \frac{1}{\sigma^2} \left| |\mathcal{M}_\sigma| - |\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)| \right| + \left| |\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)|/\sigma^2 - \pi \right| \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left| \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)} J_2\varphi(x) \, d\mathcal{L}^2(x) - \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)} d\mathcal{L}^2(x) \right| + \left| |\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)|/\sigma^2 - \pi \right| \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2} \underbrace{\left| \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)} |J_2\varphi(x) - 1| \, d\mathcal{L}^2(x) \right|}_{\leq \delta |\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)|/\sigma^2 \rightarrow 0} + \underbrace{\left| |\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\sigma)|/\sigma^2 - \pi \right|}_{\rightarrow 0}, \end{aligned}$$

also $|\mathcal{M}_\sigma|/\sigma^2 \rightarrow \pi$ für $\sigma \rightarrow 0$. ▀

A.9 Satz (D^2u -Abschätzung)

Falls die Fläche als ein C^2 -glatter Graph $\Gamma(u)$ von u gegeben ist, haben wir folgende Abschätzung mit der zweiten Fundamentalform:

$$|A|^2 \geq \frac{1}{Q^6} |D^2u|^2,$$

mit der euklidischen Norm der Hessischen von u :

$$|D^2u|^2 = u_{x_1x_1}^2 + 2u_{x_1x_2}^2 + u_{x_2x_2}^2.$$

Beweis: Dieser Beweis stammt aus [DG2]. Die Determinante von (g_{ij}) ist:

$$\det((g_{ij})) = \det \begin{pmatrix} 1 + u_{x_1}^2 & u_{x_1}u_{x_2} \\ u_{x_1}u_{x_2} & 1 + u_{x_2}^2 \end{pmatrix} = 1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = Q^2.$$

Die Inverse Matrix von (g_{ij}) ist:

$$(g^{ij}) = \frac{1}{Q^2} \begin{pmatrix} 1 + u_{x_2}^2 & -u_{x_1}u_{x_2} \\ -u_{x_1}u_{x_2} & 1 + u_{x_1}^2 \end{pmatrix}.$$

Um die Eigenwerte zu berechnen, schreiben wir das charakteristische Polynom von (g^{ij}) multipliziert mit Q^4 auf ($Q^2 = 1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2$):

$$\begin{aligned} (1 + u_{x_2}^2 - Q^2\lambda)(1 + u_{x_1}^2 - Q^2\lambda) - u_{x_1}^2u_{x_2}^2 \\ = (1 + u_{x_2}^2 - Q^2\lambda)(-Q^2\lambda) - Q^2\lambda(1 + u_{x_1}^2) + Q^2 \\ = Q^4\lambda^2 - \lambda Q^2(1 + Q^2) + Q^2. \end{aligned}$$

Also haben wir die Eigenwerte bestimmt durch

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + Q^2}{2Q^2} \pm \sqrt{\frac{(1 + Q^2)^2}{4Q^4} - \frac{4Q^2}{4Q^4}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{Q^2}, \quad \lambda_2 = 1.$$

Wegen $Q \geq 1$ ist $\frac{1}{Q^2}$ der kleinste Eigenwert. Da nun (g^{ij}) eine positiv definite Matrix ist, haben wir die natürliche Abschätzung, die man zum Beispiel mit Hilfe der Diagonalisierung beweisen kann:

$$(65) \quad \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \xi_i \xi_j \geq \frac{1}{Q^2} |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Weiterhin können wir mit der Diagonalisierung eine positiv definite symmetrische Matrix (b^{ij}) finden, die eine Wurzel von (g^{ij}) ist, und insbesondere ihre Eigenwerte Wurzeln von den g^{ij} Eigenwerten sind. Also:

$$g^{ij} = \sum_m b^{im} b^{mj}.$$

Somit haben wir eine Abschätzung:

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \sum_{i,j,k,\ell} g^{ij} g^{k\ell} A_{ik} A_{j\ell} = \sum_{i,j,k,\ell,m} g^{k\ell} b^{im} b^{mj} A_{ik} A_{j\ell} = \sum_{m,k,\ell} g^{k\ell} \left(\sum_i b^{mi} A_{ik} \right) \left(\sum_j b^{mj} A_{j\ell} \right) \\ &\stackrel{(65)}{\geq} \frac{1}{Q^2} \sum_m \sum_n \left(\sum_i b^{mi} A_{in} \right)^2 = \frac{1}{Q^2} \sum_{m,n,i,j} b^{mi} b^{mj} A_{in} A_{jn} = \frac{1}{Q^2} \sum_{i,j,n} g^{ij} A_{in} A_{jn} \\ &\stackrel{(65)}{\geq} \frac{1}{Q^4} \sum_{n,i} (A_{in})^2 \stackrel{(42)}{=} \frac{1}{Q^6} \sum_{i,n} (u_{x^i x^n})^2 = \frac{1}{Q^6} |D^2u|^2. \end{aligned}$$

■

A.10 Satz

Sei $I \ni s \mapsto y(s) \in \mathcal{M}$ eine C^2 -glatte Kurve, \mathcal{M} eine C^1 -glatte Fläche in \mathbb{R}^3 mit einem Einheitsnormalenfeld N , dann ist dessen vorzeichenbehaftete geodätische Krümmung gegeben durch:

$$(66) \quad \kappa_g(s) = \frac{1}{|y'(s)|^3} \det \left(y'(s), y''(s), N(y(s)) \right).$$

Beweis: Erst mal sei $y(\cdot)$ nach der Bogenlänge parametrisiert, die geodätische Krümmung ist dann wie in Definition 2.14:

$$\kappa_g(s) = \langle y''(s), \nu(s) \rangle = \left\langle y''(s), N(y(s)) \times y'(s) \right\rangle = \det \left(y'(s), y''(s), N(y(s)) \right).$$

Sei nun $I \ni s \mapsto y(s) \in \mathcal{M}$ nicht notwendigerweise nach der Bogenlänge parametrisiert, und sei $s_0 \in I$ beliebig. Wir wollen erst mal eine Umparametrisierung φ finden, die die Situation auf den ersten Fall zurückführt:

$$\psi(s) = \int_{s_0}^s |y'(\tau)| d\tau, \quad J = \psi(I), \quad \varphi := \psi^{-1}: J \rightarrow I.$$

φ ist dann eine orientierungserhaltende Umparametrisierung und $\tilde{y} := y \circ \varphi$ ist dann nach der Bogenlänge parametrisiert. So definiert man die Krümmung von y mit der von \tilde{y} : $\kappa_g(s) := \tilde{\kappa}_g(\psi(s))$. Wir stellen dann fest:

$$(67) \quad \tilde{y}'(t) = y'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \quad \tilde{y}''(t) = y''(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)^2 + y'(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t).$$

Weiterhin haben wir mit der Differentiation der Umkehrabbildung:

$$(68) \quad \varphi'(t) = \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))} = \frac{1}{|y'(\psi^{-1}(t))|}, \quad \text{und somit} \quad \varphi'(\psi(s)) = \frac{1}{|y'(s)|}.$$

Also haben wir schließlich

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \tilde{\kappa}(\psi(s)) = \det \left(\tilde{y}'(\psi(s)), \tilde{y}''(\psi(s)), N(\tilde{y}(\psi(s))) \right) \\ &\stackrel{(67)}{=} \det \left(\frac{y'(s)}{|y'(s)|}, \frac{y''(s)}{|y'(s)|^2} + y'(s) \cdot \varphi''(\psi(s)), N(y(s)) \right) \\ &\stackrel{(68)}{=} \frac{1}{|y'(s)|^3} \det \left(y'(s), y''(s), N(y(s)) \right). \end{aligned}$$



A.11 Satz

Sei \mathcal{M} eine n -dimensionale abgeschlossene C^2 -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} ohne Rand. Außerdem sei $X: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ ein Lipschitz-Vektorfeld an \mathcal{M} mit kompaktem Träger. Dann gilt:

$$(69) \quad \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}_{\mathcal{M}} X \, d\mathcal{H}^n = - \int_{\mathcal{M}} \langle X, \mathbf{H} \rangle \, d\mathcal{H}^n.$$

Beweis: Diese Aussage für glatte Vektorfelder wurde in 2.11 gezeigt. Von dieser werden wir später Gebrauch nehmen. Wegen der Kompaktheit von $\operatorname{supp} X$, gibt es einen endlichen Atlas $\{U_\ell, \varphi_\ell, V_\ell\}_{\ell=1}^m$, $U_\ell, \varphi_\ell, V_\ell$ wie in Definition 2.1, der $\operatorname{supp} X$ überdeckt. Nach [LeeS, Theorem 2.23] gibt es eine zu $\{U_\ell, \varphi_\ell, V_\ell\}_{\ell=1}^m$ untergeordnete glatte Zerlegung der Eins $\{\psi_\ell\}_{\ell=1}^m$, wobei $\psi_\ell: \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$:

- Ⓘ $\forall \ell \in I: \quad \operatorname{supp}(\psi_\ell) \subset \mathcal{M} \cap V_\ell,$
- Ⓜ $\forall x \in \operatorname{supp} X: \quad \sum_{\ell=1}^m \psi_\ell(x) = 1,$

Wir betrachten ersteinmal nur $\psi_\ell \cdot X$ für ein festes $\ell \in \{1, \dots, m\}$. Die Menge $\text{supp } X \cap \text{supp } \psi_\ell$ ist kompakt, somit gilt wegen der Stetigkeit von φ_ℓ^{-1} , dass $\varphi_\ell^{-1}(\text{supp } X \cap \text{supp } \psi_\ell)$ kompakt ist. Das bedeutet, dass $\text{supp } ((\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell) \subset \varphi_\ell^{-1}(\text{supp } X \cap \text{supp } \psi_\ell)$ auch kompakt ist, also ist $(\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell: U_\ell \cap \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ Lipschitz.

Nach dem Satz von Rademacher und [Alt, Satz 8.5 (2)] ist $(\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell \in W^{1,\infty}(U_\ell \cap \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+k})$, d.h. $(\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell$ ist bis auf eine Nullmenge I in $U_\ell \cap \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Nach dem Satz A.1 bedeutet das, dass $\psi_\ell \cdot X$ für alle $p \in \varphi((U_\ell \cap \mathbb{R}^n) \setminus I)$ in p differenzierbar bzgl. \mathcal{M} ist, also ist $\psi_\ell \cdot X$ fast überall differenzierbar bzgl. \mathcal{M} in Koordinaten. Weiterhin stellen wir fest, dass wegen der Flächenformel

$$\mathcal{H}^n[\varphi(I)] \leq \text{Lip } \varphi_\ell|_{\text{supp}(X \cdot \psi_\ell)} \cdot \mathcal{L}^n(I) = 0$$

gilt. Also ist $\varphi(I)$ eine \mathcal{H}^n -Nullmenge auf \mathcal{M} , und $\psi_\ell \cdot X$ ist \mathcal{H}^n -fast überall auf \mathcal{M} differenzierbar bzgl. \mathcal{M} . Vielmehr ist $\psi_\ell \cdot X \in W^{1,\infty}(\mathcal{M} \cap V_\ell; \mathbb{R}^{n+k})$ in dem Sinne, dass $\|\nabla^{\mathcal{M}}(\psi_\ell \cdot X_i)\|$ für jedes $i = 1, \dots, n+k$ auf \mathcal{M} essentiell beschränkt ist. So hat man nach A.7 (e) \mathcal{H}^n -fast überall in \mathcal{M} :

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{M}}(\psi_\ell \cdot X_i)\| &\leq \sum_{st} \left| g^{st} \partial_s((\psi_\ell \cdot X_i) \circ \varphi_\ell) \partial_t \varphi_\ell \right| \\ &\leq C(\|\varphi_\ell\|_{C^1(\text{supp}(X \cdot \psi_\ell); \mathbb{R}^{n+k})}) \cdot \|(\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell\|_{W^{1,\infty}(U_\ell \cap \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+k})}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist wegen der Kompaktheit von $\text{supp}(\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell: (\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell \in W^{1,1}(U_\ell \cap \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+k})$, also existiert nach [Alt, Satz 2.23] $(G_k^\ell)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(U_\ell \cap \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+k})$ mit $\|(\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell - G_k^\ell\|_{W^{1,1}(U_\ell \cap \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+k})} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, deren Träger in folgender Menge liegt:

$$S_\ell := \text{supp} \{(\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell\} + \bar{B}_\varepsilon \cap \mathbb{R}^n \subset U_\ell \cap \mathbb{R}^n$$

für hinreichend kleines aber von k unabhängiges ε , wobei $\bar{B}_\varepsilon := \{\|x\| \leq \varepsilon\}$. Man sieht schnell, dass S_ℓ beschränkt ist. Für glattes $G_k^\ell \circ \varphi_\ell^{-1}$ folgt:

$$\int_{\mathcal{M} \cap V_\ell} \text{div}_{\mathcal{M}}(G_k^\ell \circ \varphi_\ell^{-1}) d\mathcal{H}^n = - \int_{\mathcal{M} \cap V_\ell} \langle G_k^\ell \circ \varphi_\ell^{-1}, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^n.$$

Da $\psi_\ell \cdot X$ auf \mathcal{M} \mathcal{H}^n -fast überall differenzierbar bzgl. \mathcal{M} ist, existiert die Divergenz von $(\psi_\ell \cdot X)$ \mathcal{H}^n -fast überall in \mathcal{M} und in Koordinaten \mathcal{L}^n -fast überall in $U_\ell \cap \mathbb{R}^n$. Außerdem kann man mit der Flächenformel (14) abschätzen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M} \cap V_\ell} \left| \text{div}_{\mathcal{M}}(\psi_\ell \cdot X) \right| d\mathcal{H}^n &\stackrel{\text{A.7}}{\leq} \int_{U_\ell \cap \mathbb{R}^n} J_n \varphi_\ell \cdot \left| \sum_{i,j} g^{ij} \langle \partial_i(\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell, \partial_j \varphi_\ell \rangle \right| d\mathcal{L}^n \\ &\leq C(\|\varphi_\ell\|_{C^1(S_\ell; \mathbb{R}^{n+k})}) \cdot \|(\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell\|_{W^{1,1}(U_\ell; \mathbb{R}^{n+k})} < \infty, \end{aligned}$$

wobei C eine von φ_ℓ abhängige Konstante ist (S_ℓ ist kompakt). So gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{M} \cap V_\ell} \text{div}_{\mathcal{M}}(\psi_\ell \cdot X) d\mathcal{H}^n - \int_{\mathcal{M} \cap V_\ell} \text{div}_{\mathcal{M}}(G_k \circ \varphi_\ell^{-1}) d\mathcal{H}^n \right| \\ \stackrel{\text{A.7}}{\leq} \int_{U_\ell \cap \mathbb{R}^n} J_n \varphi_\ell \cdot \left| \sum_{i,j} g^{ij} \langle \partial_i((\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell) - \partial_i G_k, \partial_j \varphi_\ell \rangle \right| d\mathcal{L}^n \\ \leq C(\|\varphi_\ell\|_{C^1(S_\ell; \mathbb{R}^{n+k})}) \cdot \|(\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell - G_k\|_{W^{1,1}(U_\ell \cap \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+k})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Analog hat man für die rechte Seite:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathcal{M} \cap V_\ell} \langle G_k \circ \varphi_\ell^{-1}, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^n - \int_{\mathcal{M} \cap V_\ell} \langle \psi_\ell \cdot X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^n \right| \\
& \leq \int_{U_\ell \cap \mathbb{R}^n} J_n \varphi_\ell \cdot |\mathbf{H}| \cdot \left| (\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell - G_k \right| d\mathcal{L}^n \\
& \leq C(\|\varphi_\ell\|_{C^2(S_\ell; \mathbb{R}^{n+k})}) \cdot \|(\psi_\ell \cdot X) \circ \varphi_\ell - G_k\|_{W^{1,1}(U_\ell \cap \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+k})} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Also hat man insgesamt

$$\int_{\mathcal{M} \cap V_\ell} \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(\psi_\ell \cdot X) d\mathcal{H}^n = - \int_{\mathcal{M} \cap V_\ell} \langle \psi_\ell \cdot X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^n.$$

Es gilt $X = \sum_{\ell=1}^m \psi_\ell \cdot X$. Wegen der Linearität der Divergenz resultiert:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}_{\mathcal{M}} X d\mathcal{H}^n &= \int_{\mathcal{M}} \sum_{\ell=1}^m \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(\psi_\ell \cdot X) d\mathcal{H}^n = \sum_{\ell=1}^m \int_{\mathcal{M} \cap V_\ell} \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(\psi_\ell \cdot X) d\mathcal{H}^n \\
&= - \sum_{\ell=1}^m \int_{\mathcal{M} \cap V_\ell} \langle \psi_\ell \cdot X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^n = - \int_{\mathcal{M}} \sum_{\ell=1}^m \langle \psi_\ell \cdot X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^n \\
&= - \int_{\mathcal{M}} \langle X, \mathbf{H} \rangle d\mathcal{H}^n.
\end{aligned}$$



Symbolverzeichnis

$\nabla^{\mathcal{M}} f$	Gradient von f auf \mathcal{M}	6
$\Delta_{\mathcal{M}} f$	Laplace-Beltrami-Operator von f auf \mathcal{M}	7
$ \mathcal{M} $	$= \mathcal{H}^{\dim \mathcal{M}}(\mathcal{M})$ für Borel-messbare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$	21
$\ B\ _{L^1(\mathcal{M})}$	$= \int_{\mathcal{M}} B d\mathcal{H}^2$, L^1 -Norm von B auf \mathcal{M}	25
$\ g\ _{C^2(\partial\Omega)}$	$= \max_s g(s) + \max_s g'(s) + \max_s g''(s) $	33
$\mathbf{A}_p, \mathbf{A} $	zweite Fundamentalform von \mathcal{M} in p und deren Betrag	7
A_{ij}	lokale Darstellung der skalaren zweiten Fundamentalform von \mathcal{M}	27
A_p	skalare zweite Fundamentalform von \mathcal{M} in p	8
$\text{card}(B)$	$= \#B$, Kardinalität von B	12
$\chi(\mathcal{M})$	Euler-Charakteristik von \mathcal{M}	11
δ_{ij}	Kronecker-Delta, also 1, falls $i = j$, und 0 sonst	37
∂_{ℓ}	$= \frac{\partial}{\partial x_{\ell}}$ partielle Ableitung nach der ℓ -ten Komponente	5
$D_{\tau} f$	Richtungsableitung von f in Richtung τ	6
df_p	Differential von f in p bzgl. \mathcal{M}	6
$\text{div}_{\mathcal{M}} X$	Divergenz von X auf \mathcal{M}	6
$(g_{ij}), (g^{ij})$	Koordinatendarstellung des Metriktensors ($\langle \partial_i \varphi, \partial_j \varphi \rangle$) und deren Inverse	26
$g_{ij,k}$	$= \partial_k g_{ij}$	40
Γ_{ki}^j	$= \frac{1}{2} \sum_{\ell} g^{j\ell} (g_{k\ell,i} + g_{i\ell,k} - g_{ki,\ell})$ Christoffel-Symbole	39
$\Gamma(u)$	Graph von $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$	26
\mathcal{H}^n	n -dimensionales Hausdorff-Maß	7
\mathbf{H}, H	mittlere Krümmung und skalare mittlere Krümmung von \mathcal{M}	8
$J_N f$	N -dimensionale Jacobische von f	12
$J_N^{\mathcal{M}} f$	N -dimensionale Jacobische von f bzgl. \mathcal{M}	14
κ_g	geodätische Krümmung	10
\mathcal{L}^n	n -dimensionales Lebesgue-Maß	12
$\bar{\varphi}, \varphi$	Glattbiegungsabbildung und Parametrisierungsabbildung	5
Q	$= \sqrt{1 + \nabla u ^2}$, Jacobische der Flächenformel für Graphen	27
$\text{supp } X$	$= \overline{\{p \in \mathcal{M} \mid X(p) \neq 0\}}$, Träger von X	7
$T_p \mathcal{M}$	Tangentialraum in $p \in \mathcal{M}$.	5
\mathcal{W}	Willmore-Funktional	18

Sachverzeichnis

- Allgemeiner Divergenzsatz, 9
- Differential, 6
 - differenzierbar bzgl. \mathcal{M} , 5
- Dirichlet-Randbedingungen, 35
- Divergenz auf \mathcal{M} , 6
- Divergenzsatz
 - allgemeiner, 9
 - tangentialem, 7
- Durchmesser
 - extrinsischer, 21
 - intrinsischer, 25
- erste Fundamentalform, 26
- Euler-Charakteristik, 11
- extrinsischer Durchmesser, 21
- Flächenformel, 12
- Fundamentalform
 - erste, 26
 - zweite, 7
- Gauß-Bonnet, 11
- Gaußsche Krümmung, 10
- geodätische Krümmung, 10
- Gradient, 6
- Graph, 26
- Hawking-Masse, 20
- Helfrich-Funktional, 19
- Immersion, 18
- innerer Punkt, 5
- intrinsischer Durchmesser, 25
- Jacobische, 12
 - auf Untermannigfaltigkeiten, 14
- Kodimension, 5
- Kofflächenformel, 13
 - für Untermannigfaltigkeiten, 14
- Krümmung
 - Gaußsche, 10
 - geodätische, 10
 - mittlere, 8
- kritischer Punkt, 16
- Wert, 16
- Laplace-Beltrami-Operator, 7
- Minimalflächen, 9
- mittlere Krümmung
 - skalare, 8
 - Vektor, 8
- Monotonie-Formel, 23
- Navier-Randbedingungen, 35
- orientierbar, 10
- Polyakov extrinsic action, 20
- positiv orientiert, 11
- Randbedingungen
 - Dirichlet-, 35
 - Navier-, 35
- Randpunkt, 5
- regulärer Punkt, 16
- Wert, 16
- Richtungsableitung, 6
- Satz von Sard, 16
- skalare mittlere Krümmung, 8
- Tangententialraum, 5
- Triangulierung, 10
- Untermannigfaltigkeit
 - mit Rand, 5
 - ohne Rand, 5
- Vektor der mittleren Krümmung, 8
- Weingarten-Abbildung, 27
- Willmore
 - Energie, 18
 - Flächen, 18
 - Fluss, 20
 - Funktional, 18
 - für einen Graph, 28
 - Gleichung, 18
- zweite Fundamentalform, 7
 - Betrag, 7
 - skalare, 8

Literatur

- [Alt] Alt, H., *Lineare Funktionalanalysis*, 6. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2012).
- [BK] Bauer, M., Kuwert, E., Existence of minimizing Willmore surfaces of prescribed genus, *International Mathematics Research Notices*, Volume 2003, Issue 10, (2003), 553–576.
- [Baer] Bär, C., *Elementare Differentialgeometrie*, 2. Auflage, De Gruyter, (2010).
- [BJ] Bergner, M., Jakob, R., Sufficient conditions for Willmore immersions in \mathbb{R}^3 to be minimal surfaces, *Annals of Global Analysis and Geometry*, Volume 45, Issue 2 (2014), 129-146.
- [Bla] Blaschke, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1929).
- [Carm] Carmo, M.P. do, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Pearson-hall, New Jersey, (1976).
- [Car] Carroll, R., *Quantum Theory, Deformation and Integrability*, Elsevier Science B.V., (2000).
- [CW] Mc Coy, J., Wheeler, G., A classification theorem for Helfrichsurfaces, *Mathematische Annalen*, Volume 357, Issue 4, (2013), 1485-1508.
- [CDR] Clarenz, U., Diewald, U., Dziuk, G., Rumpf, M., Rusu, R., A finite element method for surface restoration with smooth boundary conditions, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 21, Issue 5, (2004), 427–445.
- [Dah] Dahan-Dalmédico, A., Mécanique et théorie des surfaces: les travaux de Sophie Germain, *Historia Mathematica*, Volume 14, Issue 4, (1987), 347–365.
- [Dall] Dall’Acqua, A., Uniqueness for the homogeneous Dirichlet Willmore boundary value problem, *Annals of Global Analysis and Geometry*, Volume 42, Issue 3, (2012), 411–420.
- [DDG] Dall’Acqua, A., Deckelnick, K., Grunau, H.-Ch. Classical solutions to the Dirichlet problem for Willmore surfaces of revolution, *Advances in Calculus of Variations*, Volume 1, Issue 4 (2008), 379–397.
- [DG1] Deckelnick, K., Grunau, H.-Ch., A Navier boundary value problem for Willmore surfaces of revolution, *Analysis (Munich)*, Volume 29, Issue 3, (2009), 229–258.
- [DG2] Deckelnick, K., Grunau, H.-Ch., unveröffentlichte Notizen.
- [DKS] Deckelnick, K., Katz, J., Schieweck, F., *A C^1 -finite element method for the Willmore flow of two-dimensional graphs*, Preprint, Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, (2013).
- [DHS] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Sauvigny, F., *Minimal surfaces*, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, (2010).
- [Dieu] Dieudonné., J., *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York (1969).

- [Gr] Grauert, H., Grunau, H.-Ch., *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Oldenbourg-Verlag, (1999).
- [Krz] Krantz S., Parks H., *Geometric Integration Theory*, Birkhäuser-Verlag, (2008).
- [KS] Kuwert, E., Schätzle, R., Minimizers of the Willmore functional under fixed conformal class, *Journal of Differential Geometry*, Volume 93, Issue 3, (2013), 471-530.
- [LeeT] Lee, J. M., *Introduction to Topological Manifolds*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, (2000).
- [LeeS] Lee, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, (2013).
- [LeeR] Lee, J. M., *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, (1997).
- [Pal] Palmer, B., Uniqueness theorems for Willmore surfaces with fixed and free boundaries, *Indiana University Mathematics Journal*, Volume 49, Issue 4, (2000), 1581–1601.
- [Rad] Rado, T., Über den Begriff der Riemannschen Fläche, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, Szeged, Band 2, (1925), 101-121.
- [Sard] Sard, A., The measure of the critical values of differentiable maps, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Volume 48, Number 12, (1942), 883-890.
- [Scha] Schätzle, R., The Willmore boundary problem, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Volume 37, Issue 3-4, (2010), 275–302.
- [Scho] Schoen, R., Mean Curvature in Riemannian Geometry and General Relativity, *Global Theory of Minimal Surfaces, Clay Mathematics Proceedings*, American Mathematical Society, Volume 2, (2004), 113-136.
- [Sie] Sieradski, A., *An Introduction to Topology and Homotopy*. PWS-Kent, Boston, (1992).
- [Sim1] Simon, L., *Lectures on Geometric Measure Theory*, Centre for Mathematical Analysis, Australian National University (1983).
- [Sim2] Simon, L., Existence of surfaces minimizing the Willmore functional, *Communications in Analysis and Geometry*, Volumen 1, Number 2, (1993), 281-326.
- [Str] Sternberg, S., *Lectures on Differential Geometry*, Englewood Cliffs, New Jersey, (1964).
- [Th] Thomsen, G., Über Konforme Geometrie, I: Grundlagen der Konformen Flächentheorie, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, Band 3, (1923), 31-56.
- [Top1] Topping, P., Mean curvature flow and geometric inequalities, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 503, (1998), 47-61.
- [Top2] Topping, P., Relating diameter and mean curvature for submanifolds of Euclidean space *Commentarii Mathematici Helvetici*, Volume 83, (2008), 539-546.
- [Tu] Tu L. W., *An Introduction to Manifolds*, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, (2011).

- [Whit] Whitney, H., A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Mathematical Journal*, Volume 1, Number 4, (1935), 514-517.
- [Will] Willmore T. J., *Riemannian Geometry*, Oxford University Press, (1997).