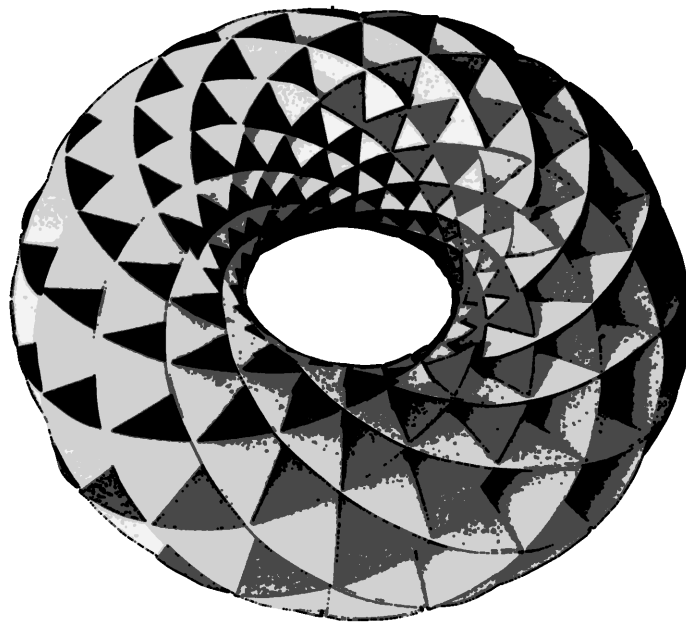


Verallgemeinerung eines Existenzsatzes für axialsymmetrische Minimierer des Willmore-Funktional auf das Helfrich-Funktional

Forschungsbeleg



Marco Doemeland
geboren am 24.02.1990
in Magdeburg

Betreuer & Gutachter
Betreuer

Prof. Dr. Hans-Christoph Grunau
Prof. Dr. Jan Wiersig

Eingereicht am

9. Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Grundlagen	4
1.1	Direkte Methode der Variationsrechnung und Funktionenräume	4
1.2	Differentialgeometrische Begriffe	9
2	Das Willmore-Funktional für Rotationsflächen	27
2.1	Das Willmore-Funktional	27
2.2	Das Willmore-Funktional für Rotationsflächen	35
2.3	Das hyperbolische Willmore-Funktional	40
3	Existenz axialsymmetrischer Willmore-Flächen	49
4	Das Helfrich-Funktional für Rotationsflächen und Existenz rotationssymmetrischer Helfrich-Flächen	64
4.1	Das Helfrich-Funktional	64
4.2	Existenz rotationssymmetrischer Helfrich-Flächen	65
	Literaturverzeichnis	75
	Symbolverzeichnis	78
	Sachverzeichnis	82

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Marco Doemeland, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie die Zitate deutlich kenntlich gemacht zu haben.

Magdeburg, den 9. Februar 2015

(Name des Kandidaten)

0 Einleitung

Viele mathematisch interessante und physikalisch relevante Funktionale treten in Form von Integralen über geometrische Strukturen auf. Das wohl bekannteste Beispiel ist das *Flächenfunktional*, welches den Flächeninhalt einer Fläche misst. Das Flächenfunktional versteht man als Integral der konstanten Funktion 1 über die gesamte Fläche:

$$\mathcal{A}(f) := \int_{\mathcal{M}^2} 1 \, d\mu_g.$$

Interessant dabei ist die Suche nach Flächen, welche kritische Punkte des Flächenfunktionals, bezüglich bestimmter Variationen dieser Flächen, sind. Diese werden (irritierenderweise) *Minimalflächen* genannt. Minimalflächen wurden tiefgehend studiert und viele Resultate sind bekannt.

Ein anderes, in den letzten Jahrzehnten populär gewordenes, Funktional ist das *Willmore-Funktional*. Dieses ist ebenso als Integral definiert, indem wir das Quadrat der *mittleren Krümmung* über die Fläche integrieren:

$$\mathcal{W}(f) := \int_{\mathcal{M}^2} H^2 \, d\mu_g.$$

Kritische Punkte dieses Funktionals nennt man *Willmore-Flächen*. Diese stellen eine Verallgemeinerung von Minimalflächen dar, in dem Sinne, dass jede Minimalfläche auch eine Willmore-Fläche ist. Das Willmore-Funktional ist schon lange bekannt. Es wurde bereits im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts von Blaschke (siehe [Bla]) und Thomson (siehe [Tho]) studiert. Seitdem ist das Funktional etwas in Vergessenheit geraten. Erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde es von T. J. Willmore wieder popularisiert (siehe [Wil]), sodass es seither seinen Namen trägt.

Das Flächenfunktional sowie das Willmore-Funktional beschreiben physikalisch relevante Modelle für Membranen. Bei der Modellierung dieser ist die Energie gegeben als Integral der Energiedichte über die Fläche, welche eine Funktion der Hauptkrümmungen darstellt. In nullter Ordnung, d. h. wenn Krümmungen keine Energiedichten erzeugen, erhält man das Flächenfunktional. Mit diesem lassen sich u. A. Seifenblasen modellieren. Mit dem Willmore-Funktional hingegen modelliert man Membranen, bei denen Krümmungen, in zweiter Ordnung, sehr hohe Energiedichten erzeugen, sodass man den Flächenterm ignorieren kann, wie z. B. bei dünnen Platten. Realistischere Modelle hingegen müssen beide Effekte berücksichtigen. Ein Beispiel eines solchen Funktionals ist das *Helfrich-Funktional* (siehe auch [H]), dessen Energiedichte sich aus der quadratischen mittleren Krümmung plus dem Flächeninhalt, mit

Vorfaktoren gewichtet, zusammensetzt:

$$\mathcal{H}_\varepsilon(f) := \int_{\mathcal{M}^2} (H^2 + \varepsilon) d\mu_g = \mathcal{W}(f) + \varepsilon \mathcal{A}(f).$$

Kritische Punkte dieses Funktionals nennt man *Helfrich-Flächen*. Das Helfrich-Funktional stellt eine Erweiterung, sowohl des Flächen-, als auch des Willmore-Funktional dar.

In dieser Arbeit fragen wir nach der Existenz von Willmore- und Helfrich-Flächen in der Klasse axialsymmetrischer Rotationsflächen. Randwertprobleme für das Willmore-Funktional in dieser Klasse sind bereits weitgehend untersucht wurden. In [DDG] und [DFGS] wurden Existenzsätze für das Dirchlet-Randwertproblem bewiesen und in [DG] für ein Navier-Randwertproblem. Aufbauend auf den beiden erstgenannten Arbeiten wurde in [Sch] ein allgemeineres Funktional, das *Nitsche-Funktional*, studiert und für dieses ein Existenzsatz formuliert. Wir werden uns in dieser Arbeit mit der Fragestellung aus [DDG] auseinandersetzen und eine andere Methode finden, die dort gezeigte Existenz für ein Dirchlet-Randwertproblem von Willmore-Flächen zu beweisen. Es stellt sich heraus, dass sich diese Methode auch auf das Helfrich-Funktional für einen hinreichend kleinen Anteil des Flächenfunktionals, d. h. für kleines $\varepsilon > 0$, anwenden lässt. Diese Beobachtung wurde zuerst in den Arbeitsnotizen [WG] festgehalten. Aufbauend auf diesen Arbeitsnotizen und [DDG] werden in dieser Arbeit die grundlegenden Begriffe wiederholt, Rechnungen und Ergebnisse für das Willmore-Funktional von Rotationsflächen zusammengefasst, sowie die Existenztheorie für das Willmore- und Helfrich-Funktional mit dieser neuen Methode ausformuliert.

Die Arbeit unterteilt sich in vier Kapitel. Im **ersten Kapitel** legen wir die nötigen theoretischen Grundlagen für den weiteren Verlauf. Wir rekapitulieren die *direkte Methode der Variationsrechnung*, das bedeutet insbesondere die lokale schwache Folgenkompaktheit reflexiver Banachräume. Weiter führen wir die nötigen Funktionenräume ein, die uns später begegnen. Neben der Funktionalanalysis werden einige differentialgeometrische Begriffe wiederholt und deren Notationen gefestigt. Besonderen Wert wollen wir auf den Zugang der *äußeren Geometrie* mittels des *Pullback-Bündels* legen. Dieser gibt uns einen allgemeinen formalen Rahmen, Begriffe wie die mittlere Krümmung einzuführen, und beweist sich bei der Variation geometrischer Funktionale als wichtiges Hilfsmittel. Im **zweiten Kapitel** definieren wir dann das *Willmore-Funktional* und geben dessen erste Variation an. Im Verlauf konzentrieren wir uns auf die Klasse von *Rotationsflächen*, berechnen deren Willmore-Funktional, und beobachten, dass wir das Problem umformulieren können, indem wir uns Graphen in der *hyperbolischen Halbebene* anschauen. Das Willmore-Funktional dieser Graphen wird auch als *hyperbolisches Willmore-Funktional* bezeichnet. Aus geometrischen Gründen erweist sich diese Sichtweise als sehr hilfreich und im **dritten Kapitel** nutzen wir dies, um ein Minimum für das Willmore-Funktional in einer speziellen Unterklasse von Rotationsflächen zu finden. Es zeigt sich, dass diese Methode ohne viel Aufwand einen Existenzsatz für ein Minimum des Helfrich-Funktional in der gleichen Unterklasse von Rotationsflächen wie zuvor zulässt, welches wir dann im **vierten Kapitel**

behandeln.

Zur besser Übersichtlichkeit und Lesbarkeit der Arbeit gibt es am Ende der Arbeit noch ein ausführliches Symbolverzeichnis mit kurzen Erklärungen zu den Symbolen und Notationen, sowie ein Sachverzeichnis.

Ich möchte mich noch ganz herzlich bei Herrn Prof. Wiersig bedanken, für die Möglichkeit diese Arbeit schreiben zu können, sowie bei Herrn Prof. Grunau für die langjährige Betreuung und Unterstützung, insbesondere auch für die hilfreichen Anmerkungen und Diskussionen zu dieser Arbeit. Weiter bedanke ich mich auch bei Boris Gulyak für ein hilfreiches Korrekturlesen.

1 Grundlagen

Den Inhalt dieser Arbeit kann man der *geometrischen Analysis* zuordnen. Für die Formulierung des *Willmore-Problems* (siehe Kapitel §2.1) benötigen wir einige differentialgeometrische Grundlagen, welche wir hier zusammenfassen wollen. Beginnen werden wir allerdings zunächst mit den funktionalanalytischen Begriffen und Hilfsmitteln, mit denen wir die Existenztheorie in Kapitel §3 führen werden.

1.1 Direkte Methode der Variationsrechnung und Funktionenräume

In diesem Kapitel wollen wir nützliche funktionalanalytische Konzepte zusammenfassen. Für die Existenzsätze in Kapitel §3 und §4.2 benötigen wir die direkte Methode der Variationsrechnung, insbesondere die *lokale schwache Folgenkompaktheit* reflexiver Banachräume. Anschließend fassen wir einige Ergebnisse für Funktionenräume zusammen. Für weitere Ausführungen und Definitionen zu diesem Thema sei auf die Bücher [Alt], [Dac], [Do] und [JoLi] hingewiesen.

Als **Banachraum** bezeichnen wir das Paar $(X, \|\cdot\|_X)$, wobei X ein Vektorraum ist und $\|\cdot\|_X$ eine Norm auf X , welche eine, bezüglich der induzierten Normtopologie, vollständige Topologie auf X erzeugt, sodass jede Cauchyfolge konvergent ist. Ein Banachraum heißt **separabel**, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subset X$ gibt, d. h. zu jedem $x \in X$ gibt es eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $x_k \rightarrow x$, $k \rightarrow \infty$. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt **(folgen-)kompakt**, falls jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ eine in K konvergente Teilfolge besitzt, d. h. es gibt eine Teilfolge $(x_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ und ein $x \in K$, sodass $x_{k_\ell} \rightarrow x$, $\ell \rightarrow \infty$.

Ein **(stetiges) lineares Funktional** auf einem Banachraum X ist eine lineare Abbildung $L: X \rightarrow \mathbb{R}$, welche beschränkt ist, d. h. es gibt eine Konstante $C > 0$, sodass $|L(x)| \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$. Nach [Alt, Lemma 3.1] ist L dann in der Tat stetig. Als **Dualraum** bezeichnet man die Menge der (stetigen) linearen Funktionale

$$X^* := \{L: X \rightarrow \mathbb{R} : L \text{ ist stetiges lineares Funktional}\}.$$

Durch

$$\|L\|_{X^*} := \sup \{|L(x)| : x \in X \text{ mit } \|x\|_X \leq 1\}$$

wird eine Norm auf X^* definiert, welche $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ zu einem Banachraum macht (siehe [Alt, Satz 3.3 (2)]). Der Dualraum vom Dualraum von X wird auch **Bidualraum** genannt und mit

$X^{**} := (X^*)^*$ bezeichnet. Unter der **kanonischen Injektion** versteht man die Abbildung

$$\iota_X: X \rightarrow X^{**}, \quad \iota_X(x)(L) := L(x).$$

ι_X definiert eine injektive und isometrische lineare Abbildung (siehe [JoLi, Lemma 2.2.3]), d. h. $\|\iota_X(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X$. Ein Banachraum heißt **reflexiv**, falls ι_X surjektiv ist. Das heißt also, ι_X ist eine isometrische Bijektion von X nach X^{**} .

Mithilfe linearer Funktionale lässt sich eine neue Topologie auf X definieren, die *schwache Topologie*. Dies ist die größte Topologie (siehe [Alt, Abschnitt 0.14]; somit auch gröber als die Normtopologie), bezüglich der alle beschränkten linearen Funktionale aus X^* stetig sind (siehe auch [Alt, Abschnitt 6.7]). Konvergenz bezüglich dieser Topologie wird als **schwache Konvergenz** bezeichnet und ist charakterisiert durch

$$x_k \rightharpoonup x \in X, k \rightarrow \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall L \in X^* : L(x_k) \rightarrow L(x), k \rightarrow \infty..$$

Analog zu (stark) konvergenten Folgen, sind schwach konvergente Folgen nach [Alt, Bem. 6.3 (5)] stets beschränkt. Umgekehrt weiß man, dass beschränkte abgeschlossene Mengen aus X nur dann (folgen-)kompakt sind, falls X endlichdimensional ist. In der schwachen Topologie reflexiver Banachräume hingegen erreicht man, dass zumindest die abgeschlossene Einheitskugel in X schwach folgenkompakt sind, d. h. für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ gibt es eine Teilfolge $(x_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ und ein $x \in K$, sodass $x_{k_\ell} \rightharpoonup x, \ell \rightarrow \infty$, wie der folgende Satz zeigt. Man muss allerdings in Kauf nehmen, dass die verschiedenen Kompaktheitsbegriffe bezüglich dieser Topologie auseinanderfallen.

1.1 Satz (lokale schwache Folgenkompaktheit in reflexiven Banachräumen)

Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\} \subset X$ schwach folgenkompakt.

Beweis: Siehe [Alt, Satz 6.10]. Sei eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \overline{B_1(0)}$ gegeben. Im Beweis beschränkt man sich auf den Abschluss der linearen Hülle dieser Folge (wird mit Y bezeichnet), welcher separabel ist. Wegen der Reflexivität von X ist auch Y reflexiv (siehe [Alt, Abschnitt 6.8 (2)]), sodass Y^{**} ebenso separabel ist. Nach [Alt, Lemma 6.9] ist damit auch Y^* separabel. Auf Y^* wendet man die schwach-* Folgenkompaktheit (siehe [Alt, Satz 6.5]) an, um ein Grenzelement (einer Teilfolge) in Y^{**} zu konstruieren, welches, auf X zurückgezogen, ein Grenzelement für eine Teilfolge von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ergibt. \square

Insbesondere enthält damit jede beschränkte Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ eines reflexiven Banachraumes X eine schwach konvergente Teilfolge $(x_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$, sodass ein $x \in X$ existiert mit $x_{k_\ell} \rightharpoonup x, \ell \rightarrow \infty$.

Von der abstrakten Theorie kommen wir nun zu einigen Beispielen von Banachräumen. Zunächst listen wir die Räume stetiger und stetig differenzierbarer Funktionen auf. Auf \mathbb{R}^n nutzen wir für Ableitungen die übliche Notation mit Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$:

$$D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}, \quad |\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Für offenes und beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir die Räume stetig differenzierbarer Funktionen

$$\begin{aligned} C^k(\Omega) &:= \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : D^\alpha u \text{ existiert und ist stetig für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k\}, \\ C^k(\overline{\Omega}) &:= \{u \in C^k(\Omega) : D^\alpha u \text{ lässt sich stetig auf } \overline{\Omega} \text{ fortsetzen für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k\}, \\ C^\infty(\Omega) &:= \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\Omega), \\ C^\infty(\overline{\Omega}) &:= \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Zusammen mit der Norm

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C^0(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|,$$

bildet $C^k(\overline{\Omega})$ einen Banachraum (siehe [Alt, Satz 1.1 + Satz 1.6]). Der Träger einer Funktion $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}},$$

und wir definieren

$$\begin{aligned} C_0^0(\Omega) &:= \{u \in C^0(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ ist kompakt}\}, \\ C_0^k(\Omega) &:= C^k(\Omega) \cap C_0^0(\Omega), \quad k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Eine Funktion $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **γ -Hölder-stetig** für ein $0 \leq \gamma \leq 1$, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$|u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^\gamma, \quad \text{für alle } x, y \in \Omega.$$

Ist $\gamma = 1$, so heißt u auch **Lipschitz-stetig**. Die Abbildung

$$[\cdot]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \mapsto [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} = \inf \left\{ C > 0 : |u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^\gamma \right\},$$

wird auch als **Hölder-Halbnorm** bezeichnet. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sind **Hölder-Räume** dann die Funktionenräume

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} < \infty, \text{ für alle } |\alpha| = k\}.$$

Zusammen mit der Norm

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} := \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})},$$

ist $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ ein Banachraum (siehe [Alt, Satz 1.7]). In dieser Notation haben wir dann $C^{k,0}(\bar{\Omega}) = C^k(\bar{\Omega})$.

Andere Beispiele von Funktionenräume sind die *Lebesgue-* und *Sobolev-Räume*. In der Variationsrechnung sind viele Funktionale in Form von Integralen über Funktionen und deren Ableitungen formuliert. Integralnormen bieten daher einen natürlichen Rahmen solche Variationsprobleme zu behandeln, da wir dann über die topologische Struktur des zugehörigen Banachraumes oftmals Variationsprobleme lösen können (u. A. mit Satz 1.1). Für offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und messbares $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die **L^p -Norm**

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} & , \text{ falls } 1 \leq p < \infty, \\ \inf \{ \lambda : |u(x)| \leq \lambda \text{ f. ü. in } \Omega \} & , \text{ falls } p = \infty. \end{cases}$$

Für $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir die **Lebesgue-Räume L^p** als Äquivalenzklasse von Funktionen

$$L^p(\Omega) := \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ messbar, } \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\} / \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ messbar, } u = 0 \text{ f. ü.}\},$$

sodass $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ eine Norm auf $L^p(\Omega)$ definiert (die Norm einer Funktionenklasse wird mit dem Wert der Norm einer Funktion daraus bestimmt), welche $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ zu einem Banachraum macht (siehe [Alt, Satz 1.16 (1)]). Mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x) v(x) dx,$$

wird $L^2(\Omega)$ sogar zu einem Hilbertraum (siehe [Alt, Satz 1.16 (3)]).

Sobolev-Räume sind die abgeschlossenen Unterräume von $L^p(\Omega)$ in denen man *schwach ableiten* kann. Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ nennt man eine Funktion $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ die **α -te schwache Ableitung** von $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, falls

$$\int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx, \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wir bezeichnen dann auch wieder $v = D^\alpha u$. Als **Sobolev-Raum $W^{m,p}$** definieren wir dann ($m \in \mathbb{N}_0, 1 \leq p \leq \infty$)

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \text{für alle } |\alpha| \leq m \text{ existiert } D^\alpha u \text{ und es ist } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

Es definiert

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

die **$W^{m,p}$ -Norm** auf $W^{m,p}(\Omega)$. Bezüglich dieser Norm ist $W^{m,p}(\Omega)$ ein Banachraum (siehe [Alt, Abschnitt 1.27]). Wir erhalten dann für $m = 0$ wieder $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, und speziell für $p = 2$ wird $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

ein Hilbertraum. Weiter lässt sich zeigen (siehe [Alt, Abschnitt 6.11 (3)]), dass $W^{m,p}(\Omega)$ reflexiv ist für $1 < p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Der folgende Satz besagt, dass $W^{m,p}(\Omega)$ der Abschluss von $C^\infty(\overline{\Omega})$ bezüglich der $W^{m,p}$ -Norm ist.

1.2 Satz ($C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $W^{m,p}(\Omega)$)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Für $1 \leq p < \infty$ sind dann die Einschränkungen der Funktionen in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ auf Ω dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ (bezüglich der $W^{m,p}$ -Norm), also

$$\{u|_\Omega : u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\} \text{ ist dicht in } W^{m,p}(\Omega).$$

Beweis: Für die Definition von „ $\partial\Omega \in C^{0,1}$ “ siehe [Do, Definition 6.1] und für die Beweis des Satzes siehe [Do, Satz 6.7]. □

Zum Schluss des Kapitels zeigen wir noch, dass man Sobolev-Räume gewissermaßen als „gute“ Teilmengen anderer Sobolev-Räume und Hölder-Räume auffassen kann. Dabei heißt ein Banachraum X eine **stetige Einbettung** eines andere Banachraumes Y , falls $X \subset Y$ und es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X, \quad \forall u \in X.$$

Man schreibt dann $X \hookrightarrow Y$. Anders formuliert bedeutet dies, dass der Einheitsoperator $\text{id}_Y|_X : X \rightarrow Y$ stetig ist. Ist dieser zudem kompakt, d. h. das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel aus X ist kompakt in Y , so nennt man die Einbettung $X \hookrightarrow Y$ auch **kompakt** und schreibt $X \xhookrightarrow{c} Y$.

1.3 Satz (Sobolev-Einbettungen)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und habe Lipschitz-Rand (siehe [Alt, A 6.2]), $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$, sowie $1 \leq p_1, p_2 < \infty$. Ist

$$m_1 - \frac{n}{p_1} > m_2 - \frac{n}{p_2} \quad \text{und} \quad m_1 > m_2,$$

so ist die Einbettung

$$W^{m_1, p_1}(\Omega) \xhookrightarrow{c} W^{m_2, p_2}(\Omega)$$

kompakt, also insbesondere auch stetig. Ist

$$m_1 - \frac{n}{p_1} = m_2 - \frac{n}{p_2} \quad \text{oder} \quad m_1 = m_2,$$

so ist die Einbettung

$$W^{m_1, p_1}(\Omega) \hookrightarrow W^{m_2, p_2}(\Omega)$$

stetig.

Beweis: Für einen Beweis, siehe [Alt, Satz 8.9]. □

1.4 Satz (Sobolev-Einbettungen in Hölder-Räume)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und habe Lipschitz-Rand (siehe [Alt, A 6.2]), $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Ist $m - \frac{n}{p} > k + \gamma$ mit $0 \leq \gamma \leq 1$, so ist die Einbettung

$$W^{m, p}(\Omega) \xrightarrow{c} C^{k, \gamma}(\bar{\Omega})$$

kompakt, also insbesondere auch stetig. Ist $m - \frac{n}{p} = k + \gamma$ für $0 < \gamma < 1$, so ist die Einbettung

$$W^{m, p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k, \gamma}(\bar{\Omega})$$

stetig.

Beweis: Für einen Beweis, siehe [Alt, Satz 8.13]. Das entscheidende Werkzeug zum Beweisen der Sobolev-Ungleichungen ist die Morrey'sche Ungleichung ([Alt, Satz 8.11]). □

1.2 Differentialgeometrische Begriffe

In diesem Kapitel sollen grundlegende differentialgeometrische Begriffe zusammengefasst werden, welche für die späteren Kapitel von Bedeutung sein werden. Es besteht nicht der Anspruch eine vollständige Einführung in die Differentialgeometrie zu geben. Für die Grundlagen sei auf die Bücher [Jo], [Lee1], [Lee2] und [PaTe] hingewiesen. Zur kleinen Einleitung in das Kapitel fassen wir noch einige Notationen zusammen.

1.5 Notationen

Im Folgenden sind stets \mathcal{M}^m und \mathcal{N}^n m -, bzw. n -dimensionale Mannigfaltigkeiten. Meist wird \mathcal{N}^n die Rolle der *ambienten* Mannigfaltigkeit spielen, in welche \mathcal{M}^m immersiert ist (siehe später). Karten auf \mathcal{M}^m werden meist mit $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ oder kurz (U, x) bezeichnet, auf \mathcal{N}^n mit $y: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, bzw. (V, y) . Die Komponenten der Kartenabbildungen werden auch *Koordinatenfunktionen* genannt und mit $x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$ bezeichnet (auf \mathcal{N}^n analog $y^j: V \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$). Für eine Funktion $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ bezeichnen wir die Komponenten bezüglich der Karte (V, y) mit $f^j := y^j \circ f$. Für Punkte auf \mathcal{M}^m schreiben wir meist $p \in \mathcal{M}^m$, auf \mathcal{N}^n verwenden wir meist $q \in \mathcal{N}^n$. Der Tangentialraum um $p \in \mathcal{M}^m$ wird mit $T_p \mathcal{M}^m$

geschrieben (analog $T_q\mathcal{N}^n$ um $q \in \mathcal{N}^n$). Für Tangentialvektoren werden meist griechische Buchstaben benutzt, z. B. $\xi_p \in T_p\mathcal{M}^m$. Wir verstehen Tangentialvektoren stets als Derivationen (siehe [Lee1, Chapter 3]) auf $C^\infty(\mathcal{M}^m)$ (bzw. $C^\infty(\mathcal{N}^n)$), der Menge aller glatten Funktionen auf \mathcal{M}^m (bzw. \mathcal{N}^n), um $p \in \mathcal{M}^m$ (bzw. $q \in \mathcal{N}^n$). ■

Wir fassen nun etwas Theorie zu Vektorbündeln zusammen, bringen Definitionen und Beispiele welche uns später ab und zu begegnen werden.

1.6 Definition (Vektorbündel)

Sei \mathcal{M}^m eine Mannigfaltigkeit. Ein (**glattes, reelles**) **Vektorbündel vom Rang k über \mathcal{M}^m** ist eine Mannigfaltigkeit \mathcal{E} zusammen mit einer surjektiven Abbildung $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$, sodass

- (i) Für alle $p \in \mathcal{M}^m$ ist $\mathcal{E}_p := \pi^{-1}(p)$ ein k -dimensionaler (reeller) Vektorraum.
- (ii) Für alle $p \in \mathcal{M}^m$ gibt es eine Umgebung $U \subset \mathcal{M}^m$ und einen Diffeomorphismus

$$\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k, \quad \Phi(\xi) = (\pi(\xi), \tau(\xi)),$$

wobei $\tau: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ eingeschränkt auf \mathcal{E}_p für alle $p \in U$ ein Vektorraumisomorphismus ist.

Üblicherweise bezeichnet man das Vektorbündel auch mit „ $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ “ (oder einfach nur \mathcal{E}). \mathcal{E} bezeichnet man dabei auch als **Totalraum**, \mathcal{M}^m den **Basisraum**, π die **Projektion**, $\mathcal{E}_p := \pi^{-1}(p)$ heißen die **Fasern** und das Paar (U, Φ) nennt man **Bündelkarte** oder **lokale Trivialisierung**.

Genauer zu der Definition lese man in [Lee1, Chapter 10] nach. Man kann zeigen (siehe [Lee1, Proposition 3.18 und 10.4]), dass das **Tangentialbündel $T\mathcal{M}^m$** , als disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume,¹

$$T\mathcal{M}^m := \coprod_{p \in \mathcal{M}^m} T_p\mathcal{M}^m$$

mit der Struktur einer $2m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit versehen werden kann und letztendlich auch ein Vektorbündel ist. Es gibt unterschiedliche Methoden Vektorbündel durch „Zusammenkleben“ von Fasern zu konstruieren (siehe [Bal, Abschnitt 1.3], sowie [Lee1, Lemma 10.6]) und gleichermaßen aus bereits bestehenden Vektorbündeln neue zu konstruieren. Dazu zählen unter anderem (siehe [Wal, Kapitel 2.2.2]) direkte Summen von Vektorbündeln, Tensorprodukte dieser, das duale Vektorbündel, sowie das Homomorphismenbündel. Seien $\pi_1: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{M}^m$ und $\pi_2: \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{M}^m$ Vektorbündel, dann ist die **direkte Summe (Whitney-Summe)** $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ definiert durch

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 := \coprod_{p \in \mathcal{M}^m} \mathcal{E}_{1p} \oplus \mathcal{E}_{2p}, \quad \text{sodass } (\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2)_p = \mathcal{E}_{1p} \oplus \mathcal{E}_{2p},$$

¹ \coprod bezeichnet die disjunkte Vereinigung beliebiger Mengen.

und das **Tensorprodukt** $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ definiert durch

$$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 := \coprod_{p \in \mathcal{M}^m} \mathcal{E}_{1p} \otimes \mathcal{E}_{2p}, \quad \text{sodass } (\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)_p = \mathcal{E}_{1p} \otimes \mathcal{E}_{2p}.$$

Das **duale Vektorbündel** \mathcal{E}^* eines Vektorbündels $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ ist gegeben durch

$$\mathcal{E}^* := \coprod_{p \in \mathcal{M}^m} (\mathcal{E}_p)^*, \quad \text{sodass } \mathcal{E}_p^* := (\mathcal{E}^*)_p = (\mathcal{E}_p)^*.$$

Weiter kann man für das Vektorbündel $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ das assoziierte **Tensorbündel** \mathcal{E}_s^r vom **Typ** $\binom{r}{s}$ bilden durch

$$\mathcal{E}_s^r := \underbrace{\mathcal{E} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}}_{r\text{-fach}} \otimes \underbrace{\mathcal{E}^* \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^*}_{s\text{-fach}}.$$

Als letztes definiert sich das **Homomorphismenbündel** $\text{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ durch

$$\text{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) := \coprod_{p \in \mathcal{M}^m} \text{Hom}(\mathcal{E}_{1p}, \mathcal{E}_{2p}) \cong \mathcal{E}_1^* \otimes \mathcal{E}_2, \quad \text{sodass } (\text{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2))_p = \text{Hom}(\mathcal{E}_{1p}, \mathcal{E}_{2p}).$$

Insbesondere sind damit auch das Kotangententialbündel (siehe auch [Lee1, Chapter 11])

$$T^* \mathcal{M}^m := (T \mathcal{M}^m)^*,$$

sowie das Tensorbündel vom Typ $\binom{r}{s}$ über $T \mathcal{M}^m$ (siehe auch [Lee1, Chapter 12])

$$T_s^r \mathcal{M}^m := (T \mathcal{M}^m)_s^r,$$

andere Beispiele von Vektorbündeln über \mathcal{M}^m .

Als (**globalen**) **Schnitt** eines Vektorbündels $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ bezeichnet man eine glatte Abbildung $X: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{E}$, sodass $\pi \circ X = \text{id}_{\mathcal{M}^m}$, also $X_p := X(p) \in \mathcal{E}_p$. Ist X nur auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathcal{M}^m$ definiert, bezeichnet man den Schnitt auch als **lokal**. Die Menge aller Schnitte wird mit $C^\infty(\mathcal{E})$ bezeichnet, die Menge aller lokalen Schnitte mit $C^\infty(\mathcal{E}_U)^2$ oder $C^\infty(U, \mathcal{E})$. Ein (**globaler**) **Frame** ist eine Menge $\{E_i\}_i \subset C^\infty(\mathcal{E})$, sodass diese, eingeschränkt auf \mathcal{E}_p , für alle $p \in \mathcal{M}^m$ eine Basis von \mathcal{E}_p bildet. Der Frame heißt **lokal**, falls alle E_i auf einer offenen Menge $U \subset \mathcal{M}^m$ definiert sind. Nach [Lee1, Example 10.18 und Proposition 10.19], sowie [Bal, Proposition 1.2.2], erzeugt jede Bündelkarte ein lokales Frame und umgekehrt erzeugt jedes lokale Frame eine lokale Trivialisierung, sodass man nicht zwischen beiden Begriffen unterscheiden braucht.³

²Für $U \subset \mathcal{M}^m$ als offene Untermannigfaltigkeit lassen sich lokale Schnitte von \mathcal{E} auch als globale Schnitte $X: U \rightarrow \mathcal{E}_U := \pi^{-1}(U)$ des auf U eingeschränkten Bündels \mathcal{E}_U auffassen.

³Beachte, dass ein globales Frame *nicht* automatisch bedeutet, dass es eine globale Karte für die Mannigfaltigkeit gibt.

Die Schnitte des Tangentialbündels $T\mathcal{M}^m$ nennt man auch **Vektorfelder** (siehe auch [Lee1, Chapter 8]). Es gibt eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen Vektorfeldern und Derivationen (siehe [Lee1, Proposition 8.15]). Derivationen sind Abbildungen $D: C^\infty(\mathcal{M}^m) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}^m)$, welche \mathbb{R} -linear sind und die Leibniz-Regel erfüllen, d. h.

$$\begin{aligned} D(\alpha f) &:= \alpha D(f), & \alpha \in \mathbb{R}, f \in C^\infty(\mathcal{M}^m), \\ D(fg) &:= f D(g) + g D(f), & f, g \in C^\infty(\mathcal{M}^m). \end{aligned}$$

Künftig unterscheiden wir nicht zwischen beiden Begriffen und verstehen unter dem Vektorfeld $X \in C^\infty(T\mathcal{M}^m)$ auch die Derivation $X: C^\infty(\mathcal{M}^m) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}^m)$ mit

$$(Xf)(p) = X_p f, \quad X_p = X(p) \in T_p \mathcal{M}^m.$$

Kompositionen von Vektorfeldern sind im Allgemeinen keine Vektorfelder mehr, deren **Lie-Klammern**, bzw. **Kommutatoren**, welche durch

$$[X, Y]f := X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad \forall X, Y \in C^\infty(T\mathcal{M}^m),$$

definiert sind, allerdings schon (siehe [Lee1, Lemma 8.25]). Schnitte des Kotangentialbündels $T^*\mathcal{M}^m$ nennt man auch **Kovektorfelder**, **Differentialformen** oder **1-Formen**. Ein Kovektorfeld $\omega: \mathcal{M}^m \rightarrow T^*\mathcal{M}^m$, lässt sich auch als eine $C^\infty(\mathcal{M}^m)$ -lineare Abbildung auf $C^\infty(T\mathcal{M}^m)$ auffassen. Umgekehrt erzeugt jede solche $C^\infty(\mathcal{M}^m)$ -lineare Abbildung ein Kovektorfeld (siehe auch [Lee1, Proposition 11.11]). Dies ist eine Folgerung einer allgemeinen Charakterisierung von Schnitten des Tensorbündels \mathcal{E}_s^r . Aufgrund der Reflexivität endlichdimensionaler Vektorräume, können wir Elemente $\xi_p \in \mathcal{E}_p$ mit linearen Funktionalen auf \mathcal{E}_p^* , d. h. mit dem Bidualraum \mathcal{E}_p^{**} , identifizieren. Weiter erzeugt jedes Tensorfeld $T \in C^\infty(\mathcal{E}_s^r)$ eine $C^\infty(\mathcal{M}^m)$ -Multilinearform \mathcal{T} durch

$$\begin{aligned} \mathcal{T}: \underbrace{C^\infty(\mathcal{E}^*) \otimes \dots \otimes C^\infty(\mathcal{E}^*)}_{s\text{-fach}} \otimes \underbrace{C^\infty(\mathcal{E}) \otimes \dots \otimes C^\infty(\mathcal{E})}_{r\text{-fach}} &\rightarrow C^\infty(\mathcal{M}^m), \\ \mathcal{T}(\omega_1, \dots, \omega_s, X_1, \dots, X_r)(p) &:= T(p)(\omega_1(p), \dots, \omega_s(p), X_1(p), \dots, X_r(p)). \end{aligned}$$

Die Umkehrung lässt sich auch zeigen (modifiziere [Lee1, Lemma 12.24] und [Lee2, Lemma 2.4]). Die Eigenschaft $C^\infty(\mathcal{M}^m)$ -multilinear zu sein, wird oft auch **tensoriell** genannt. Künftig wollen wir nicht zwischen den beiden Sichtweisen unterscheiden und diese Multilinearform mit dem gleichen Buchstaben bezeichnen.

1.7 Definition (Metrik)

Sei $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ ein Vektorbündel. Eine Abbildung $g \in C^\infty(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*)$, welche *symmetrisch*, d. h. $g(X, Y) = g(Y, X)$, und *positiv definit*, d. h. $g(X, X) > 0$, falls $X \neq 0$, ist (für alle $X, Y \in C^\infty(\mathcal{E})$) heißt (**Bündel-**)**Metrik** für \mathcal{E} . Stellenweise wird die Metrik auch als $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ geschrieben oder, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, auch ohne Index.

Insbesondere nennt man die Metrik g im Falle $\mathcal{E} = T\mathcal{M}^m$ auch eine **riemannsche Metrik**. Das Paar (\mathcal{M}^m, g) heißt **riemannsche Mannigfaltigkeit**.

Weiterhin heißt ein Frame $\{E_i\}_i \subset C^\infty(\mathcal{E})$ (mit allgemeinem \mathcal{E}) **orthonormal**, falls

$$g_{ij}(p) := \langle E_i(p), E_j(p) \rangle_{g_p} = \delta_{ij}, \quad \text{für alle } i, j, p \in \mathcal{M}^m.$$

Die Existenz eines solchen lokalen Frames um $p \in \mathcal{M}^m$ wird durch Modifizierung von [Lee1, Corollary 13.8] gesichert.

Ein Ableitungsbegriff auf \mathcal{E} wird mit der Definition von *Zusammenhängen* eingeführt.

1.8 Definition (Zusammenhang)

Sei $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ ein Vektorbündel. Ein **Zusammenhang** (auch als **kovariante Ableitung** bezeichnet) in \mathcal{E} ist eine Abbildung

$$\nabla: C^\infty(T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(\mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{E}), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\nabla_X Y$ ist linear über $C^\infty(\mathcal{M}^m)$ in X :

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y, \quad \text{für } f, g \in C^\infty(\mathcal{M}^m).$$

(b) $\nabla_X Y$ ist linear über \mathbb{R} in Y :

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a \nabla_X Y_1 + b \nabla_X Y_2, \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}.$$

(c) ∇ erfüllt die Produktregel:

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y, \quad \text{für } f \in C^\infty(\mathcal{M}^m).$$

Einen Zusammenhang auf $\mathcal{E} = T\mathcal{M}^m$ nennt man auch einen **linearen Zusammenhang**.

Ein Zusammenhang ist insbesondere tensoriell im ersten Eintrag. Für den zweiten Eintrag zeigt sich aber auch, dass dieser lokal ist.

1.9 Hilfssatz (Lokalität von ∇)

Sei ∇ ein Zusammenhang auf $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$, $X \in C^\infty(T\mathcal{M}^m)$, $Y \in C^\infty(\mathcal{E})$ und $p \in \mathcal{M}^m$. Dann hängt $\nabla_X Y|_p$ nur von den Werten von Y in einer Umgebung von p und dem Wert von X in p ab. Das heißt für $\tilde{X} \in C^\infty(T\mathcal{M}^m)$ und $\tilde{Y} \in C^\infty(\mathcal{E})$ mit $X(p) = \tilde{X}(p)$ und $Y = \tilde{Y}$ in einer Umgebung von p gilt

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p.$$

Insbesondere können wir den Ausdruck $\nabla_X Y|_p$ formal durch $\nabla_{X_p} Y$ ersetzen.

Beweis: Für den Beweis kombiniere man [Lee2, Lemma 4.1] und [Lee2, Lemma 4.2]. Der formale Ausdruck $\nabla_{X_p} Y$ ist in dem Sinne wohldefiniert, dass nach [Lee1, Lemma 10.12] eine Fortsetzung von X_p als Vektorfeld in eine Umgebung von $p \in \mathcal{M}^m$ existiert. Nach der Lokalität ist der Ausdruck unabhängig von dieser Fortsetzung. \square

Es stellt sich die Frage, ob und wieviele Zusammenhänge es auf einem Vektorbündel gibt. Von fundamentalem Interesse ist natürlich die Frage nach Zusammenhängen auf $T\mathcal{M}^m$. Die Frage lässt sich leicht untersuchen, wenn man sich die zugehörigen *Christoffel-Symbole* anschaut.

1.10 Definition (Christoffel-Symbole)

Sei $\nabla: C^\infty(T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(T\mathcal{M}^m) \rightarrow C^\infty(T\mathcal{M}^m)$ ein Zusammenhang auf $T\mathcal{M}^m$, auch **linearer Zusammenhang** genannt, und $\{E_i\}_i$ ein lokaler Frame auf $U \subset \mathcal{M}^m$ für $T\mathcal{M}^m$. Die Relationen

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k E_k$$

definieren m^3 Funktionen $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$, welche **Christoffel-Symbole** genannt werden.

Mithilfe der Christoffel-Symbole lässt sich auch $\nabla_X Y$ ausdrücken (siehe z. B. [Lee2, Lemma 4.3]). Somit können wir, sofern ein globales Frame existiert, eine eins-zu-eins Korrespondenz zwischen der Wahl von $\{\Gamma_{ij}^k\}$ und einem Zusammenhang herstellen (siehe auch [Lee2, Lemma 4.4]). Insbesondere zeigt man mit einer Teilung der Eins die Existenz eines linearen Zusammenhangs auf jeder Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m . Weiter interessiert man sich noch für Zusammenhänge mit besonderen Eigenschaften. Ist eine Metrik auf einem Vektorbündel gegeben, so stellen Zusammenhänge, welche die Metrik invariant lassen, als „gut“ heraus.

1.11 Definition (Riemannsche Vektorbündel)

Ein Vektorbündel $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ heißt **riemannsch**, falls es eine glatte Abbildung $g \in C^\infty(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*)$ und einen Zusammenhang $\nabla: C^\infty(T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(\mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{E})$ gibt, sodass

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \forall X \in C^\infty(T\mathcal{M}^m) \text{ und } \forall Y, Z \in C^\infty(\mathcal{E}).$$

∇ heißt dann auch **kompatibel** mit g .

Sei $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ ein Vektorbündel und ∇ ein Zusammenhang auf \mathcal{E} . ∇ erzeugt gleichermaßen einen Zusammenhang auf $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$ (auch mit ∇ bezeichnet) durch

$$(\nabla_X g)(Y, Z) := X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z),$$

$$\forall X \in C^\infty(T\mathcal{M}^m) \text{ und } \forall Y, Z \in C^\infty(\mathcal{E}).$$

Insbesondere ist bei gegebener Funktion $g \in C^\infty(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*)$ die Kompatibilität äquivalent zu $\nabla_X g \equiv 0$ für alle $X \in C^\infty(T\mathcal{M}^m)$.

1.12 Satz (Fundamentallemma der Riemannschen Geometrie)

Sei (\mathcal{M}^m, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein eindeutiger (linearer) Zusammenhang ∇ auf $T\mathcal{M}^m$, welcher kompatibel mit g ist und torsionsfrei, d. h.

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X, Y], \quad \forall X, Y \in C^\infty(T\mathcal{M}^m).$$

Dieser Zusammenhang heißt auch **Levi-Civita Zusammenhang**. Für den zu einer Karte (U, x) von \mathcal{M}^m zugehörigen Koordinatenframe berechnen sich die Christoffel-Symbole des Levi-Civita Zusammenhangs zu

$$\Gamma_{ij}^k(p) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g^{k\ell}(p) ((\partial_i g_{j\ell})(p) + (\partial_j g_{i\ell})(p) - (\partial_\ell g_{ij})(p)),$$

mit, wie üblich, $g_{ij}(p) = g(\partial_i|_p, \partial_j|_p)$ und $g^{ij}(p) = (g_{ij}(p))^{-1}$.

Beweis: Der Beweis ist nachzulesen in [Lee2, Theorem 5.4]. □

Der Levi-Civita Zusammenhang stellt die kanonische Wahl eines linearen Zusammenhangs auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit dar. Sprechen wir künftig von einem Zusammenhang auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit, ohne diesen zu spezifizieren, so soll damit stets der Levi-Civita Zusammenhang gemein sein.

Analog zum Fall von Metriken (bzw. $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$) können wir auch auf dem Homomorphismenbündel einen Zusammenhang erzeugen. Sei $\nabla^{\mathcal{E}_i}$ ein Zusammenhang auf dem Vektorbündel $\pi_i: \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{M}^m$, $i = 1, 2$. Wir erhalten auf $\text{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ einen Zusammenhang $\nabla^{\mathcal{H}}$ durch

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathcal{H}}: C^\infty(T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(\text{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)) &\rightarrow C^\infty(\text{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)), \\ (\nabla_X^{\mathcal{H}} S)(Y) &:= \nabla_X^{\mathcal{E}_2}(S(Y)) - S(\nabla_X^{\mathcal{E}_1} Y). \end{aligned}$$

Mithilfe dieses Zusammenhangs auf dem Homomorphismenbündel lässt sich der *Laplace-Operator* auf einem Vektorbündel $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ definieren. Dazu beobachten wir, dass die Abbildung (hier mit $\mathcal{E}_1 = T\mathcal{M}^m$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$)

$$\begin{aligned} \nabla^2: C^\infty(T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(\mathcal{E}) &\rightarrow C^\infty(\mathcal{E}), \\ \nabla_{X,Y}^2 Z &:= \left(\nabla_X^{\mathcal{H}}(A \mapsto \nabla_A^{\mathcal{E}} Z) \right)(Y) = \nabla_X^{\mathcal{E}}(\nabla_Y^{\mathcal{E}} Z) - \nabla_{\nabla_X Y}^{\mathcal{E}} Z, \end{aligned}$$

die gleichen Eigenschaften wie ein Zusammenhang besitzt: $(X, Y) \mapsto \nabla_{X,Y}^2 Z$ ist bilinear über $C^\infty(\mathcal{M}^m)$ und ∇^2 erfüllt \mathbb{R} -Linearität und Produktregel im letzten Eintrag. Es besteht lediglich der Unterschied, dass nun zwei Einträge für Vektorfelder auf \mathcal{M}^m existieren. Wir bezeichnen ∇^2 deshalb als **zweite kovariante Ableitung**. Die Spur der zweiten kovarianten Ableitung bezüglich der Tangentialvektorfelder auf der riemannschen Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m definiert den Laplace-Operator auf \mathcal{E} :

1.13 Definition (Laplace-Operator auf Vektorbündeln)

Sei $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ über einer riemannschen Mannigfaltigkeit (\mathcal{M}^m, g) . Wir bezeichnen die Abbildung

$$\Delta_g: C^\infty(\mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{E}), \quad \Delta_g Z := \operatorname{tr}_g \left((X, Y) \mapsto \nabla_{X,Y}^2 Z \right),$$

als **Laplace-Operator auf \mathcal{E}** , wobei die Spur tr_g lokal von der Form (siehe [Lee2, Seite 27 ff.])

$$\operatorname{tr}_g \left((X, Y) \mapsto \nabla_{X,Y}^2 Z \right)(p) = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(p) \nabla_{E_i, E_j}^2 Z|_p = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(p) \left(\nabla_{E_i}^\mathcal{E} (\nabla_{E_j}^\mathcal{E} Z) - \nabla_{\nabla_{E_i}^\mathcal{E} E_j}^\mathcal{E} Z \right)|_p$$

ist, wobei $\{E_i\}_i \subset C^\infty(T\mathcal{M}^m)$ ein lokaler Frame um $p \in \mathcal{M}^m$ ist und $(g^{ij}(p))_{i,j} = (g_{ij}(p))^{-1}$, $g_{ij}(p) = g(E_i(p), E_j(p))$.

Wir schauen uns nun kurz ein spezielles Beispiel eines Vektorbündels an, nämlich $\mathcal{M}^m \times \mathbb{R}$ und identifizieren diesen mit der Menge der glatten Funktionen $C^\infty(\mathcal{M}^m)$ auf \mathcal{M}^m . Wir definieren dort einen kanonischen Zusammenhang, sodass der dazugehörige Laplace-Operator dem bekannten *Laplace-Beltrami-Operator* gleicht.

1.14 Laplace-Beltrami-Operator

Auf $C^\infty(\mathcal{M}^m)$ ist der **Laplace-Beltrami-Operator** (soll hier auch mit Δ_g bezeichnet werden) üblicherweise definiert als (siehe [Jo, Seite 87 ff.] für Definition von Δ_g , div und grad)

$$\Delta_g f := d^* df = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f), \quad f \in C^\infty(\mathcal{M}^m).$$

Bezüglich einer Karte um $p \in \mathcal{M}^m$ ist $\Delta_g f$ von der Form (siehe [Jo, Seite 88 f.])

$$\Delta_g f(p) = -\frac{1}{\sqrt{G(p)}} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{G(p)} g^{ij}(p) \frac{\partial}{\partial x^j} f \right) \Big|_p,$$

wobei $G(p) := \det(g_{ij}(p))_{ij}$ und $(g^{ij}(p))_{ij} = (g_{ij}(p))_{ij}^{-1}$.

Andererseits lässt sich $C^\infty(\mathcal{M}^m)$ mit dem trivialen Vektorbündel $\mathcal{M}^m \times \mathbb{R}$ über \mathcal{M}^m identifizieren. Das heißt es besteht eine eins-zu-eins Korrespondenz zwischen Schnitten $C^\infty(\mathcal{M}^m \times \mathbb{R})$ und den glatten Funktionen $C^\infty(\mathcal{M}^m)$. Sei $f \in C^\infty(\mathcal{M}^m)$ und $F \in C^\infty(\mathcal{M}^m \times \mathbb{R})$ der dazugehörige Schnitt, sodass $F(p) = (p, f(p))$. Wir definieren die Wirkung von $X \in C^\infty(T\mathcal{M}^m)$ auf F durch

$$X(F) \in C^\infty(\mathcal{M}^m \times \mathbb{R}), \quad X(F)(p) := (p, X(f)(p)).$$

Insbesondere beobachtet man, dass $\nabla: C^\infty(T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(\mathcal{M}^m \times \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}^m \times \mathbb{R})$, $(X, F) \mapsto \nabla_X F := X(F)$ einen Zusammenhang auf $\mathcal{M}^m \times \mathbb{R}$ definiert. Dies ist der Zusammenhang, welcher kompatibel mit der Bündel-Metrik $g(F, H) := fh$ mit $F(\cdot) = (\cdot, f(\cdot))$ und $H(\cdot) = (\cdot, h(\cdot))$

auf $\mathcal{M}^m \times \mathbb{R}$. Der dazugehörige Laplace-Operator stimmt dann mit dem Laplace-Beltrami-Operator, bis auf das Vorzeichen, überein. Dies ist eine Folgerung der *Weitzenböck Formel* (siehe [Jo, Theorem 3.3.3]). Lokal ist $\Delta_g f$ also ebenso von der Form ($p \in \mathcal{M}^m$ und $E_i = \partial_{x^i}$)

$$\begin{aligned} (\Delta_g f)(p) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(p) \left(\nabla_{E_i}^{\mathcal{M}^m \times \mathbb{R}} (\nabla_{E_j}^{\mathcal{M}^m \times \mathbb{R}} f) - \nabla_{\nabla_{E_i} E_j}^{\mathcal{M}^m \times \mathbb{R}} f \right) \Big|_p \\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(p) \left(E_i(E_j(f)) - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k(p) E_k(f) \right) \Big|_p \\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(p) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial f}{\partial x^k}(p) \right). \end{aligned}$$

■

Ein Zusammenhang ∇ auf einem Vektorbündel $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ ermöglicht den Zugang, Elemente unterschiedlicher Fasern von \mathcal{E} zu vergleichen. Diese lassen sich in einer von ∇ vorgegebenen Art und Weise entlang von Kurven auf \mathcal{M}^m verschieben. Dies nennt man *Parallel-Transport* (siehe [Lee2, Seite 59 ff.], [KoNo, Kapitel II.3] oder [Bal, Kapitel 3.1]). Das Maß, wie sich ein Faserelement in \mathcal{E}_{p_1} , welches entlang zweier unterschiedlicher Kurven nach \mathcal{E}_{p_2} parallel verschoben wird, verändert, wird als *Krümmung* bezeichnet, bzw. mit dem anschaulichen Begriff der *Krümmung* verbunden. Dies hat damit zu tun, dass zweite kovariante Ableitungen in den Ableitungsrichtungen in der Regel kommutieren. Als Maß für die Krümmung nehmen wir also die Differenz der zweiten kovarianten Ableitungen mit vertauschten Richtungen, was wir in folgender Definition festhalten:

1.15 Definition (Krümmungstensor)

Sei ∇ ein Zusammenhang auf dem Vektorbündel $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$. Dann ist der **Krümmungstensor** R_∇ definiert als Abbildung

$$R_\nabla: C^\infty(T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(\mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{E}),$$

$$R_\nabla(X, Y)Z := \nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} Z.$$

[Lee2, Proposition 7.1] zeigt, dass R_∇ in der Tat auch tensoriell ist, sodass $(R_\nabla(X, Y)Z)(p)$ nur von X_p, Y_p und Z_p abhängt. Für den Fall $\mathcal{E} = T\mathcal{M}^m$ und ∇ als Levi-Civita Zusammenhang, wird R_∇ oft auch als **riemannscher Krümmungstensor** bezeichnet und es gilt

$$R_\nabla(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad X, Y, Z \in C^\infty(T\mathcal{M}^m).$$

Bezüglich eines Koordinatenframes um $p \in \mathcal{M}^m$ besitzt R_∇ die Komponenten⁴

$$R_{\nabla_{ij}k}^\ell(p) := \partial_{x^i} \Gamma_{kj}^\ell - \partial_{x^j} \Gamma_{ki}^\ell + \sum_{r=1}^{\ell} \left(\Gamma_{ri}^\ell \Gamma_{kj}^r - \Gamma_{rj}^\ell \Gamma_{ki}^r \right).$$

⁴Wir halten uns hier an die Konventionen und Definition in [Lee2].

Oftmals wird auch der $\binom{0}{4}$ -Tensor

$$\text{Riem}(X, Y, Z, W) := \langle R_{\nabla}(X, Y)Z, W \rangle_g, \quad X, Y, Z, W \in C^\infty(TM^m),$$

als riemannscher Krümmungstensor bezeichnet und R_{∇} lediglich als *Krümmung*. In [Lee2, Seite 121 ff.] liest man die Symmetrieeigenschaften von Riem nach. Wegen der Antisymmetrien in den ersten beiden, bzw. letzten beiden, Einträgen, stellt

$$\text{Ric}(X, Y) := \text{tr}_g \left((A, B) \mapsto \text{Riem}(A, X, Y, B) \right) = \text{tr}_g \left((A, B) \mapsto \text{Riem}(X, A, B, Y) \right)$$

die einzige Möglichkeit dar, eine nichttriviale Spur über Riem zu bilden. Der so entstandene $\binom{0}{2}$ -Tensor Ric wird auch als **Ricci-Tensor** oder **Ricci-Krümmung** bezeichnet. Die erneute Spurbildung

$$S := \text{tr}_g \text{Ric} = \text{tr}_g \left((X, Y) \mapsto \text{Ric}(X, Y) \right),$$

wir als **skalare Krümmung** bezeichnet. Bei (zweidimensionalen) riemannschen Flächen begegnet man oft der **Gauß-Krümmung**

$$K := \frac{\text{Riem}(X, Y, Y, X)}{|X|_g^2 |Y|_g^2 - \langle X, Y \rangle_g^2} = \frac{\text{Riem}(X, Y, Y, X)}{|X \wedge Y|_g^2},$$

wobei $\{X, Y\} \subset C^\infty(TM^2)$ beliebiges Frame ist. Dann hängt K mit S zusammen durch $S = 2K$. Als Verallgemeinerung der Gauß-Krümmung auf beliebig dimensionale Mannigfaltigkeiten führt man die **Schnittkrümmung** bezüglich einer Schar von zweidimensionalen Teilräumen der Tangentialräumen, welche von zwei Vektorfeldern aufgespannt werden:

$$K(X, Y) := \frac{\text{Riem}(X, Y, Y, X)}{|X|_g^2 |Y|_g^2 - \langle X, Y \rangle_g^2} = \frac{\text{Riem}(X, Y, Y, X)}{|X \wedge Y|_g^2}, \quad X, Y \in C^\infty(TM^m) \text{ lin. unabh.}$$

Von nun an betrachten wir die Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}^m und \mathcal{N}^n , für welche eine glatte Abbildung $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ gegeben ist. Auf \mathcal{N}^n sei ein Vektorbündel \mathcal{E} gegeben und wir wollen nun versuchen, dieses auf \mathcal{M}^m „zurückzuziehen“. Das so konstruierte Vektorbündel auf \mathcal{M}^m dient als Ausgangspunkt für die *äußere*, bzw. *extrinsische* Geometrie auf \mathcal{M}^m .

1.16 Definition (Pullback-Bündel)

Sei $\tilde{\pi}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}^n$ ein Vektorbündel und $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ eine glatte Abbildung. Das Vektorbündel $\pi^*: f^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ nennen wir ein **Pullback-Bündel**, wobei

$$f^*\mathcal{E} := \coprod_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{E}_{f(p)} = \{(p, \xi) \in \mathcal{N}^n \times \mathcal{E} : f(p) = \tilde{\pi}(\xi)\} \subset \mathcal{N}^n \times \mathcal{E},$$

und π^* ist die Projektion von $f^*\mathcal{E}$ auf \mathcal{M}^m , also für $\xi_p := (p, \xi) \in (f^*\mathcal{E})_p := \mathcal{E}_{f(p)} \subset f^*\mathcal{E}$ ist $\pi^*(\xi_p) = p$. Das Pullback-Bündel ist in der Tat wieder ein Vektorbündel. Für eine Bündelkarte (V, Ψ) von \mathcal{E} erhalten wir eine Bündelkarte (U, Φ) von $f^*\mathcal{E}$, wobei $U = f^{-1}(V) \subset \mathcal{M}^m$ und

$$\Phi: \pi^{*-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k \ni \xi_p \mapsto \left(p, (\text{pr}_2 \circ \Psi)|_{f(p)}(\xi_p) \right),$$

pr_2 ist die Projektion auf die zweite Komponente. [Lee1, Lemma 10.6] oder [Lee2, Lemma 2.2] liefert dann die Behauptung.

Schnitte von \mathcal{E} induzieren Schnitte von $f^*\mathcal{E}$: Sei $X \in C^\infty(\mathcal{E})$ ein Schnitt von \mathcal{E} , dann bezeichnen wir mit $X_f := X \circ f \in C^\infty(f^*\mathcal{E})$ den von X **induzieren Schnitt** auf $f^*\mathcal{E}$. Analog lassen sich ebenso (Bündel-)Metriken von \mathcal{E} auf $f^*\mathcal{E}$ induzieren: Sei $\tilde{g} \in C^\infty(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*)$ eine Metrik auf \mathcal{N}^n . Dann definiert

$$g^* : \mathcal{M}^m \rightarrow (f^*\mathcal{E})^* \otimes (f^*\mathcal{E})^*, \quad g_p^*(X_p, Y_p) := \tilde{g}_{f(p)}(X_p, Y_p),$$

eine (Bündel-)Metrik $g^* \in C^\infty((f^*\mathcal{E})^* \otimes (f^*\mathcal{E})^*)$ auf $f^*\mathcal{E}$. Wir nennen g^* die von \tilde{g} **induzierte Metrik** auf $f^*\mathcal{E}$.⁵ Insbesondere ist diese charakterisiert durch $\tilde{g}(X, Y) \circ f = g^*(X_f, Y_f)$ für $X, Y \in C^\infty(\mathcal{E})$.

Auf relativ kanonische Art und Weise lassen sich auch Zusammenhänge auf einem Vektorbündel $\tilde{\pi} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}^n$ nach \mathcal{M}^m zurückziehen.

1.17 Definition und Hilfssatz (Pullback-Zusammenhang)

Sei $f : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ eine glatte Abbildung, $\tilde{\pi} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}^n$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang $\tilde{\nabla}$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Zusammenhang ∇^* auf $f^*\mathcal{E}$, den **Pullback-Zusammenhang**, welcher charakterisiert ist durch

$$\nabla_{\xi_p}^* X_f = \tilde{\nabla}_{f_*\xi_p} X \in \mathcal{E}_{f(p)} = (f^*\mathcal{E})_p,$$

für beliebiges $p \in \mathcal{M}^m$ und $\xi_p \in T_p\mathcal{M}^m$ und $X \in C^\infty(\mathcal{E})$, wobei der Ausdruck im Sinne von Lemma 1.9 zu verstehen ist.

Beweis: Den Beweis liest man bei [Ba, Proposition 2.2] nach. \square

Es zeigt sich, dass dieser zurückgezogene Zusammenhang in dem Sinne natürlich ist, dass er die riemannsche Struktur erhält. Das soll heißen: Ist $\tilde{\nabla}$ kompatibel mit einer (Bündel-)Metrik \tilde{g} , so wird ∇^* mit der induzierten (Bündel-)Metrik g^* kompatibel sein.

1.18 Proposition

Ist \tilde{g} eine (Bündel-)Metrik auf $\tilde{\pi} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}^n$ und $\tilde{\nabla}$ ein Zusammenhang, welcher kompatibel mit \tilde{g} ist, dann ist ∇^* kompatibel mit g^* .

Beweis: Einen Beweis liest man in [Ba, Proposition 2.3] oder [Per, Theorem 2.5] nach. \square

⁵Pullback-Metrik wäre eigentlich der angemessene Begriff hier, allerdings ist dieser Bereits für $g := f^*\tilde{g}$ reserviert (siehe unten). Wir werden allerdings gleich sehen, dass man $T\mathcal{M}^m$ als Unterbündel von $f^*T\mathcal{N}^n$ auffassen kann und somit die Einschränkung der Metrik g^* auf $T\mathcal{M}^m$ mit $g = f^*\tilde{g}$ übereinstimmt und somit eine Verallgemeinerung der Pullback-Metrik darstellt.

Mit diesen Vorarbeiten widmen wir uns nun der *äußeren* Geometrie. Insbesondere meinen wir damit, dass $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ eine Immersion ist, d. h. $f_*|_p$ ist injektiv und besitzt konstanten Rang $= m$ für alle $p \in \mathcal{M}^m$ (siehe auch [Lee1, Chapter 4]). Das heißt insbesondere auch $m \leq n$. Ist auf \mathcal{N}^n eine Metrik \tilde{g} gegeben, so können wir durch $g := f^*\tilde{g}$ eine Metrik auf \mathcal{M}^m zurückziehen, die **Pullback-Metrik** oder auch **erste Fundamentalform** genannt, sodass f eine isometrische Immersion wird. Für diese Metrik findet man nun wieder den Levi-Civita Zusammenhang auf $T\mathcal{M}^m$. Allerdings stellt sich heraus, dass diese induzierte metrische Struktur relativ unbrauchbar für Untermannigfaltigkeitengeometrie ist, da man jegliche Information über die Immersion, damit ist der *Normalenraum* gemeint, ignoriert und man lediglich die induzierte Metrik als erste Fundamentalform behält. Diese Tatsache ist so gesehen aber relativ irrelevant. Viel wertvoller ist allerdings der Ansatz, punktweise, die kompletten Tangentialräume $T_{f(p)}\mathcal{N}^n$ auf \mathcal{M}^m zurückzuziehen, um den *Normalenraum* beizubehalten. Insbesondere wollen wir also das Pullback-Bündel $f^*T\mathcal{N}^n$ betrachten. Zusammen mit der induzierten Metrik und dem Pullback-Zusammenhang hat man dann die wesentlichen Informationen der Immersion auf \mathcal{M}^m zurückgezogen.

Elemente aus $T\mathcal{M}^m$ lassen sich durch f nach $f^*T\mathcal{N}^n$ einbetten:⁶

$$\xi_p \in T_p\mathcal{M}^m, \quad \xi_p^* := f_*\xi_p \in T_{f(p)}\mathcal{N}^n = (f^*T\mathcal{N}^n)_p.$$

Somit können wir $T\mathcal{M}^m$ als Teilmenge von $f^*T\mathcal{N}^n$ auffassen. In der Tat ist $T\mathcal{M}^m$, wegen der Injektivität von f_* , sogar ein *Unterbündel* von $f^*T\mathcal{N}^n$. Für den Begriff des Unterbündels und dem Nachweis der Tatsache siehe [Lee1, Seite 264 ff., insbesondere Theorem 10.34]. Das zu $T\mathcal{M}^m$ komplementäre Unterbündel wird als *Normalenbündel* bezeichnet.

1.19 Definition (Normalenbündel)

Sei $f: (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ eine isometrische Immersion, sodass $g = f^*\tilde{g}$, d. h. g ist die Pullback-Metrik von \tilde{g} . Als **Normalenbündel** definieren wir das Vektorbündel vom Rang $n - m$

$$\begin{aligned} N\mathcal{M}^m &:= \coprod_{p \in \mathcal{M}^m} N_p\mathcal{M}^m := \coprod_{p \in \mathcal{M}^m} (f_*(T_p\mathcal{M}^m))^\perp \\ &:= \coprod_{p \in \mathcal{M}^m} \{ \xi_p \in (f^*T\mathcal{N}^n)_p : g(\xi_p, \eta_p) = 0, \text{ für alle } \eta_p \in T_p\mathcal{M}^m \}, \end{aligned}$$

mit Faser $N_p\mathcal{M}^m$, dem **Normalenraum**, sodass $T\mathcal{M}^m \perp N\mathcal{M}^m$ und üblicher Projektion. Die Vektorbündeleigenschaft ist in [Lee1, Proposition 13.21] nachgewiesen. Wir haben dann eine Zerlegung $f^*T\mathcal{N}^n = T\mathcal{M}^m \oplus N\mathcal{M}^m$ des Pullback-Bündels in das Tangential- und Normalenbündel.

Bezüglich der Zerlegung $f^*T\mathcal{N}^n = T\mathcal{M}^m \oplus N\mathcal{M}^m$ wollen wir Projektionen auf das jeweilige Unterbündel einführen. Es bezeichne

$$\top : f^*T\mathcal{N}^n \rightarrow T\mathcal{M}^m, \quad \perp : f^*T\mathcal{N}^n \rightarrow N\mathcal{M}^m,$$

⁶Dazu braucht f keine Immersion sein.

die tangentielle bzw. normale Projektion, sodass jedes $\xi_p \in \mathcal{E}_{f(p)}$ die eindeutige Darstellung $\xi_p = \xi_p^\top + \xi_p^\perp$ mit $\xi_p^\top \in T_p\mathcal{M}^m$ und $\xi_p^\perp \in N_p\mathcal{M}^m$ besitzt.

Gleichermaßen, wie einzelne Vektoren, lassen sich Vektorfelder auf $T\mathcal{M}^m$ kanonisch in $f^*T\mathcal{N}^n$ einbetten:⁷

$$X^*: \mathcal{M}^m \rightarrow f^*T\mathcal{N}^n, \quad X^*(p) := f_*X_p, \quad \text{also } X^* \in C^\infty(f^*T\mathcal{N}^n).$$

Ist f eine Immersion so bildet X^* nach $T\mathcal{M}^m$ als Unterbündel von $f^*T\mathcal{N}^n$ ab. In diesem Fall lassen wir das $*$ einfach weg, um die Notation nicht zu überfluten.

Wir schauen uns jetzt wieder das Beispiel der Immersion $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ mit $\mathcal{E} = T\mathcal{N}^n$ an und fragen uns wie der Pullback-Zusammenhang ∇^* mit dem von der Pullback-Metrik $f^*\tilde{g}$ induzierten Levi-Civita Zusammenhang ∇ zusammenhängt. Es ist klar, dass durch die zusätzlichen Richtung normal \mathcal{M}^m im Pullback-Bündel mehr passieren kann. Wir splitten die einzelnen Komponenten auf und bezeichnen

$$\begin{aligned} \nabla^\top &:= \top \circ \nabla^*: C^\infty(T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(f^*T\mathcal{N}^n) \rightarrow C^\infty(T\mathcal{M}^m), \\ \nabla^\perp &:= \perp \circ \nabla^*: C^\infty(T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(f^*T\mathcal{N}^n) \rightarrow C^\infty(N\mathcal{M}^m). \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität von Projektionen ergeben ∇^\top , bzw. ∇^\perp eingeschränkt Schnitte von $T\mathcal{M}^m$, bzw. $N\mathcal{M}^m$, wieder Zusammenhänge über $T\mathcal{M}^m$, bzw. $N\mathcal{M}^m$.

Dem normalen Anteil von ∇^* kommt eine besondere Bedeutung zu, denn er enthält sämtliche Information über die *äußere Geometrie*, d. h. wie sich \mathcal{M}^m bezüglich der Immersion f im ambienten Raum \mathcal{N}^n krümmt. Deshalb geben wir dem einen eigenen Namen:

1.20 Definition (Zweite Fundamentalform)

Sei $f: (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ eine isometrische Immersion, $(\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ mit Levi-Civita Zusammenhang auf $T\mathcal{N}^n$. Wir nennen die symmetrische $C^\infty(\mathcal{M}^m)$ -Bilinearform (siehe dazu auch [Lee2, Lemma 8.1])

$$B: C^\infty(T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(T\mathcal{M}^m) \rightarrow C^\infty(N\mathcal{M}^m), \quad B(X, Y) := \nabla_X^\perp Y = (\nabla_X^* Y)^\perp,$$

die **zweite Fundamentalform**.

Für den tangentialen Anteil von ∇^* stellt sich heraus, dass dieser mit dem Levi-Civita Zusammenhang ∇ der induzierten Pullback-Metrik übereinstimmt:

⁷Auch hier braucht f keine Immersion sein. Die Eigenschaft, dass f eine Immersion ist, ist nur für die Tatsache wichtig, dass $T\mathcal{M}^m$ sich als Unterbündel in $f^*T\mathcal{N}^n$ einbetten lässt, sodass wir $N\mathcal{M}^m$ sinnvoll definieren können und $f^*T\mathcal{N}^n$ die Zerlegung $f^*T\mathcal{N}^n = T\mathcal{M}^m \oplus N\mathcal{M}^m$ erlaubt.

1.21 Proposition

Sei $f: (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ eine isometrische Immersion, $(\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ mit Levi-Civita Zusammenhang auf $T\mathcal{N}^n$. Dann ist ∇^\top , eingeschränkt auf $T\mathcal{M}^m$, der Levi-Civita Zusammenhang von \mathcal{M}^m , d. h.

$$\nabla_X Y = \nabla_X^\top Y, \quad \forall X, Y \in C^\infty(T\mathcal{M}^m).$$

Beweis: Man siehe z. B. [Per, Proposition 3.1] oder [Lee2, Theorem 8.2]. \square

Insgesamt haben wir somit die Zerlegung, auch **Gauß-Formel** genannt,

$$\nabla_X^* Y = \nabla_X Y + B(X, Y), \quad \forall X, Y \in C^\infty(T\mathcal{M}^m).$$

wobei ∇^* , wie üblich, der Pullback-Zusammenhang auf $f^*(T\mathcal{N}^n)$ und ∇ der Levi-Civita Zusammenhang auf $T\mathcal{M}^m$ bezüglich $g = f^*\tilde{g}$ ist. Zusammen mit der *Weingarten Gleichung* (siehe [Lee2, Lemma 8.3] ergibt die Gauß-Formel einen interessanten Zusammenhang zwischen zweiter Fundamentalform und Krümmung, welcher als *Gauß-Gleichung*, bzw. **Theorema Egregium** (im Falle von Flächen im \mathbb{R}^3 ; siehe [Lee2, Theorem 8.6]) bezeichnet wird.

1.22 Satz (Gauß-Gleichung)

Für eine isometrische Immersion $f: (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$, $(\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ mit Levi-Civita Zusammenhang, gilt die **Gauß-Gleichung**

$$\widetilde{\text{Riem}}(X, Y, Z, W) - \text{Riem}(X, Y, Z, W) = \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle_{g^*} - \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle_{g^*},$$

für $X, Y, Z, W \in C^\infty(T\mathcal{M}^m)$, wobei wir $\widetilde{\text{Riem}}$ als auf $T\mathcal{M}^m$ definiert verstanden haben, d. h.

$$\widetilde{\text{Riem}}(X, Y, Z, W)|_p := \widetilde{\text{Riem}}_{f(p)}(f_*X_p, f_*Y_p, f_*Z_p, f_*W_p),$$

was, wegen der tensoriellen Eigenschaft, wohldefiniert ist.

Beweis: Den Beweis liest man in [Lee2, Theorem 8.4] nach. \square

Die Berechnung der zweiten Fundamentalform im Fall von \mathbb{R}^n mit euklidischer Metrik als ambienten Raum wollen wir hier schon einmal vorwegnehmen, da wir dies später noch brauchen.

1.23 Hilfssatz (Zweite Fundamentalform für $\mathcal{N}^n = \mathbb{R}^n$)

Sei $(\mathcal{N}^n, \tilde{g}) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{euc}})$ und $\{N_\ell\}_\ell \subset N\mathcal{M}^m$ ein orthonormaler Frame für $N\mathcal{M}^m$. Sei weiter (U, x) eine Karte auf \mathcal{M}^m , $y = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ die kanonische Karte auf \mathbb{R}^n , $f^k = y^k \circ f$, die Komponenten von f , sowie $F_k = \partial_{y^k}|_f$ der kanonische Frame auf $f^*T\mathbb{R}^3$. Dann ist die zweite Fundamentalform von der Form

$$B(X, Y) = \sum_{\ell=1}^{n-m} b^\ell(X, Y) N_\ell,$$

mit den skalaren zweiten Fundamentalformen $b^\ell: C^\infty(TM^m) \times C^\infty(TM^m) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}^m)$ in Richtung N_ℓ mit Komponenten

$$b_{ij}^\ell := b^\ell(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i \partial x^j} \langle F_k, N_\ell \rangle,$$

auf $U \subset \mathcal{M}^m$.

Beweis: Es sei $\{E_i\}_i \subset TM^m$ und $\{F_k\}_k \subset f^*TN^n$ ein Frame. E_i lässt sich dann auch schreiben als $E_i = \sum_{k=1}^n E_i^k F_k$ mit Komponentenfunktionen $E_i^k \in C^\infty(\mathcal{M}^m)$. Dann ist

$$\begin{aligned} B(E_i, E_j) &= \nabla_{E_i}^\perp E_j \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-m} \langle \nabla_{E_i}^* E_j, N_\ell \rangle N_\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-m} \left\langle \nabla_{E_i}^* \left(\sum_{k=1}^n E_j^k F_k \right), N_\ell \right\rangle N_\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-m} \left\langle \sum_{k=1}^n \left(E_j^k \nabla_{E_i}^* F_k + E_i(E_j^k) F_k \right), N_\ell \right\rangle N_\ell. \end{aligned}$$

Die Rechnung gilt auch für allgemeines \mathcal{N}^n . Speziell für $\mathcal{N}^n = \mathbb{R}^n$ und $y = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ als globale Karte, ∂_{y^k} als Koordinatenvektorfelder und der Wahl $F_k := \partial_{y^k}|_f$ verschwindet der erste Term, denn

$$\nabla_{E_i(p)}^* F_k = \tilde{\nabla}_{f_* E_i(p)} \partial_{y^k} = \sum_{r=1}^n E_i^r(p) (\tilde{\nabla}_{\partial_{y^r}} \partial_{y^k})|_{f(p)} = \sum_{r,s=1}^n E_i^r(p) \underbrace{\tilde{\Gamma}_{rk}^s(f(p))}_{=0 \text{ nach Satz 1.12}} \partial_{y^s}|_{f(p)} = 0,$$

für alle $p \in \mathcal{M}^m$. Wählen wir weiter $E_i = \partial_{x^i}$ als Koordinatenvektorfelder auf U , so sind die Komponentenfunktionen gegeben dort durch

$$E_j^k = \partial_{x^j}(y^k \circ f) = \frac{\partial f^k}{\partial x^j},$$

sodass

$$E_i(E_j^k) = \partial_{x^i} E_j^k = \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Zusammen erhalten wir dann

$$B(E_i, E_j) = \sum_{\ell=1}^{n-m} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i \partial x^j} \langle F_k, N_\ell \rangle \right) N_\ell.$$

□

1.24 Definition (Mittleres Krümmungsvektorfeld)

Sei $f: (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ eine isometrische Einbettung. Das **mittlere Krümmungsvektorfeld** \vec{H} ist definiert durch

$$\vec{H}: \mathcal{M}^m \rightarrow N\mathcal{M}^m, \quad \vec{H} := \frac{1}{m} \operatorname{tr}_g B,$$

wobei die Spur tr_g lokal von der Form (siehe [Lee2, Seite 27 ff.])

$$(\operatorname{tr}_g B)(p) = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(p) B(E_i, E_j)|_p = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(p) \nabla_{E_i}^\perp E_j|_p$$

ist, wobei $\{E_i\}_i \subset C^\infty(T\mathcal{M}^m)$ ein lokaler Frame um $p \in \mathcal{M}^m$ ist und $(g^{ij}(p))_{i,j}$ die inverse Matrix zu $g_{ij}(p) = g(E_i(p), E_j(p))$. Den Betrag des mittleren Krümmungsvektorfeldes nennt man auch **mittlere Krümmung**.

Zum Ende des Kapitels widmen wir uns noch dem Spezialfall eindimensionaler Mannigfaltigkeiten in einem ambienten Raum, d. h. Kurven. Die Formulierung der Kurventheorie ist im Prinzip mit inbegriffen in dem formalen Rahmen, den wir bisher gelegt haben.

1.25 Definition (Kurve)

Sei $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sodass \mathcal{I} als eindimensionale Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) aufgefasst werden kann. Eine **Kurve** ist eine glatte Abbildung $\gamma: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{N}^n$. Die Kurve heißt **regulär**, falls γ eine Immersion ist.

Auf \mathcal{I} ist $\frac{\partial}{\partial t}$ ein globaler Schnitt (= Frame, da eindimensional) für $T\mathcal{I}$. Der *Geschwindigkeitsvektor* von γ in \mathcal{N}^n wird mit $\dot{\gamma}$ bezeichnet und ist definiert durch

$$\dot{\gamma}: \mathcal{I} \rightarrow T\mathcal{N}^n, \quad \dot{\gamma}(t) := \gamma_* \partial_t|_t = d\gamma(\partial_t)(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{N}^n.$$

Als **Vektorfelder entlang der Kurve** γ bezeichnet man Schnitte des Pullback-Bündels $\gamma^*T\mathcal{N}^n$, d. h. glatte Abbildungen $X: \mathcal{I} \rightarrow \gamma^*T\mathcal{N}^n$. Diese lassen sich in der Regel nicht zu (lokale) Vektorfeldern auf \mathcal{N}^n fortsetzen (z. B. ein sich drehender Vektor auf der konstanten Kurve $\gamma(t) \equiv q \in \mathcal{N}^n$ oder das Tangentialvektorfeld einer sich selbst schneidenden regulären Kurve). Vektorfelder entlang γ , welche in $T\mathcal{N}^n$ eine Fortsetzung besitzen, nennt man auch **fortsetzbar** (siehe [Lee2, Seite 56]).

Wir betrachten $(\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ mit Levi-Civita Zusammenhang $\tilde{\nabla}$. Nach Definition und Hilfssatz 1.17 existiert auf $\gamma^*T\mathcal{N}^n$ ein eindeutig bestimmter Zusammenhang $\nabla^*: T\mathcal{I} \times \gamma^*T\mathcal{N}^n \rightarrow \gamma^*T\mathcal{N}^n$, sodass $\nabla_\xi^* X_\gamma = \tilde{\nabla}_{\gamma_* \xi} X$ für $\xi \in T\mathcal{I}$ und $X \in C^\infty(T\mathcal{N}^n)$. Wir bezeichnen mit

$$D_t: C^\infty(\gamma^*T\mathcal{N}^n) \rightarrow C^\infty(\gamma^*T\mathcal{N}^n), \quad D_t := \nabla_{\partial_t}^*,$$

den **Zusammenhang entlang der Kurve** γ . Wir haben insbesondere also

$$D_t X_\gamma|_t = \nabla_{\partial_t}^* X_\gamma|_t = \tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} X, \quad \text{für alle } X \in C^\infty(T\mathcal{N}^n).$$

D_t hat die Eigenschaften (siehe auch [Lee2, Lemma 4.9]), dass es linear über \mathbb{R} ist und die Produktregel

$$D_t(\varphi V) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} V + \varphi D_t V, \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\mathcal{I}), V \in C^\infty(\gamma^*T\mathcal{N}^n).$$

erfüllt. Gleichmaßen definieren wir auch wieder

$$\begin{aligned} D_t^\top &:= \top \circ D_t: C^\infty(\gamma^*T\mathcal{N}^n) \rightarrow C^\infty(T\mathcal{I}), \\ D_t^\perp &:= \perp \circ D_t: C^\infty(\gamma^*T\mathcal{N}^n) \rightarrow C^\infty(N\mathcal{I}), \end{aligned}$$

für die Projektion von D_t auf das Tangentialbündel $T\mathcal{I}$, bzw. das Normalenbündel $N\mathcal{I}$.

1.26 Definition (Geodäten)

Eine Kurve $\gamma: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{N}^n$ heißt **Geodäte**, falls

$$D_t \partial_t \equiv 0.$$

Sei $(\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ jetzt eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $g := \gamma^* \tilde{g}$. γ heißt **nach der Bogenlänge parametrisiert**, falls ∂_t normiert ist, d. h. $g(\partial_t, \partial_t) \equiv 1$. Der Parameter t misst dann die Länge der Kurve γ (siehe [Lee2, Seite 93]). Man kann auch zeigen, dass es für jede reguläre Kurve $\gamma: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{N}^n$ eine Umparametrisierung (= Diffeomorphismus) $\tau: \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{I}$ gibt, sodass $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \tau: \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{N}^n$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist (siehe [Lee2, Exercise 6.2 auf Seite 93]).

1.27 Definition (Geodätische Krümmung)

Sei $\gamma: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{N}^n$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Als **geodätische Krümmung** bezeichnen wir die Abbildung

$$\kappa: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa := |D_t \partial_t| = \sqrt{g^*(D_t \partial_t, D_t \partial_t)}.$$

Die geodätische Krümmung beliebiger regulärer Kurven ist die geodätische Krümmung der dazugehörigen nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve (zurückgezogen auf das ursprüngliche Intervall)

Man beobachte, dass Geodäten stets konstante „Geschwindigkeit“ besitzen. Der Pullback-Zusammenhang ist nach Proposition 1.18 kompatibel mit der induzierten Metrik g^* , sodass

$$\frac{\partial}{\partial t} g(\partial_t, \partial_t) = \frac{\partial}{\partial t} g^*(\partial_t, \partial_t) = g^*(D_t \partial_t, \partial_t) + g^*(\partial_t, D_t \partial_t) = 2g^*(\underbrace{D_t \partial_t}_{\equiv 0}, \partial_t) \equiv 0$$

auf \mathcal{I} . Also können wir (nach Skalierung) annehmen, dass Geodäten nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Insbesondere besitzen Geodäten die geodätische Krümmung $\kappa \equiv 0$. Man kann sich κ also als Maß für die Abweichung der Kurve von einer Geodäte interpretieren. Damit ist die „geometrische“ Abweichung gemeint, welche die Form der Kurven betrifft, und nicht die durch die Parametrisierung erzeugte Abweichung, da die geodätische Krümmung invariant bezüglich Umparametrisierung ist.

1.28 Proposition (geodätische Krümmung und mittlere Krümmung von Kurven)

Sei $\gamma: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{N}^n$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte (reguläre) Kurve in \mathcal{N}^n . \mathcal{N}^n sei mit Metrik \tilde{g} auf $T\mathcal{N}^n$ und Levi-Civita Zusammenhang versehen. κ bezeichne die geodätische Krümmung von γ und \vec{H} das mittlere Krümmungsvektorfeld. Dann gilt

$$\kappa = |D_t \partial_t| = |D_t^\perp \partial_t| = |\vec{H}|, \quad \text{auf } \mathcal{I}.$$

Beweis: Wir berechnen die mittlere Krümmung für den (auf \mathcal{I} globalen) Frame $\{\partial_t\} \subset C^\infty(T\mathcal{M}^m) = C^\infty(\mathcal{I})$. Beachte also $m = 1$ und die Normierung von ∂_t , da γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist:

$$\vec{H} = \frac{1}{m} \operatorname{tr}_g B = \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \nabla_{\partial_t}^\perp \partial_t = D^\perp \partial_t.$$

Wir beobachten weiter, dass

$$D_t^\top \partial_t = (D_t \partial_t)^\top = g^*(D_t \partial_t, \partial_t) \partial_t = \frac{1}{2} \frac{\partial g(\partial_t, \partial_t)}{\partial t} \partial_t \equiv 0,$$

sodass

$$\kappa = |D_t \partial_t| = \underbrace{|D_t^\top \partial_t + D_t^\perp \partial_t|}_{\equiv 0} = |D_t^\perp \partial_t| = |\vec{H}|.$$

□

Insbesondere erhalten wir die geodätische Krümmung beliebig parametrisierter regulärer Kurven, indem wir $|\vec{H}|$ berechnen, da \vec{H} koordinatenunabhängig definiert war.

2 Das Willmore-Funktional für Rotationsflächen

Wir beschäftigen uns hier nun mit dem Willmore-Funktional. Dieses ist definiert als das Integral des Quadrates des Betrages des mittleren Krümmungsvektorfeldes einer Immersion. Wir definieren dies hier allgemeiner als, wie es üblich ist, für Flächen im \mathbb{R}^3 . Dies ist durchaus sinnvoll, denn es wird sich zeigen, dass sich das Willmore-Funktional von Rotationsflächen durch das Willmore-Funktional der zugehörigen Profilkurve, als eine eindimensionale Mannigfaltigkeit, interpretieren lässt.

2.1 Das Willmore-Funktional

Zum Zweck der Integration fordern wir, dass \mathcal{M}^m in diesem Kapitel durchweg kompakt und orientierbar sein soll. Weiter erlauben wir \mathcal{M}^m einen Rand $\partial\mathcal{M}^m$ zu haben. Integrieren werden wir stets bezüglich des *riemannschen Volumenmaßes* auf (\mathcal{M}^m, g) (siehe auch [Lee1, Seite 388 ff.]), welches mit μ_g geschrieben wird. Das durch g auf dem Rand induzierte Volumenmaß wird mit $\mu_{\partial g}$ bezeichnet.

2.1 Definition (Willmore-Funktional)

Sei (\mathcal{M}^m, g) eine kompakte und orientierbare riemannsche Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) zusammen mit einer glatten isometrischen Immersion $f: (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ in eine andere riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathcal{N}^n, \tilde{g})$, den *ambienten Raum*.

- (a) Wir definieren das (*normale*) **Willmore-Funktional** \mathcal{W} als Quadrat der L^2 -Norm der skalaren mittleren Krümmung auf \mathcal{M}^m durch

$$\mathcal{W}(f) := \int_{\mathcal{M}^m} |\vec{H}|^2 d\mu_g.$$

- (b) Für $m = 2$ definieren wir das *konforme* **Willmore-Funktional** \mathcal{W}_c durch

$$\mathcal{W}_c(f) := \int_{\mathcal{M}^2} (|\vec{H}|^2 - K + \tilde{K}) d\mu_g,$$

wobei $\tilde{K}(p)$ die Schnittkrümmung von \mathcal{N}^n bezüglich der Ebene $f_*(T_p\mathcal{M}^2)$ ist.

Man kann zeigen, dass \mathcal{W}_c in der Tat auch ein *konform invariantes* Funktional bildet. Dabei bezeichnet ein **konformer Diffeomorphismus** einen Diffeomorphismus $\Phi: \mathcal{N}^n \rightarrow \mathcal{N}^n$ der riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{N}^n, \tilde{g})$, sodass $\Phi^*\tilde{g} = e^{2\lambda}\tilde{g}$ für eine Funktion $\lambda \in C^\infty(\mathcal{N}^n)$.

2.2 Satz (Konforme Invarianz von \mathcal{W}_c)

Seien (\mathcal{M}^2, g) eine kompakte riemannsche Fläche (mit oder ohne Rand) und $f: (\mathcal{M}^2, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ eine isometrische Einbettung. Dann ist das konforme Willmore-Funktional konform invariant, d. h.

$$\mathcal{W}_c(\Phi \circ f) = \mathcal{W}_c(f),$$

wobei $\Phi: \mathcal{N}^n \rightarrow \mathcal{N}^n$ ein konformer Diffeomorphismus ist.

Beweis: Das Resultat ist schon lange bekannt für den Fall $\mathcal{N}^n = \mathbb{R}^3$ mit euklidischer Metrik. In diesem Fall ist

$$\mathcal{W}_c(f) = \int_{\mathcal{M}^2} (|\vec{H}|^2 - K) d\mu_g,$$

was sich nach Gauß-Bonnet (siehe z. B. [Cha, Theorem V.2.7]) nur um einen Randterm und eine topologische Invariante von \mathcal{W} unterscheidet. Den Beweis für eine allgemeine riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ als ambienten Raum liest man in [Chen] nach. Die dort bewiesene Version entspricht sogar einer Verallgemeinerung auf beliebigdimensionale Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}^m . \square

Unser erstes Ziel ist die Berechnung der ersten Variation für das Willmore-Funktional, welche wir hier allerdings nur zitieren werden. Vorbereitend wollen wir die notwendigen Definitionen und Notationen zusammenfassen.

2.3 Definition und Notationen (Variation)

Es seien riemannsche Mannigfaltigkeiten (\mathcal{M}^m, g) und $(\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ gegeben zusammen mit einer isometrischen Immersion $f: (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$, sodass also $g = f^*\tilde{g}$. Für $\delta > 0$ betrachten wir die Produktmannigfaltigkeit $\mathcal{I} \times \mathcal{M}^m$ („Zeit + Raum“) mit $\mathcal{I} = (-\delta, \delta)$. Die Abbildungen $\iota_t: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{I} \times \mathcal{M}^m$ mit $\iota_t(p) := (t, p)$ betten \mathcal{M}^m in $\mathcal{I} \times \mathcal{M}^m$ ein und wir schreiben $\mathcal{M}_t^m := \iota_t(\mathcal{M}^m) = \{t\} \times \mathcal{M}^m$. Das Tangentialbündel von $\mathcal{I} \times \mathcal{M}^m$ setzt sich aus der Whitney-Summe $T(\mathcal{I} \times \mathcal{M}^m) = T\mathcal{I} \oplus T\mathcal{M}^m$ der einzelnen Tangentialbündel zusammen. Mit $\partial_t \in C^\infty(T\mathcal{I} \oplus T\mathcal{M}^m)$ wollen wir stets das Tangentialvektorfeld bezeichnen, welches in Zeitrichtung zeigt, also das globale Koordinatenvektorfeld auf \mathcal{I} eingebettet nach $T\mathcal{I} \oplus T\mathcal{M}^m$.

Eine **Variation von f** ist eine glatte Abbildung $F: \mathcal{I} \times \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$, sodass F (eingeschränkt auf \mathcal{M}_t^m) für jedes $t \in \mathcal{I}$ eine Immersion von \mathcal{M}_t^m ist, d. h. $f_t := F \circ \iota_t = F(t, \cdot)$ ist eine Immersion von \mathcal{M}^m , und $F(\mathcal{M}_0^m) = f(\mathcal{M}^m)$, d. h. $F \circ \iota_0 = f_0 = f$. F induziert auf $\mathcal{I} \times \mathcal{M}^m$ eine Pullback-Struktur, d. h. ein Vektorbündel $F^*T\mathcal{N}^n$ über $\mathcal{I} \times \mathcal{M}^m$ zusammen mit einer induzierten Metrik g^* , sowie einem mit g^* kompatiblen Zusammenhang ∇^* (siehe 1.16 bis 1.18). Wir bezeichnen mit $V := \partial_t^* \in C^\infty(F^*T\mathcal{N}^n)$, mit $V(t, p) := F_*\partial_t|_{t,p}$, das **Variationsvektorfeld** bezüglich der Variation F . Auch wenn F keine Immersion ist, lässt sich $F^*T\mathcal{N}^n$ in tangentielle und normale

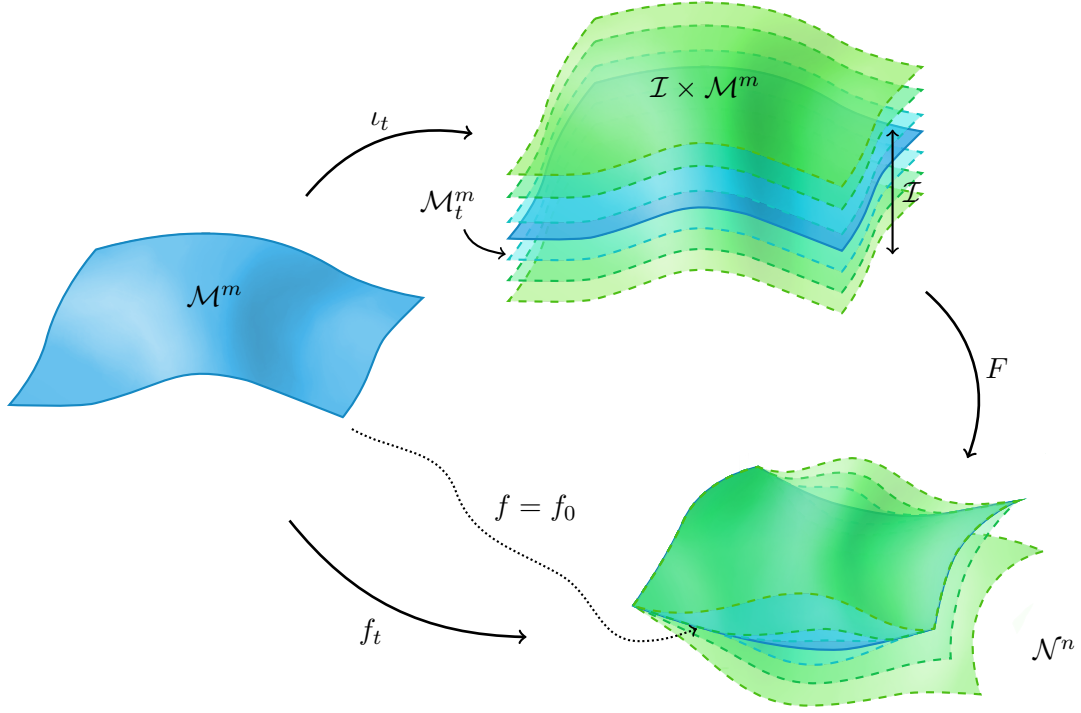


Abb. 2.1: Visualisierung einer Variation F einer Immersion f von \mathcal{M}^m nach \mathcal{N}^n als ambienten Raum.

Komponenten unterteilen (beachte dass f_t Immersionen sind): setze $\mathcal{T}_{t,p}\mathcal{M}^m := (f_t)_*(T_p\mathcal{M}^m)$ und $\mathcal{N}_{t,p}\mathcal{M}^m := (\mathcal{T}_{t,p}\mathcal{M}^m)^\perp$ für $(t,p) \in \mathcal{I} \times \mathcal{M}^m$, sowie

$$\mathcal{T}\mathcal{M}^m := \bigcup_{(t,p) \in \mathcal{I} \times \mathcal{M}^m} \mathcal{T}_{t,p}\mathcal{M}^m, \quad \mathcal{N}\mathcal{M}^m := \bigcup_{(t,p) \in \mathcal{I} \times \mathcal{M}^m} \mathcal{N}_{t,p}\mathcal{M}^m.$$

$\mathcal{T}\mathcal{M}^m$ und $\mathcal{N}\mathcal{M}^m$ sind Unterbündel von $F^*T\mathcal{N}^n$ und es gilt wieder die Zerlegung

$$F^*T\mathcal{N}^n = \mathcal{T}\mathcal{M}^m \oplus \mathcal{N}\mathcal{M}^m.$$

Wieder bezeichnen wir mit

$$\top : F^*T\mathcal{N}^n \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{M}^m, \quad \perp : F^*T\mathcal{N}^n \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{M}^m,$$

die tangentielle und normale Projektion. Da F keine Immersion ist, ist es nicht gesichert, ob ∂_t als Tangentialvektorfeld auf $\mathcal{I} \times \mathcal{M}^m$ nach $\mathcal{T}\mathcal{M}^m$ oder $\mathcal{N}\mathcal{M}^m$ abbildet. Im Fall $V = V^\perp$, so heißt V eine **normale Variation** und falls $V = V^\top$, so heißt V **tangentiale**, bzw. **innere Variation**. Weiterhin definieren wir auch wieder

$$\begin{aligned} \nabla^\top &:= \top \circ \nabla^* : C^\infty(T\mathcal{I} \oplus T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(F^*T\mathcal{N}^n) \rightarrow C^\infty(\mathcal{T}\mathcal{M}^m), \\ \nabla^\perp &:= \perp \circ \nabla^* : C^\infty(T\mathcal{I} \oplus T\mathcal{M}^m) \times C^\infty(F^*T\mathcal{N}^n) \rightarrow C^\infty(\mathcal{N}\mathcal{M}^m). \end{aligned}$$

Analog führt man nun wieder das mittlere Krümmungsvektorfeld \vec{H} ein. Man muss allerdings beachten, dass wir nicht die komplette Spur über $T\mathcal{I} \oplus T\mathcal{M}^m$ bilden dürfen sondern lediglich

$$\vec{H}(t, p) := \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^m g^{*ij}(t, p) \nabla_{E_i}^\perp E_j|_{t,p}, \quad \vec{H} \in C^\infty(\mathcal{NM}^m),$$

um, eingeschränkt auf \mathcal{M}_t^m , wieder die ursprüngliche Definition für Immersionen zu erhalten. Dabei ist $\{E_i\}_i \subset C^\infty(\mathcal{TM}^m)$ ein lokaler Frame um $(t, p) \in \mathcal{I} \times \mathcal{M}^m$ und $(g^{*ij}(t, p))_{ij} = (g_{ij}^*(t, p))_{ij}^{-1}$, $g_{ij}^*(t, p) = g^*(E_i(t, p), E_j(t, p))$. Durch die Identifikation von $T\mathcal{M}^m$ und \mathcal{NM}^m , bezüglich f_t , mit $\mathcal{TM}^m|_t$ und $\mathcal{NM}^m|_t$, ergibt dann $\vec{H}_t := \vec{H} \circ \iota_t$ das mittlere Krümmungsvektorfeld auf \mathcal{M}^m bezüglich f_t . \blacksquare

Basierend auf diesen Notationen geben wir jetzt die erste Variation des (normalen) Willmore-Funktionalen an.

2.4 Hilfssatz (Erste Variation des Willmore-Funktionalen)

Sei $f: (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ eine isometrische Immersion, $\tilde{\nabla}$ der Levi-Civita Zusammenhang auf \mathcal{N}^n , und $F: (-\delta, \delta) \times \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ eine Variation von f , sodass $f_t = F(t, \cdot): (\mathcal{M}^m, g_t) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ isometrische Immersionen sind. In der Notation aus Abschnitt 2.3 ist das Willmore-Funktional definiert zu

$$\mathcal{W}(f_t) := \int_{\mathcal{M}^m} |\vec{H}_t|^2 d\mu_{g_t}.$$

Die erste Variation des Willmore-Funktionalen \mathcal{W} berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{W}(f_t) \Big|_{t=0} &= \int_{\mathcal{M}^m} \left\langle \frac{2}{m} \left(\Delta_{g_t}^\perp \vec{H}_t + \bar{R}_t(\vec{H}_t) + \bar{A}_t(\vec{H}_t) \right) - m |\vec{H}_t|_{g_t}^2 \vec{H}_t, V_t^\perp \right\rangle_{g_t} d\mu_{g_t} \Big|_{t=0} \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{M}^m} \left(\langle \nabla_\eta^\perp V_t^\perp, \vec{H}_t \rangle_{g_t} - \langle V_t^\perp, \nabla_\eta^\perp \vec{H}_t \rangle + |\vec{H}_t|_{g_t}^2 \langle V_t^\top, \eta \rangle_{g_t} \right) d\mu_{\partial g_t} \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Dabei ist η das (intrinsische, d. h. $\eta_p \in T_p\mathcal{M}^m$ für alle $p \in \partial\mathcal{M}^m$) äußere Einheitsnormalenvektorfeld an $\partial\mathcal{M}^m$, $\Delta_{g_t}^\perp$ der Laplace-Operator auf dem Normalenbündel von (\mathcal{M}^m, f_t) (siehe auch Definition 1.13), V das Variationsvektorfeld der Variation F mit normaler und tangentialer Komponente V^\perp und V^\top , sowie

$$\begin{aligned} \bar{R}_t(\vec{H}_t) &:= \text{tr}_{g_t} \left((X, Y) \mapsto R_{\tilde{\nabla}}(\vec{H}_t, X)(Y) \right)^\perp, \\ \bar{A}_t(\vec{H}_t) &:= \text{tr}_{g_t} \left((X, Y) \mapsto -B_t(X, \nabla_Y^\top \vec{H}_t) \right). \end{aligned}$$

Beweis: Die Herleitung der ersten Variation findet man in [Wei, Paragraph 2] oder [Per, Chapter 4.3]. \square

2.5 Definition (Willmore-Fläche)

Als **Willmore-Immersion** bezeichnen wir eine isometrisch immensierte Mannigfaltigkeit

$f: (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$, für welche das Willmore-Funktional kritisch ist, d. h.

$$\frac{d}{dt} \mathcal{W}(f_t) \Big|_{t=0} = 0,$$

für eine vorgegebene Menge von Variationen von $f = f_0$. Im Fall $m = 2$ nennen wir die Immersion auch **Willmore-Fläche**.

Aus der allgemeinen Variationsformel für \mathcal{W} extrahieren wir nun die *Willmore-Gleichung* für Hyperflächen in Räumen konstanter Schnittkrümmung unter festgehaltenen Randwerten:

2.6 Hilfssatz (Dirichletproblem für Hyperflächen in Räumen konstanter Schnittkrümmung)

Sei $f: (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^{m+1}, \tilde{g})$ eine Willmore-Immersion nach \mathcal{N}^{m+1} (mit Levi-Civita Zusammenhang) bezüglich der Variationen $F: (-\delta, \delta) \times \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^{m+1}$, welche vorgegebene Dirichletrandwerte erhalten, d. h. den Rand festhalten, also $V_{t=0} \equiv 0$ auf $\partial\mathcal{M}^m$, und für welche $\nabla_\eta^\perp V_{t=0}^\perp \equiv 0$ auf $\partial\mathcal{M}^m$ (η ist das intrinsische äußere Einheitsnormalenvektorfeld an $\partial\mathcal{M}^m$). Wir fordern weiterhin, dass \mathcal{N}^{m+1} für $m = 1$ auf ganz \mathcal{N}^{m+1} konstante skalare Krümmung (also auch konstante Gauß-Krümmung) besitzt und für $m \geq 2$ punktweise konstante Schnittkrümmung, d. h. $\tilde{K}(\xi_q, \nu_q)$ besitzt den gleichen Wert für alle linear unabhängigen $\xi_q, \nu_q \in T_q\mathcal{N}^{m+1}$. Dann erfüllt f die **Willmore-Gleichung**:

$$(WG) \quad \Delta_g H + \frac{m^2}{2} H^3 - SH + \frac{m}{m+1} \tilde{S} H = 0, \quad \text{auf } \mathcal{M}^m,$$

mit $g = g_0$, $H = H_0$, $S = S_0$ (S_t ist skalare Krümmung auf \mathcal{M}^m bezüglich g_t), \tilde{S} die konstante (siehe Beweis) skalare Krümmung auf \mathcal{N}^n . Δ_g ist der Laplace-Beltrami-Operator (siehe Abschnitt 1.14). Das Finden von Willmore-Immersionen (bzw. Willmore-Flächen) bei vorgegebenen Dirichletrandwerten bezeichnet man auch als **Dirichletproblem für Willmore-Immersionen** (bzw. **-Flächen**).

Beweis: Wir müssen die erste Variation aus Hilfssatz 2.4 auswerten. Aufgrund der vorgegebenen Randwerte des Variationsvektorfeldes entfällt das Randintegral komplett. Wir brauchen nur die einzelnen Terme des Hauptintegrals berechnen. Im Hyperflächen-Fall merken wir zunächst einmal an, dass $\vec{H} = HN$ für ein (bis auf das Vorzeichen) eindeutig bestimmtes Einheitsnormalenvektorfeld N an \mathcal{M}^m . Weiterhin impliziert das Lemma von Schur (siehe [Jo, Theorem 3.3.2]), dass (für $m \geq 2$) Isotropie der Schnittkrümmung deren Homogenität nach sich zieht, d. h. $\tilde{K}(\xi_p, \nu_p) = \text{const}$ auf $T\mathcal{N}^{m+1}$ für linear unabhängige ξ_p, ν_p . Insbesondere ist damit die skalare Krümmung auf \mathcal{N}^{m+1} auch konstant, da $(\{F_i\}_i)$ sei orthonormaler Frame auf \mathcal{N}^{m+1})

$$\tilde{S}(q) = \sum_{i,j=1}^{m+1} \widetilde{\text{Riem}}(F_i, F_j, F_j, F_i) \Big|_q = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m+1} \tilde{K}(F_i, F_j) \Big|_q = (m^2 + m) \underbrace{\tilde{K}(F_i, F_j)}_{i \neq j} \Big|_q =: \tilde{S}.$$

Zur Berechnung der einzelnen Terme der ersten Variation wählen wir *Normalkoordinaten* um $p \in \mathcal{M}^m$ (siehe [Jo, Theorem 1.4.4]). $E_i := \partial_{x^i}$ sei das zugehörige Koordinatenframe, mit $g_{ij}(p) := g_p(E_i(p), E_j(p)) = \delta_{ij}$ und $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, sodass $\nabla_{E_i} E_j|_p = 0$.

1. Term: Zunächst beachten wir: Wegen der Normierung von N erhalten wir

$$0 \equiv E_i(\underbrace{\langle N, N \rangle}_{\equiv 1}) = 2 \langle \nabla_{E_i}^* N, N \rangle = 2 \langle \nabla_{E_i}^\perp N, \underbrace{N}_{\neq 0} \rangle \Rightarrow \nabla_{E_i}^\perp N \equiv 0.$$

Somit ist

$$\nabla_{E_i}^\perp \vec{H} = E_i(H) N + H \underbrace{\nabla_{E_i}^\perp N}_{\equiv 0} = E_i(H) N.$$

Mit der Definition des Laplace-Operators auf dem Normalenbündel rechnen wir dann

$$\begin{aligned} (\Delta_g^\perp \vec{H})(p) &= \sum_{i=1}^m \nabla_{E_i}^{\perp 2} \vec{H}|_p = \sum_{i=1}^m \left(\nabla_{E_i}^\perp \nabla_{E_i}^\perp (HN) \right) \Big|_p = \sum_{i=1}^m \left(\nabla_{E_i}^\perp (E_i(H) N) \right) \Big|_p \\ &= \sum_{i=1}^m \left(E_i(E_i(H)) N \right) \Big|_p = (\Delta_g H(p)) N(p). \end{aligned}$$

2. Term: Für $m \geq 2$ haben wir (mit Notation $\bar{R} = \bar{R}_0$)

$$\begin{aligned} (\bar{R}(\vec{H}))(p) &= \sum_{i=1}^m (R_{\vec{\nabla}}(\vec{H}, E_i) E_i)^\perp \Big|_p \\ &= \sum_{i=1}^m H(p) \langle R_{\vec{\nabla}}(N, E_i) E_i, N \rangle \Big|_p N(p) \\ &= \sum_{i=1}^m H(p) \underbrace{\widetilde{\text{Riem}}(N, E_i, E_i, N)}_{= \tilde{K}(N, E_i) = \frac{1}{m^2+m} \tilde{S}} \Big|_p N(p) \\ &= \frac{1}{m+1} H(p) \tilde{S} N(p). \end{aligned}$$

Die Rechnung für $m = 1$ liefert das gleiche Ergebnis, da

$$\widetilde{\text{Riem}}(N, E_1, E_1, N) \Big|_p = \tilde{K} = \frac{1}{2} \tilde{S}.$$

3. Term: Wir rechnen einfach (hier auch wieder $\bar{A} = \bar{A}_0$)

$$\begin{aligned} \bar{A}(\vec{H})(p) &= - \sum_{i=1}^m B(E_i, \nabla_{E_i}^\top \vec{H}) \Big|_p \\ &= - \sum_{i=1}^m H(p) B \left(E_i, \sum_{j=1}^m \langle \nabla_{E_i}^\top N, E_j \rangle E_j \right) \Big|_p \end{aligned}$$

$$= - \sum_{i,j=1}^m H(p) B(E_i, E_j)|_p \langle \nabla_{E_i}^\top N, E_j \rangle|_p,$$

wobei

$$\langle \nabla_{E_i}^\top N, E_j \rangle = \langle \nabla_{E_i}^* N, E_j \rangle = E_i(\underbrace{\langle N, E_j \rangle}_{=0}) - \langle N, \nabla_{E_i}^* E_j \rangle = -\langle N, \nabla_{E_i}^\perp E_j \rangle = -b(E_i, E_j).$$

Mit $b_{ij} := b(E_i, E_j) = \langle N, B(E_i, E_j) \rangle$ erhalten wir dann

$$\bar{A}(\vec{H})(p) = \sum_{i,j=1}^m H(p) b_{ij}(p)^2 N(p) = H(p) \left(\sum_{i,j=1}^m b_{ij}(p)^2 \right) N(p).$$

Für die übriggebliebene Summe rechnen wir mithilfe der Gauß-Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^m b_{ij}(p)^2 - m^2 H(p)^2 &= \sum_{i,j=1}^m b_{ij}(p)^2 - \sum_{i,j=1}^m b_{ii}(p) b_{jj}(p) \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m (b_{ij}(p)^2 - b_{ii}(p) b_{jj}(p)) \\ &\stackrel{\text{Satz 1.22}}{=} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \left(\underbrace{\widetilde{\text{Riem}}_{ijji}(p)}_{= \frac{1}{m^2+m} \tilde{S}} - \text{Riem}_{ijji}(p) \right) \\ &= \frac{m-1}{m+1} \tilde{S} - S(p). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für den dritten Term insgesamt also

$$\bar{A}(\vec{H})(p) = H(p) \left(m^2 H(p)^2 - S(p) + \frac{m-1}{m+1} \tilde{S} \right) N(p).$$

Fügen wir alle Term zusammen, so erhalten wir für die erste Variation in Hilfssatz 2.4

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \mathcal{W}(f_t)|_{t=0} \\ &= \int_{\mathcal{M}^m} \left\langle \frac{2}{m} \left(\Delta_{g_t}^\perp \vec{H}_t + \bar{R}_t(\vec{H}_t) + \bar{A}_t(\vec{H}_t) \right) - m |\vec{H}_t|_{g_t}^2 \vec{H}_t, V_t^\perp \right\rangle_{g_t} d\mu_{g_t} \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\mathcal{M}^m} \left(\frac{2}{m} \left(\Delta_g H + \frac{1}{m+1} \tilde{S} H + m^2 H^3 - SH + \frac{m-1}{m+1} \tilde{S} H \right) \right. \\ &\quad \left. - m H^3 \right) \langle N_{t=0}, V_{t=0}^\perp \rangle_g d\mu_g \\ &= \frac{2}{m} \int_{\mathcal{M}^m} \left(\Delta_g H + \frac{m^2}{2} H^3 - SH + \frac{m}{m+1} \tilde{S} H \right) \langle N_{t=0}, V_{t=0}^\perp \rangle_g d\mu_g, \end{aligned}$$

und da V (bis auf die Randbedingungen) beliebig sein darf, erfüllt die Willmore-Immersion f

$$0 = \Delta_g H + \frac{m^2}{2} H^3 - SH + \frac{m}{m+1} \tilde{S} H.$$

□

Zum Abschluss des Unterkapitels wollen wir noch die erste Variation des Flächenfunktionals nachtragen.

2.7 Flächenfunktional und Minimalflächen

Sei wieder (\mathcal{M}^m, g) eine kompakte und orientierbare riemannsche Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand), wobei g durch Pullback mittels der Immersion $f: (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ erzeugt wurde. $(\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ sei mit dem Levi-Civita-Zusammenhang versehen. Das **Flächenfunktional** ist dann definiert als

$$\mathcal{A}(f) := \text{vol}_g(\mathcal{M}^m) = \int_{\mathcal{M}^m} d\mu_g.$$

In der Notation aus Abschnitt 2.3 berechnet sich dann die erste Variation von \mathcal{A} bezüglich einer Variation $F: (-\delta, \delta) \times \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ mit $f_t = F(t, \cdot)$ als isomertrische Immersion zu (siehe [Per, Proposition 4.1])

$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(f_t) \right|_{t=0} = -m \int_{\mathcal{M}^m} \langle \vec{H}_t, V_t^\perp \rangle_{g_t} d\mu_{g_t} \Big|_{t=0} + \int_{\partial \mathcal{M}^m} \langle V_t^\top, \eta \rangle d\mu_{\partial g_t} \Big|_{t=0}.$$

Dabei ist η das (intrinsische) äußere Einheitsnormalenvektorfeld an $\partial \mathcal{M}^m$ und V das Variationsvektorfeld (V^\perp ist die normale Komponente).

Kritische Punkte des Flächenfunktionals, also Immersionen mit

$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(f_t) \right|_{t=0} = 0,$$

nennt man **Minimalimmersionen** oder **Minimalflächen**. Dann erfüllen Minimalflächen bezüglich Variationen mit festgehaltenem Rand, d. h. $V_{t=0} \equiv 0$ auf $\partial \mathcal{M}^m$, die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\vec{H} \equiv 0.$$

Insbesondere sind damit solche Minimalflächen als globale Minimierer von \mathcal{W} mit

$$0 \leq \mathcal{W}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{M}^m} |\vec{H}|^2 d\mu_g = 0,$$

auch kritische Punkte und somit Willmore-Flächen. ■

2.2 Das Willmore-Funktional für Rotationsflächen

In diesem Kapitel schauen wir uns eine spezielle Klasse von Immersionen an, *Rotationsflächen*. Diese sind von zentraler Bedeutung in dieser Arbeit, weil sie von relativ einfacher Struktur sind, aber dennoch Raum für interessante Phänomene lassen.

2.8 Rotationsfläche

Sei $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Unter einer **Rotationsfläche** verstehen wir die zweidimensionale Produktmannigfaltigkeit $\mathcal{M}^2 = \mathcal{I} \times \mathbb{R}/2\pi$, das heißt wir können \mathcal{M}^2 als $\mathcal{I} \times [0, 2\pi]$ auffassen, wobei wir $\mathcal{I} \times \{0\}$ mit $\mathcal{I} \times \{2\pi\}$ identifizieren, zusammen mit einer C^k -Einbettung $f_u: \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f_u(x, \varphi) := \begin{pmatrix} x \\ u(x) \cos \varphi \\ u(x) \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (x, \varphi) \in \mathcal{I} \times [0, 2\pi],$$

für ein $u \in C^k(\mathcal{I})$ mit $u(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{I}$. u nennt man die **Profilkurve**, welche die Rotationsfläche erzeugt.

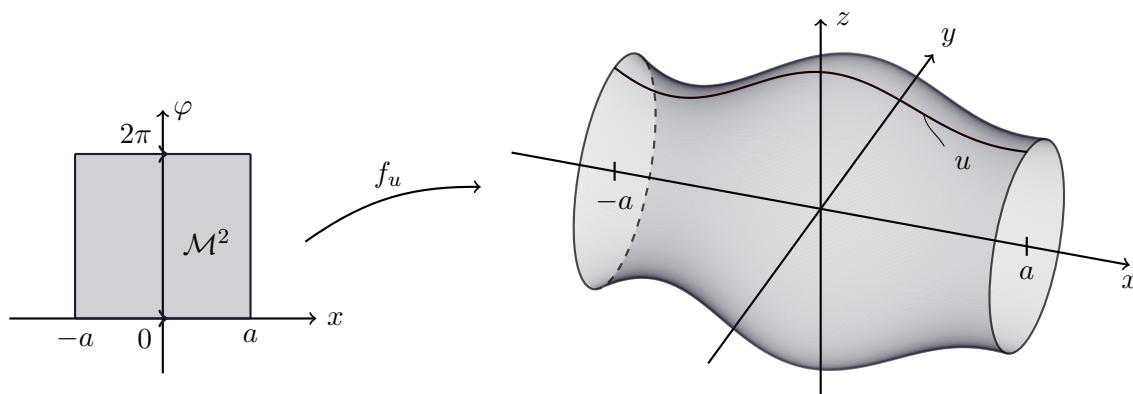


Abb. 2.2: Beispiel einer Rotationsfläche mit Profilkurve u für $\mathcal{I} = [-a, a]$, $a > 0$.

Bemerkung: Bei der Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^2 handelt es sich um eine Mannigfaltigkeit mit Rand, wobei wir als differenzierbare Struktur die, von den folgenden vier Karten erzeugte, verwenden:

$$x_i: U_i \subset \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x_i = \text{id}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

mit Koordinatenumgebungen (es sei $\mathcal{I} = [a, b]$)

$$\begin{aligned} U_1 &= [a, b] \times (0, 2\pi), & U_2 &= [a, b] \times (\pi, 3\pi)/2\pi, \\ U_3 &= (a, b] \times (0, 2\pi), & U_4 &= (a, b] \times (\pi, 3\pi)/2\pi. \end{aligned}$$

Dies ist der kanonische Atlas für \mathcal{M}^2 und Rechnungen in Koordinaten verhalten sich dort so, als ob sie bezüglich des globalen Frames $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right\}$ (kurz $\{\partial_x, \partial_\varphi\}$) berechnet wurden. Wir setzen $\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x}$, sowie $\frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$, d. h. der Index $i = 1$ beschreibt immer x und $i = 2$ beschreibt φ . Im Folgenden werden wir immer bezüglich diesen Koordinaten rechnen und Indizes weglassen aufgrund der Korrespondenz zum globalen Frame.

Für künftige Zwecke fordern wir zunächst $k \geq 2$, also f sei eine C^2 -Immersion. Insbesondere muss $u \in C^2(\mathcal{I})$ sein. Später müssen wir diese Forderung lockern und allgemeinere Funktionsräume zulassen, was aber kein Problem darstellt, da wir dort alleine mit den berechneten Größen, wie z. B. der Metrik und der mittleren Krümmung, arbeiten. ■

2.9 Metrik, erste Fundamentalform

Zusammen mit dem Pullback der euklidischen Metrik g_{euc} auf \mathbb{R}^3 erhalten wir die Pullback-Metrik $g_u = f_u^* g_{\text{euc}}$ auf \mathcal{M}^2 , sodass f_u eine isometrische Immersion ist. (\mathcal{M}^2, g_u) ist eine riemannsche Mannigfaltigkeit, und wir berechnen die Komponenten von g_u bezüglich des (globalen) Frames $\{\partial_x, \partial_\varphi\}$.

$$g_{u,ij} = (f_u^* g_{\text{euc}})_{ij} = f_u^* g_{\text{euc}}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = g_{\text{euc}}(f_{u*} \partial_{x^i}, f_{u*} \partial_{x^j}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_u^k}{\partial x^i} \frac{\partial f_u^k}{\partial x^j},$$

wobei $f_u^k = y^k \circ f_u$ die k -te Komponente von $f_u(p)$ in der Standardkarte $y = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ im \mathbb{R}^3 ist. Es ist

$$\frac{\partial f_u}{\partial x^1}(x, \varphi) = \frac{\partial f_u}{\partial x}(x, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \cos \varphi \\ u'(x) \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f_u}{\partial x^2}(x, \varphi) = \frac{\partial f_u}{\partial \varphi}(x, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -u(x) \sin \varphi \\ u(x) \cos \varphi \end{pmatrix},$$

und damit

$$(g_{u,ij}(x, \varphi))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + u'(x)^2 & 0 \\ 0 & u(x)^2 \end{pmatrix}, \quad G_u(x, \varphi) := \det(g_{u,ij}) = u(x)^2 (1 + u'(x)^2). \quad \blacksquare$$

Zur Berechnung des Willmore-Funktional von Rotationsflächen benötigen wir das mittlere Krümmungsvektorfeld, also insbesondere auch die zweite Fundamentalform.

2.10 Zweite Fundamentalform

Rotationsflächen sind definitionsgemäß in den \mathbb{R}^3 immensierte Hyperflächen. Somit können wir für die Berechnung der zweiten Fundamentalform das Lemma 1.23 für ein, bis auf das Vorzeichen, eindeutig bestimmte Normalenvektorfeld $N_u \in C^\infty(N\mathcal{M}^2)$ anwenden. Für dieses verwenden wir das *innere* Einheitsnormalenvektorfeld, d. h. das, welches auf die Rotationsachse zeigt. Wir adaptieren die Notation aus Lemma 1.23. Unser Einheitsnormalenvektorfeld besitzt

dann die Form:

$$N_u = \sum_{k=1}^3 N_u^k F_k, \quad (N_u^k(x, \varphi))_k = \frac{\frac{\partial f_u}{\partial x} \times \frac{\partial f_u}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial f_u}{\partial x} \times \frac{\partial f_u}{\partial \varphi} \right|_{(x, \varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \begin{pmatrix} u'(x) \\ -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Die zweite Fundamentalform $B_u: C^\infty(TM^2) \times C^\infty(TM^2) \rightarrow C^\infty(NM^2)$ lässt sich dann nach Lemma 1.23 in der Form

$$B_u(X, Y) = b_u(X, Y) N_u$$

schreiben mit *skalärer zweiter Fundamentalform*

$$b_{u,ij} = b_u(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 f_u^k}{\partial x^i \partial x^j} \langle F_k, N_u \rangle.$$

Wir rechnen:

$$\frac{\partial^2 f_u}{\partial x^1 \partial x^1} = \frac{\partial^2 f_u}{\partial x \partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ u''(x) \cos \varphi \\ u''(x) \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f_u}{\partial x^2 \partial x^2} = \frac{\partial^2 f_u}{\partial \varphi \partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u(x) \cos \varphi \\ -u(x) \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 f_u}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 f_u}{\partial x \partial \varphi} = \frac{\partial^2 f_u}{\partial x^2 \partial x^1} = \frac{\partial^2 f_u}{\partial \varphi \partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u'(x) \sin \varphi \\ u'(x) \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$(b_{u,ij}(x, \varphi))_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \begin{pmatrix} -u''(x) & 0 \\ 0 & u(x) \end{pmatrix}.$$

■

2.11 Proposition (Mittlere Krümmung und Gauß-Krümmung von Rotationsflächen)

Für das mittlere Krümmungsvektorfeld der Rotationsfläche $f_u: \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ erhalten wir

$$\vec{H}_u(x, \varphi) = (H_u N_u)(x, \varphi) = \frac{H_u(x, \varphi)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \begin{pmatrix} u'(x) \\ -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix},$$

bezüglich des Standardframes $\partial_{y^k}|_{f_u}$ mit

$$H_u(x, \varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}} \right).$$

Die Gauß-Krümmung der Rotationsfläche berechnet sich zu

$$K_u(x, \varphi) = -\frac{u''(x)}{u(x) (1 + u'(x)^2)^2}.$$

Beweis: Mit den Vorarbeiten aus Abschnitt 2.9 und 2.10

$$(g_u^{ij}(x, \varphi))_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+u'(x)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u(x)^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (b_{u,ij}(x, \varphi))_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \begin{pmatrix} -u''(x) & 0 \\ 0 & u(x) \end{pmatrix},$$

in den gleichen Notationen und bezüglich des (inneren) Einheitsnormalenvektorfeldes wie zuvor, rechnen wir

$$\begin{aligned} H_u(x, \varphi) &= \langle \vec{H}_u, N_u \rangle_{(x, \varphi)} = \frac{1}{2} \langle \text{tr}_{g_u} B_u, N_u \rangle_{(x, \varphi)} \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i,j=1}^2 g_u^{ij} B_u(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}), N_u \right\rangle_{(x, \varphi)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g_u^{ij} b_u(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) \Big|_{(x, \varphi)} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} \right). \end{aligned}$$

Nach der Gauß-Gleichung (Satz 1.22) haben wir ($\widetilde{\text{Riem}}$ verschwindet identisch im \mathbb{R}^3) für die Gauß-Krümmung

$$\begin{aligned} K_u(x, \varphi) &= \frac{1}{2} S_u(x, \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,\ell=1}^2 g_u^{ij} g_u^{k\ell} (b_{u,ij} b_{u,k\ell} - b_{u,i\ell} b_{u,jk}) \Big|_{(x, \varphi)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 g_u^{ii} g_u^{kk} (b_{u,ii} b_{u,kk} - b_{u,ik}^2) \Big|_{(x, \varphi)} \\ &= \left(g_u^{11} g_u^{22} (b_{u,11} b_{u,22} - b_{u,12}^2) \right) \Big|_{(x, \varphi)} \\ &= -\frac{u''(x)}{u(x)(1+u'(x)^2)^2}. \end{aligned}$$

□

2.12 Folgerung (Willmore-Funktional von Rotationsflächen)

Das (normale) Willmore-Funktional einer Rotationsfläche $f_u: \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\mathcal{W}(f_u) = \frac{\pi}{2} \int_a^b \left(\frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right)^2 u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} dx.$$

Das konforme Willmore-Funktional der Rotationsfläche berechnet sich zu

$$\mathcal{W}_c(f_u) = \mathcal{W}(f_u) + 2\pi \left[\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \right]_a^b.$$

Beweis: Die Berechnung erfolgt direkt mithilfe von Proposition 2.11:

$$\vec{H}_u = H_u N_u, \quad H_u = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u(x) \sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right), \quad K_u = -\frac{u''(x)}{u(x) (1+u'(x)^2)^2}.$$

Für das (normale) Willmore-Funktional erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(f_u) &= \int_{\mathcal{M}^2} |\vec{H}_u|^2 d\mu_{g_u} = \int_{\mathcal{M}^2} H_u^2 d\mu_{g_u} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\frac{1}{u(x) \sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right)^2 u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} dx d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_a^b \left(\frac{1}{u(x) \sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right)^2 u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} dx. \end{aligned}$$

Für das konforme Willmore-Funktional hingegen rechnen wir (Schnittkrümmungen im \mathbb{R}^3 verschwinden, d. h. $\tilde{K} \equiv 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_c(f_u) &= \int_{\mathcal{M}^2} (|\vec{H}_u|^2 - K_u) d\mu_{g_u} = \mathcal{W}(f_u) - \int_{\mathcal{M}^2} K_u d\mu_{g_u} \\ &= \mathcal{W}(f_u) + \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{u''(x)}{u(x) (1+u'(x)^2)^2} u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} dx d\varphi \\ &= \mathcal{W}(f_u) + 2\pi \int_a^b \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} dx \\ &\quad = \frac{d}{dx} \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \\ &= \mathcal{W}(f_u) + 2\pi \left[\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \right]_a^b. \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Die Tatsache, dass das Integral $\int_{\mathcal{M}^2} K_u d\mu_{g_u}$ in Randterme zerfällt, ist keineswegs eine spezielle Eigenschaft von Rotationsflächen. Es ist eine Folge des Satzes von Gauß-Bonnet für Flächen mit Rand (siehe z. B. [Cha, Theorem V.2.7]). Später (in Kapitel §3) schauen wir uns Rotationsflächen an, deren Profilkurven am Rand verschwindende Ableitungen besitzen, d. h. $u'(a) = u'(b) = 0$, sodass insbesondere $\mathcal{W}(f_u) = \mathcal{W}_c(f_u)$. Minimieren wir das (normale) Willmore-Funktional in Klassen mit vorgegebenen Dirichlet-Randbedingungen, so minimieren wir gleichzeitig auch das konforme Willmore-Funktional in dieser Klasse. ■

2.13 Satz (Willmore-Gleichung für Rotationsflächen)

Eine Willmore-Immersion $f: \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ erfüllt mit den in Hilfssatz 2.6 beschriebenen zulässigen Variationen von f die Willmore-Gleichung

$$\Delta_g H + 2H(H^2 - K) = 0, \quad \text{auf } \mathcal{M}^2.$$

Insbesondere erfüllen Willmore-Immersionen als Rotationsflächen die Willmore-Gleichung

$$(WGR) \quad \frac{1}{u(x) \sqrt{1+u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{u(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} H'_u(x) \right) + \frac{1}{2} H_u(x) \left(\frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{u(x) \sqrt{1+u'(x)^2}} \right)^2 = 0, \quad \text{für } x \in (a, b).$$

Beweis: Für den Beweis wird einfach Hilfssatz 2.6 angewendet. Zunächst beobachten wir, dass $(\mathbb{R}^3, g_{\text{euc}})$ die Bedingung der konstanten Schnittkrümmung ($\equiv 0$) erfüllt. Somit ist auch $\tilde{S} = 0$ und mit $S = 2K$ (K ist Gauß-Krümmung von \mathcal{M}^2) folgt dann

$$\Delta_g H + 2H^3 - 2KH = 0, \quad \text{auf } \mathcal{M}^2.$$

Für Rotationsflächen beachten wir einfach nur die lokale Darstellung des Laplace-Beltrami-Operator 1.14

$$\begin{aligned} (\Delta_{g_u} H_u)(x, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{G_u(x)}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{G_u} g_u^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} H_u \right) \Big|_{(x, \varphi)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G_u(x)}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{G_u(x)} g_u^{11}(x) \frac{\partial}{\partial x} H_u(x) \right) \\ &\stackrel{2.9}{=} \frac{1}{u(x) \sqrt{1+u'(x)^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} H'_u(x) \right), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} H_u^2(x) - K_u(x) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u(x) \sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right)^2 + \frac{u''(x)}{u(x) (1+u'(x)^2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u(x) \sqrt{1+u'(x)^2}} + \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right)^2. \end{aligned}$$

□

2.3 Das hyperbolische Willmore-Funktional

Rotationsflächen sind in dem Sinne sehr spezielle Flächen, als dass sie, wegen der Axialsymmetrie, eine Beschreibung alleine über ihre Profilkurve zulassen. Da erste und zweite Fundamentalform nur von der Form der Profilkurve abhängen, können wir erwarten, dass sich das Willmore-Funktional von Rotationsflächen durch ein Willmore-Funktional der Profilkurve als Graph in einer Ebene darstellen lässt. Als möglichen ambienten Raum, kommt der obere (offene) Halbraum

$$\mathbb{H}^2 := \{q \in \mathbb{R}^2 : q^2 > 0\},$$

in Frage, da Profilkurven positiv sind. Man kann nicht erwarten, dass dieser für die exakte Beschreibung des Problems mit der euklidischen Metrik ausgestattet ist. Es stellt sich heraus, dass geeignete Metrik die *hyperbolische Metrik* auf \mathbb{H}^2 ist. Diese Beobachtung (vgl. Definition und Satz 2.20) wurde unabhängig von Robert Bryant (siehe [BryGri]) und Ulrich Pinkall gemacht. Für weitere Referenzen siehe auch [LaSi].

2.14 Definition (Hyperbolischer Halbraum)

Als **hyperbolischer Halbraum** (\mathbb{H}^n, g_h) bezeichnen wir den offene Halbraum $\mathbb{H}^n = \{q \in \mathbb{R}^n : q^n > 0\}$ zusammen mit der riemannschen Metrik

$$g_h(q) := \frac{1}{(q^n)^2} \sum_{i=1}^n (dy^i|_q)^2 = \frac{1}{(q^n)^2} \sum_{i=1}^n (dy^i \otimes dy^i)|_q,$$

geschrieben in der globalen Karte $y := \text{id}_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Anders geschrieben haben wir

$$(g_{h,ij}(q))_{ij} = \frac{1}{(q^n)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Im Falle $n = 2$ nennen wir (\mathbb{H}^2, g_h) auch **hyperbolische Halbebene**.

2.15 Hilfssatz (Christoffel-Symbole von (\mathbb{H}^n, g_h))

Bezüglich der globalen Karte aus Definition 2.14 berechnen sich die Christoffel-Symbole des Levi-Civita Zusammenhangs zu

$$\begin{aligned} (\tilde{\Gamma}_{ij}^1(q))_{ij} &= \frac{1}{q^n} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ (\tilde{\Gamma}_{ij}^2(q))_{ij} &= \frac{1}{q^n} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ &\vdots \\ (\tilde{\Gamma}_{ij}^{n-1}(q))_{ij} &= \frac{1}{q^n} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$(\tilde{\Gamma}_{ij}^n(q))_{ij} = \frac{1}{q^n} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Der Nachweis erfolgt durch einfaches Berechnen der Christoffel-Symbole des Levi-Civita Zusammenhangs bezüglich der globalen Karte. Nach Satz 1.12 ist auf \mathbb{H}^2

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k(q) &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g_h^{k\ell}(q) (\partial_i g_{h,j\ell}(q) + \partial_j g_{h,i\ell}(q) - \partial_\ell g_{h,ij}(q)) \\ &= \frac{(q^n)^2}{2} (\partial_i g_{h,jk}(q) + \partial_j g_{h,ik}(q) - \partial_k g_{h,ij}(q)) \\ &= \frac{(q^n)^2}{2} \left(\delta_{in} \delta_{kj} \left(-\frac{2}{(q^n)^3} \right) + \delta_{jn} \delta_{ki} \left(-\frac{2}{(q^n)^3} \right) - \delta_{ij} \delta_{kn} \left(-\frac{2}{(q^n)^3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{q^n} (\delta_{ij} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{kj} - \delta_{jn} \delta_{ki}). \end{aligned}$$

□

2.16 Hilfssatz (Riemannsche und skalare Krümmung von \mathbb{H}^n)

Bezüglich der globalen Karte aus Definition 2.14 ist der riemannsche Krümmungstensor von der Form

$$\widetilde{\text{Riem}}_{ijkl}(q) = \frac{1}{(q^n)^4} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{kj}).$$

Die skalare Krümmung ergibt sich dann zu $\tilde{S}(q) = n(1-n)$, ist also konstant. Insbesondere ist im Fall $n=2$ die Gauß-Krümmung gegeben durch $\tilde{K} = -1$.

Beweis: Nach Lemma 2.15 sind die Christoffel-Symbole bezüglich der üblichen globalen Karte und des riemannschen Zusammenhangs auf (\mathbb{H}^n, g_h) gegeben durch

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k(q) = \frac{1}{q^n} (\delta_{ij} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{kj} - \delta_{jn} \delta_{ki}).$$

Für den riemannschen Krümmungstensor rechnen wir also

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Riem}}_{ijkl}(q) &= \sum_{s=1}^n g_{h,ls}(q) R_{\tilde{\nabla}_{ijk}^s}(q) \\ &= g_{h,\ell\ell}(q) R_{\tilde{\nabla}_{ijk}^\ell}(q) \\ &= \frac{1}{(q^n)^2} \left(\partial_i \tilde{\Gamma}_{jk}^\ell(q) - \partial_j \tilde{\Gamma}_{ik}^\ell(q) + \sum_{r=1}^n (\tilde{\Gamma}_{ir}^\ell(q) \tilde{\Gamma}_{jk}^r(q) - \tilde{\Gamma}_{jr}^\ell(q) \tilde{\Gamma}_{ik}^r(q)) \right) \\ &= \frac{1}{(q^n)^4} \left[-\delta_{in} \delta_{jk} \delta_{\ell n} + \delta_{in} \delta_{jn} \delta_{k\ell} + \delta_{in} \delta_{kn} \delta_{j\ell} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{jn} \delta_{ik} \delta_{ln} - \delta_{jn} \delta_{in} \delta_{kl} - \delta_{jn} \delta_{kn} \delta_{il} \\
& + \sum_{r=1}^n \left((\delta_{ir} \delta_{ln} - \delta_{in} \delta_{lr} - \delta_{nr} \delta_{il}) (\delta_{jk} \delta_{nr} - \delta_{jn} \delta_{kr} - \delta_{kn} \delta_{jr}) \right. \\
& \quad \left. - (\delta_{jr} \delta_{ln} - \delta_{jn} \delta_{lr} - \delta_{nr} \delta_{jl}) (\delta_{ik} \delta_{nr} - \delta_{in} \delta_{kr} - \delta_{kn} \delta_{ir}) \right) \\
& = \frac{1}{(q^n)^4} \left[-\cancel{\delta_{in} \delta_{jk} \delta_{ln}} + \cancel{\delta_{in} \delta_{jn} \delta_{kl}} + \cancel{\delta_{in} \delta_{kn} \delta_{jl}} \right. \\
& \quad + \cancel{\delta_{jn} \delta_{ik} \delta_{ln}} - \cancel{\delta_{jn} \delta_{in} \delta_{kl}} - \cancel{\delta_{jn} \delta_{kn} \delta_{il}} \\
& \quad + \cancel{\delta_{ln} \delta_{jk} \delta_{in}} - \cancel{\delta_{ln} \delta_{jn} \delta_{ki}} - \cancel{\delta_{ln} \delta_{kn} \delta_{ij}} \\
& \quad - \cancel{\delta_{in} \delta_{jk} \delta_{ln}} + \cancel{\delta_{in} \delta_{jn} \delta_{kl}} + \cancel{\delta_{in} \delta_{kn} \delta_{jl}} \\
& \quad - \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{nn} + \cancel{\delta_{il} \delta_{jn} \delta_{kn}} + \cancel{\delta_{il} \delta_{kn} \delta_{jn}} \\
& \quad - \cancel{\delta_{ln} \delta_{ik} \delta_{jn}} + \cancel{\delta_{ln} \delta_{in} \delta_{jk}} + \cancel{\delta_{ln} \delta_{kn} \delta_{ij}} \\
& \quad + \cancel{\delta_{jn} \delta_{ik} \delta_{ln}} - \cancel{\delta_{jn} \delta_{in} \delta_{kl}} - \cancel{\delta_{jn} \delta_{kn} \delta_{il}} \\
& \quad \left. + \delta_{jl} \delta_{ik} \delta_{nn} - \cancel{\delta_{jl} \delta_{in} \delta_{kn}} - \cancel{\delta_{jl} \delta_{kn} \delta_{in}} \right] \\
& = \frac{1}{(q^n)^4} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}).
\end{aligned}$$

Doppelte Spurbildung liefert dann die skalare Krümmung

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(q) &= \sum_{i,j=1}^n g_h^{ij}(q) \tilde{\text{Ric}}_{ij}(q) = \sum_{i,j,k,\ell=1}^n g_h^{ij}(q) g_h^{k\ell}(q) \tilde{\text{Riem}}_{ik\ell j}(q) = (q^n)^4 \sum_{i,k=1}^n \tilde{\text{Riem}}_{ikki}(q) \\
&= \sum_{i,k=1}^n (\delta_{ik} \delta_{ik} - \delta_{ii} \delta_{kk}) = n - n^2 = n(1 - n).
\end{aligned}$$

Für $n = 2$ beachte wieder, dass $\tilde{K} = \frac{1}{2}\tilde{S}$. □

2.17 Definition (Hyperbolischer Graph)

Sei $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Unter einer **hyperbolischen Graph** verstehen wir eine C^k -Einbettung $f_{h,u}: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{H}^2$ mit

$$f_{h,u}(t) := \begin{pmatrix} t \\ u(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I},$$

für ein $u \in C^k(\mathcal{I})$. Insbesondere muss $u(t) > 0$ für alle $t \in \mathcal{I}$ gelten.

u soll letztendlich die Profilkurve einer Rotationsfläche repräsentieren. Die Immersion ist dann nichts anderes als der Graph von u . Wie bei den Rotationsflächen wollen wir von nun an auch $k \geq 2$ fordern. Für die Existenztheorie in Kapitel §3 werden wir diese Voraussetzung aber wieder lockern.

2.18 Erste und zweite Fundamentalform

Für die hyperbolische Kurve $f_{h,u}: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{H}^2$ berechnen wir die erste Fundamentalform in der globalen Karte $t = \text{id}_{\mathcal{I}}$ mit Koordinatenframe $\{\partial_t\} \subset C^\infty(T\mathcal{I})$. Die Pullback-Metrik berechnet sich zu

$$g_{h,u}(\partial_t, \partial_t) := f_{h,u}^* g_h(\partial_t, \partial_t) = g_h(f_{h,u*} \partial_t, f_{h,u*} \partial_t) = \frac{1}{u(t)^2} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial f_{h,u}^k}{\partial t} \frac{\partial f_{h,u}^k}{\partial t},$$

wobei wieder $f_{h,u}^k = y^k \circ f_{h,u}$ für globale Karte $y = \text{id}_{\mathbb{H}^2}$ von \mathbb{H}^2 . Es ist

$$\frac{\partial f_{h,u}}{\partial t}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ u'(t) \end{pmatrix},$$

also

$$g_{h,u}(\partial_t, \partial_t)(t) = \frac{1 + u'(t)^2}{u(t)^2}.$$

Für die Berechnung der zweiten Fundamentalform bemerken wir wieder, dass wir im Fall einer Hyperfläche sind (bzw. besser: Kodimension = 1) und bezüglich des (nach oben zeigenden) Einheitsnormalenvektorfeldes $N_{h,u} \in C^\infty(N\mathcal{I})$ arbeiten. Wir adaptieren wieder die Notation aus Lemma 1.23. Dann hat das Einheitsnormalenvektorfeld die Form

$$N_{h,u} = \sum_{k=1}^2 N_{h,u}^k F_k = \sum_{k=1}^2 N_{h,u}^k \partial_{y^k}|_{f_{h,u}}, \quad (N_{h,u}^k(t))_k = \frac{u(t)}{\sqrt{1 + u'(t)^2}} \begin{pmatrix} -u'(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

sowie das Geschwindigkeitsvektorfeld

$$\partial_t = E_1 = \sum_{k=1}^2 E_1^k F_k, \quad E_1^k = \partial_t(y^k \circ f_{h,u}) = \frac{\partial f_{h,u}^k}{\partial t}, \quad (E_1^k(t))_k = \begin{pmatrix} 1 \\ u'(t) \end{pmatrix}.$$

Die zweite Fundamentalform berechnen wir dann wieder in skalarer Form

$$b_{h,u}: C^\infty(T\mathcal{I}) \times C^\infty(T\mathcal{I}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{I}), \quad b_{h,u} = \langle B_{h,u}, N_{h,u} \rangle.$$

Nach dem Beweis (mit leichter Modifizierung) von Lemma 1.23 rechnen wir dann (beachte in der Notation des Beweises: $m = 1$, $n = 2$, $E_1 = \partial_t$, $F_k = \partial_{y^k}|_{f_{h,u}}$)

$$\begin{aligned} b_{h,u,11} &\stackrel{\text{def}}{=} b_{h,u}(\partial_t, \partial_t) = \langle B_{h,u}(\partial_t, \partial_t), N_{h,u} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^2 \left(E_1^k D_t F_k + E_1(E_1^k) F_k \right), N_{h,u} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k,s,r=1}^2 E_1^k E_1^r \tilde{\Gamma}_{rk}^s F_s + \sum_{k=1}^2 E_1(E_1^k) F_k, \sum_{\ell=1}^2 N_{h,u}^\ell F_\ell \right\rangle \\ &= \underbrace{\sum_{k,\ell,s,r=1}^2 g_{h,s\ell} E_1^k E_1^r \tilde{\Gamma}_{rk}^s N_{h,u}^\ell}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\sum_{k,\ell=1}^2 g_{h,k\ell} E_1(E_1^k) N_{h,u}^\ell}_{\textcircled{2}}, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} &= \frac{1}{u(t)^2} \left(2 \tilde{\Gamma}_{12}^1 E_1^1 E_1^2 N_{h,u}^1 + \tilde{\Gamma}_{11}^2 (E_1^1)^2 N_{h,u}^2 + \tilde{\Gamma}_{22}^2 (E_1^2)^2 N_{h,u}^2 \right) \\
&= \frac{1}{u(t)^2 \sqrt{1+u'(t)^2}} \left(2 u'(t)^2 + 1 - u'(t)^2 \right) \\
&= \frac{\sqrt{1+u'(t)^2}}{u(t)^2}, \\
\textcircled{2} &= \frac{u(t) u''(t)}{u(t)^2 \sqrt{1+u'(t)^2}},
\end{aligned}$$

sodass wir insgesamt

$$b_{h,u,11}(t) = b_{h,u}(\partial_t, \partial_t)(t) = \frac{1 + u'(t)^2 + u(t) u''(t)}{u(t)^2 \sqrt{1 + u'(t)^2}}$$

erhalten. ■

2.19 Proposition (Mittlere Krümmung hyperbolischer Graphen)

Als mittleres Krümmungsvektorfeld eines hyperbolischen Graphen $f_{h,u}: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{H}^2$ erhalten wir

$$\vec{H}_{h,u}(t) = H_{h,u}(t) N_{h,u}(t) = \frac{H_{h,u}(t) u(t)}{\sqrt{1+u'(t)^2}} \begin{pmatrix} -u'(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

bezüglich des Standardframes $\partial_{y^k}|_{f_{h,u}}$ mit

$$H_{h,u}(t) = \frac{u(t) u''(t)}{(1+u'(t)^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1+u'(t)^2}}.$$

Beweis: Mit den Vorarbeiten aus Abschnitt 2.18

$$\begin{aligned}
g_{h,u}^{11}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} (g_{h,u}(\partial_t, \partial_t)(t))^{-1} = \frac{u(t)^2}{1+u'(t)^2}, \\
b_{h,u,11}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} b_{h,u}(\partial_t, \partial_t)(t) = \frac{1+u'(t)^2+u(t)u''(t)}{u(t)^2 \sqrt{1+u'(t)^2}},
\end{aligned}$$

in der gleichen Notation und bezüglich des (nach oben zeigenden) Einheitsnormalenvektorfeldes wir zuvor, rechnen wir wieder

$$\begin{aligned}
H_{h,u}(t) &= \langle \vec{H}_{h,u}, N_{h,u} \rangle_t = \langle \text{tr}_{g_{h,u}} B_{h,u}, N_{h,u} \rangle_t \\
&= \left\langle g_{h,u}^{11} B_{h,u}(\partial_t, \partial_t), N_{h,u} \right\rangle_t \\
&= g_{h,u}^{11}(t) b_{h,u}(\partial_t, \partial_t)(t) \\
&= \frac{u(t) u''(t)}{(1+u'(t)^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1+u'(t)^2}}.
\end{aligned}$$

□

2.20 Definition und Satz (Hyperbolisches Willmore-Funktional)

Für einen hyperbolischen Graphen $f_{h,u}: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{H}^2$ definieren wir das **hyperbolische Willmore-Funktional** durch

$$\mathcal{W}_h(f_{h,u}) := \int_{\mathcal{I}} \kappa_{h,u}^2 d\mu_{g_{h,u}} \stackrel{\text{Prop. 1.28}}{=} \int_{\mathcal{I}} |\vec{H}_{u_h}|^2 d\mu_{g_{h,u}},$$

Mit der in Definition 1.27 eingeführten geodätischen Krümmung $\kappa_{h,u}$ von $f_{h,u}$. Explizit berechnet sich dieses zu (für das Intervall der Form $\mathcal{I} = [a, b]$)

$$\mathcal{W}_h(f_{h,u}) = \int_a^b \left(\frac{u(t) u''(t)}{(1 + u'(t)^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + u'(t)^2}} \right)^2 \frac{\sqrt{1 + u'(t)^2}}{u(t)} dt,$$

sodass sich folgender Zusammenhang zum Willmore-Funktionalen von Rotationsflächen ergibt:

$$\mathcal{W}_h(f_{h,u}) = \frac{2}{\pi} \mathcal{W}_c(f_u) = \frac{2}{\pi} \mathcal{W}(f_u) + 4 \left[\frac{u'(t)}{\sqrt{1 + u'(t)^2}} \right]_a^b.$$

Beweis: Die explizite Berechnung erfolgt mithilfe von Proposition 2.19 und der Beobachtung

$$\det(g_{h,u,ij}(t))_{ij} = g_{h,u,11}(t) = g_{h,u}(\partial_t, \partial_t)(t) = \frac{1 + u'(t)^2}{u(t)^2},$$

sodass:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_h(f_{h,u}) &= \int_{\mathcal{I}} |\vec{H}_{h,u}|^2 d\mu_{g_{h,u}} \\ &= \int_a^b H_{h,u}(t)^2 \frac{\sqrt{1 + u'(t)^2}}{u(t)} dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{u(t) u''(t)}{(1 + u'(t)^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + u'(t)^2}} \right)^2 \frac{\sqrt{1 + u'(t)^2}}{u(t)} dt. \end{aligned}$$

Für den Zusammenhang zwischen $\mathcal{W}_h(f_{h,u})$ und $\mathcal{W}(f_u)$ rechnet man:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_h(f_{h,u}) &= \int_a^b \left(\frac{u(t) u''(t)}{(1 + u'(t)^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + u'(t)^2}} \right)^2 \frac{\sqrt{1 + u'(t)^2}}{u(t)} dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{u''(t)}{(1 + u'(t)^2)^{3/2}} + \frac{1}{u(t) \sqrt{1 + u'(t)^2}} \right)^2 u(t) \sqrt{1 + u'(t)^2} dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{u(t) \sqrt{1 + u'(t)^2}} - \frac{u''(t)}{(1 + u'(t)^2)^{3/2}} \right)^2 u(t) \sqrt{1 + u'(t)^2} dt \\ &\quad + 4 \int_a^b \frac{u''(t)}{(1 + u'(t)^2)^{3/2}} dt \\ &\stackrel{\text{Folg. 2.12}}{=} \frac{2}{\pi} \left(\int_{\mathcal{M}^2} |\vec{H}_u|^2 d\mu_{g_u} - \int_{\mathcal{M}^2} K_u d\mu_{g_u} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \mathcal{W}_c(f_u) \\
&\stackrel{\text{Folg. 2.12}}{=} \frac{2}{\pi} \mathcal{W}(f_u) + 4 \left[\frac{u'(t)}{\sqrt{1+u'(t)^2}} \right]_a^b.
\end{aligned}$$

□

Bei dem hyperbolischen Willmore-Funktional handelt es sich per Definition um das Willmore-Funktional der Einbettung $f_{h,u}: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{H}^2$. Bemerkenswert ist aber der Zusammenhang zum konformen Willmore-Funktional der von u erzeugten Rotationsfläche.

2.21 Satz (Hyperbolische Willmore-Gleichung)

Eine Willmore-Immersion $f: \mathcal{M}^1 \rightarrow \mathbb{H}^2$ erfüllt mit den in Lemma 2.6 beschriebenen zulässigen Variation von f die Willmore-Gleichung

$$\Delta_g H + \frac{1}{2} H^3 - H = 0, \quad \text{auf } \mathcal{M}^1.$$

Insbesondere erfüllen Willmore-Immersionen als hyperbolische Graphen die **hyperbolische Willmore-Gleichung**

(hWG)

$$\frac{u(t)}{\sqrt{1+u'(t)^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{u(t)}{\sqrt{1+u'(t)^2}} H'_{h,u}(t) \right) + \frac{1}{2} H_{h,u}(t)^3 - H_{h,u}(t) = 0, \quad \text{für } x \in (a, b).$$

Beweis: Für den Beweis wird Hilfssatz 2.6 angewendet. Zunächst beobachten wir, dass (\mathbb{H}^2, g_h) die Bedingung der konstanten skalaren Krümmung ($\tilde{S} \equiv -2$, siehe Hilfssatz 2.16) erfüllt. Wegen der Antisymmetrie des riemannschen Krümmungstensor in den ersten beiden, bzw. letzten beiden, Einträgen ist dieser auf eindimensionalen Mannigfaltigkeiten identisch Null, sodass Skalare Krümmungen in einer Dimension verschwinden also $S \equiv 0$. Insgesamt erhalten wir dann

$$\Delta_g H + \frac{1}{2} H^3 - H = 0, \quad \text{auf } \mathcal{M}^1.$$

Für hyperbolische Graphen beachten wir einfach nur die lokale Darstellung des Laplace-Beltrami-Operator 1.14

$$\begin{aligned}
(\Delta_{g_{h,u}} H_{h,u})(t) &= \frac{1}{\sqrt{G_{h,u}(t)}} \sum_{i,j=1}^1 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{G_{h,u}} g_{h,u}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} H_{h,u} \right) \Big|_t \\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{h,u}(\partial_t, \partial_t)(t)}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{h,u}(\partial_t, \partial_t)(t)}} \frac{\partial}{\partial t} H_{h,u}(t) \right) \\
&= \frac{u(t)}{\sqrt{1+u'(t)^2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u(t)}{\sqrt{1+u'(t)^2}} H'_{h,u}(t) \right).
\end{aligned}$$

Für eine andere Herleitung der hyperbolischen Willmore-Gleichung siehe auch [GGs, Lemma 8.4].

□

2.22 Satz (Geodäten in \mathbb{H}^2)

Die Geodäten von \mathbb{H}^2 sind die Kurven, welche zusammenhängende Segmente folgender Mengen parametrisieren (versehen mit einer Parametrisierung proportional zur Bogenlänge):

(a) die Halbgeraden parallel zur y^2 -Achse

$$\{q \in \mathbb{H}^2 : q^1 = a, q^2 > 0\},$$

für ein $a \in \mathbb{R}$,

(b) die (abgeschlossenen) oberen Halbkreise mit Mittelpunkt auf der y^1 -Achse

$$\{q \in \mathbb{H}^2 : (q^1 - a)^2 + (q^2)^2 = r^2, q^2 > 0\},$$

für ein $a \in \mathbb{R}$ und $r > 0$.

Beweis: Für einen Beweis siehe [Lee2, Ch. 5, Prop. 5.14, S. 83]. □

2.23 Folgerung

Sei $f_{h,u}: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{H}^2$ ein hyperbolischer Graph, welcher ein Segment eines (nichtabgeschlossenen) oberen Halbkreises mit Mittelpunkt auf der y^1 -Achse parametrisiert, d. h.

$$\exists a \in \mathbb{R}, r > 0 : \quad (t - a)^2 + u(t)^2 = r^2, \quad \text{für alle } t \in \mathcal{I},$$

dann gilt $\vec{H}_{h,u} \equiv 0$, also insbesondere auch

$$\mathcal{W}_h(f_{h,u}) = \int_{\mathcal{I}} |\vec{H}_{h,u}|^2 d\mu_{g_{h,u}} = 0.$$

Beweis: Nach Satz 2.22 ist die Umparametrisierung nach der Bogenlänge von $t \mapsto f_{h,u}(t)$ eine Geodäte. Nach Definition der geodätischen Krümmung in 1.27 folgt insbesondere, dass die geodätische Krümmung $\kappa_{h,u}$ von $f_{h,u}$ identisch verschwindet. Nach Proposition 1.28 ist dies gleichbedeutend mit der Tatsache, dass $|\vec{H}_{h,u}| \equiv 0$ auf \mathcal{I} , womit also die Behauptung folgt. □

3 Existenz axialsymmetrischer Willmore-Flächen

Bisher haben wir uns das Willmore-Funktional für Rotationsflächen angeschaut und die Willmore-Gleichung als Euler-Lagrange-Gleichung des Willmore-Funktional berechnet. Es ist aber noch nicht klar, ob es wirklich solche Willmore-Flächen gibt. In diesem Kapitel zeigen wir einen Existenzsatz für Willmore-Flächen in einer Unterklasse von Rotationsflächen. Als wichtiges Hilfsmittel zum Finden einer solchen Willmore-Fläche stellt sich die Beschreibung des Willmore-Funktional über hyperbolische Graphen im hyperbolischen Halbraum dar und der Kenntnis der Geodäten in diesem. In Satz 2.20 haben wir das hyperbolische Willmore-Funktional für hyperbolische Graphen $f_{h,u}: \mathcal{I} = [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ berechnet:

$$\mathcal{W}_h(f_{h,u}) = \int_a^b \left(\frac{u(x) u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right)^2 \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{u(x)} dx.$$

Kritische Punkte des hyperbolischen Willmore-Funktional erfüllen die hyperbolische Willmore-Gleichung (Satz 2.21)

$$\text{(hWG)} \quad \frac{u(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{u(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} H'_{h,u}(x) \right) + \frac{1}{2} H_{h,u}(x)^3 - H_{h,u}(x) = 0, \quad x \in (a, b).$$

Als kritischen Punkt suchen wir einen Minimierer von \mathcal{W}_h mithilfe der direkten Methode der Variationsrechnung. Dazu müssen wir den glatten Kontext allerdings verlassen und uns auf Klassen allgemeinerer Profilkurven konzentrieren, welche wir, für $\alpha > 0$, als

$$N_\alpha := \{u \in C^{1,1}([-1, 1]) : u \text{ ist gerade und positiv, } u(1) = \alpha, u'(1) = 0\},$$

sowie

$$H_\alpha := \{u \in H^2(-1, 1) : u \text{ ist gerade und positiv, } u(1) = \alpha, u'(1) = 0\},$$

wählen, wobei wir die punktweisen Eigenschaften der H^2 -Funktionen aus H_α durch die stetige Einbettung $H^2(-1, 1) \hookrightarrow C^1([-1, 1])$ verstehen (vgl. Satz 1.4). Nach dem Satz von Rademacher (siehe [Sim, Theorem 5.2]) ist insbesondere $N_\alpha \subset H_\alpha$. Für Funktionen aus N_α und H_α können wir zunächst nicht von „hyperbolischen Graphen“ sprechen. Das hyperbolische Willmore-Funktional lässt sich aber wohldefiniert auf N_α und H_α fortsetzen. In diesem Kapitel verstehen wir \mathcal{W}_h als Funktional auf N_α , bzw H_α im Sinne der Fortsetzung, definiert durch

$$\mathcal{W}_h(u) := \int_a^b \left(\frac{u(x) u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right)^2 \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{u(x)} dx,$$

sodass $\mathcal{W}_h(u) = \mathcal{W}_h(f_{h,u})$ für jedes klassische $u \in C^2([-1, 1])$. Ebenso verstehen wir das (normale) Willmore-Funktional \mathcal{W} und die (skalaren) mittleren Krümmungen H_u und $H_{h,u}$ auf

N_α , bzw. H_α , fortgesetzt.

Falls wir als Minimierer von \mathcal{W}_h in diesen Klassen wirklich hinreichend glatte Funktionen finden, welche hinreichend glatte hyperbolische Kurven und Rotationsflächen induzieren, so stimmt, aufgrund der Randwerte in N_α , bzw. H_α , und Satz 2.20, \mathcal{W}_h bis auf ein Vielfaches mit \mathcal{W} überein, da

$$\mathcal{W}_h(u) = \frac{2}{\pi} \underbrace{\mathcal{W}(u)}_{:=\mathcal{W}(f_u)} + 4 \underbrace{\left[\frac{u'(t)}{\sqrt{1+u'(t)^2}} \right]_{-1}^1}_{=0} = \frac{2}{\pi} \mathcal{W}(u).$$

Insbesondere minimieren wir also gleichzeitig das Willmore-Funktional in diesen Klassen mit, sodass wir ebenso eine Willmore-Fläche erhalten.

Wir zeigen zunächst, dass das Minimieren des hyperbolischen Willmore-Funktional \mathcal{W}_h in N_α äquivalent zum Minimieren in H_α ist. Dies beruht zum Einen auf folgendem Dichtheitsresultat zwischen N_α und H_α :

3.1 Hilfssatz

Sei $\alpha > 0$. Dann ist N_α dicht in H_α , d. h. zu jedem $u \in H_\alpha$ gibt es eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset N_\alpha$, sodass

$$\|u - u_k\|_{H^2(-1,1)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Beweis: Nach Satz 1.2 ist $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$. Insbesondere ist damit $C^\infty([-1, 1])$ dicht in $H^2(-1, 1)$. Wir wollen zeigen:

$$\tilde{N}_\alpha := \{u \in C^\infty([-1, 1]) : u \text{ ist gerade, } u > 0, u(\pm 1) = \alpha, u'(\pm 1) = 0\} \quad \text{ist dicht in } H_\alpha.$$

Sei $u \in H_\alpha \subset H^2(-1, 1)$ gegeben. Wir finden dann eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^\infty([-1, 1])$ mit $u_k \rightarrow u$ in der H^2 -Norm. Insbesondere gilt somit $u_k \rightarrow u$ in $C^1([-1, 1])$ (wegen der Sobolev-Ungleichung 1.4). Wir können also o. B. d. A. annehmen, dass $u_k > 0$ für alle k . Des Weiteren können wir auch ohne Beschränkung annehmen, dass die u_k gerade sind, d. h. $u_k(x) = u_k(-x)$ für alle x und k , denn: Es bezeichne

$$u_{k,\text{sym}} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto u_{k,\text{sym}}(x) := \frac{1}{2}(u_k(x) + u_k(-x))$$

den geraden Anteil von u_k . Dann haben wir

$$\|u_{k,\text{sym}} - u\|_{L^2} = \left(\int_{-1}^1 \left| \frac{1}{2}(u_k(x) + u_k(-x)) - u(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
u &\stackrel{\text{gerade}}{=} \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 |u_k(x) - u(x) + u_k(-x) - u(-x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 |u_k(x) - u(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 |u_k(-x) - u(-x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{-1}^1 |u_k(x) - u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \|u_k - u\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man dann auch

$$\|u'_{k,\text{sym}} - u'\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad \|u''_{k,\text{sym}} - u''\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

also insbesondere $u_{k,\text{sym}} \rightarrow u$ in $H^2(-1, 1)$. Im Folgenden nehmen wir also u_k als positiv und gerade an. Um die Behauptung zu zeigen, wollen wir zu jedem $u_k \in C^\infty([-1, 1])$ ein $\tilde{u}_k \in \tilde{N}_\alpha$ finden, sodass $\tilde{u}_k \rightarrow u$. Dazu müssen noch die Randdaten modifiziert werden. Es bezeichne

$$\alpha_k := u_k(\pm 1) - u(\pm 1) = u_k(\pm 1) - \alpha, \quad \beta_k := \pm (u'_k(\pm 1) - u'(\pm 1)) = \pm u'_k(\pm 1).$$

Da $u_k \rightarrow u$ in C^1 , gilt insbesondere $\alpha_k, \beta_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ finden wir nun eine gerade Funktion $\varphi_k \in C^\infty([-1, 1])$ mit

$$\varphi_k(\pm 1) = -\alpha_k, \quad \varphi'_k(\pm 1) = \mp \beta_k,$$

und $\|\varphi_k\|_{C^2} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Zum Beispiel erfüllt $x \mapsto \varphi_k(x) = -\frac{\beta_k}{2}x^2 - \alpha_k + \frac{\beta_k}{2}$ diese Bedingungen.

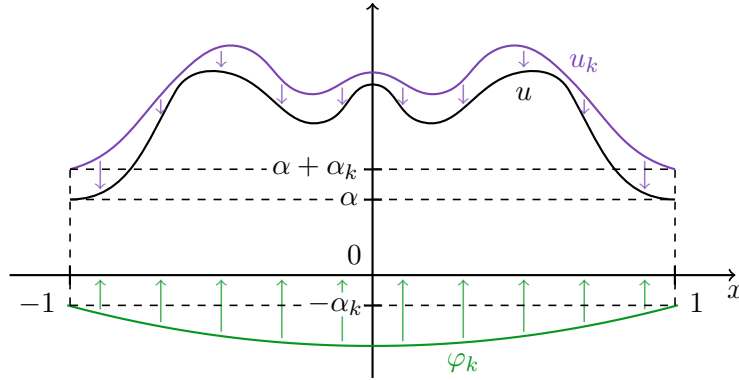


Abb. 3.1: Jedem u_k wird ein $\varphi_k \in C^\infty$ zugewiesen, sodass $\tilde{u}_k := u_k + \varphi_k \in \tilde{N}_\alpha$.

Wir setzen jetzt

$$\tilde{u}_k := u_k + \varphi_k, \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $\tilde{u}_k \in \tilde{N}_\alpha$ und wir zeigen, dass $\tilde{u}_k \rightarrow u$ in H^2 . Dies ist aber evident, da

$$\|\tilde{u}_k - u\|_{H^2} = \|u_k + \varphi_k - u\|_{H^2}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|u_k - u\|_{H^2} + \|\varphi_k\|_{H^2} \\ &\leq \underbrace{\|u_k - u\|_{H^2}}_{\rightarrow 0} + \sqrt{2} \underbrace{\|\varphi_k\|_{C^2}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt:

$$\tilde{N}_\alpha \text{ ist dicht in } H_\alpha.$$

Insbesondere ist

$$\tilde{N}_\alpha \subset N_\alpha \subset H_\alpha,$$

und damit ist auch N_α dicht in H_α . □

Zum Anderen haben wir folgende Stetigkeitseigenschaften des hyperbolischen Willmore-Funktionalen bezüglich der schwachen und starken H^2 -Topologie auf H_α .

3.2 Satz (Schwache Folgen-Unterhalbstetigkeit von \mathcal{W}_h in H_α)

Für alle $\alpha > 0$ ist $\mathcal{W}_h: H_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ schwach folgen-unterhalbstetig in der H^2 -Topologie, d. h. für alle Folgen $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H_\alpha$ mit $u_k \rightharpoonup u \in H^2(-1, 1)$ für ein $u \in H_\alpha$ gilt

$$\mathcal{W}_h(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}_h(u_k).$$

Beweis: Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H_\alpha$ mit $u_k \rightharpoonup u \in H^2(-1, 1)$ und $u \in H_\alpha$. Wir müssen dann zeigen, dass

$$(3.1) \quad \mathcal{W}_h(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}_h(u_k).$$

Es reicht Gleichung (3.1) für eine Teilfolge $(u_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ von $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zu verifizieren, um die Behauptung zu beweisen. Wäre dies nicht so, gäbe es eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\mathcal{W}_h(u) > \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}_h(u_k)$. Die Auswahl einer passenden Teilfolge würde dann den Widerspruch liefern. Nach Kompaktheit der Einbettungen $H^2(-1, 1) \xrightarrow{c} H^1(-1, 1)$ (siehe Satz 1.3) und $H^2(-1, 1) \xrightarrow{c} C^1([-1, 1])$ (siehe Satz 1.4) erreichen wir, nach Auswahl einer Teilfolge, dass

$$u_k \rightarrow u \text{ in } H^1(-1, 1) \quad \text{und} \quad u_k \rightarrow u \text{ in } C^1([-1, 1]).$$

Wir haben:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_h(u) &= \int_{-1}^1 H_{h,u}^2 d\mu_{g_{h,u}} \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} \right)^2 u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{u(x)u''(x)^2}{(1+u'(x)^2)^{5/2}} dx + 2 \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} dx}_{= \left[\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \right]_{-1}^1 = 0} + \int_{-1}^1 \frac{1}{u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}} dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{u(x) u''(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2}} dx,$$

und untersuchen nun die einzelnen Terme von $\mathcal{W}_h(u)$:

(i) Für den ersten Term beobachten wir, dass für ein $h \in L^\infty(-1, 1)$ mit $h \geq 0$ f. ü. gilt, dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-1}^1 h(x) (u''(x) - u_k''(x))^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 h(x) u''(x)^2 dx - 2 \int_{-1}^1 h(x) u''(x) u_k''(x) dx + \int_{-1}^1 h(x) u_k''(x)^2 dx, \end{aligned}$$

also

$$2 \int_{-1}^1 h(x) u''(x) u_k''(x) dx - \int_{-1}^1 h(x) u''(x)^2 dx \leq \int_{-1}^1 h(x) u_k''(x)^2 dx$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Beachte, dass $v \mapsto \int_{-1}^1 h u'' v'' dx$ ein lineares und stetiges Funktional auf $H^2(-1, 1)$ definiert, denn

$$\left| \int_{-1}^1 h(x) u''(x) v''(x) dx \right| \leq \|h\|_{L^\infty} \|u''\|_{L^2} \|v''\|_{L^2} \leq \|h\|_{L^\infty} \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2}.$$

Da $u_k \rightharpoonup u$ in $H^2(-1, 1)$, gilt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 h(x) u''(x)^2 dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \int_{-1}^1 h(x) u''(x) u_k''(x) dx - \int_{-1}^1 h(x) u''(x)^2 dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 h(x) u_k''(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt dann mit der Wahl $0 < h = \frac{u}{(1+u'^2)^{5/2}} \in L^\infty(-1, 1)$, dass

$$\int_{-1}^1 \frac{u(x) u''(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}} dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{u(x) u_k''(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}} dx.$$

Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 u_k''(x)^2 \left(\frac{u(x)}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}} - \frac{u_k(x)}{(1 + u_k'(x)^2)^{5/2}} \right) dx \\ &\leq \underbrace{\|u_k''\|_{L^1}^2}_{= \|u_k''\|_{L^2}^2} \left\| \frac{u}{(1 + u'^2)^{5/2}} - \frac{u_k}{(1 + u_k'^2)^{5/2}} \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \|u_k\|_{H^2}^2 \leq C \\ &\leq C \left\| \frac{u(1 + u_k'^2)^{5/2} - u_k(1 + u'^2)^{5/2}}{(1 + u'^2)^{5/2} (1 + u_k'^2)^{5/2}} \right\|_{L^\infty} \\ &\leq C \left\| u(1 + u_k'^2)^{5/2} - u_k(1 + u'^2)^{5/2} \right\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left\| (u - u_k) (1 + u'^2)^{5/2} + u \left((1 + u_k'^2)^{5/2} - (1 + u'^2)^{5/2} \right) \right\|_{L^\infty} \\
&\leq C \left(\underbrace{\left\| (1 + u'^2)^{5/2} \right\|_{L^\infty}}_{\leq C} \|u - u_k\|_{L^\infty} + \underbrace{\|u\|_{L^\infty}}_{\leq C} \left\| (1 + u_k'^2)^{5/2} - (1 + u'^2)^{5/2} \right\|_{L^\infty} \right) \\
&\leq C \left(\|u - u_k\|_{C^1} + \left\| (1 + u_k'^2)^{5/2} - (1 + u'^2)^{5/2} \right\|_{C^0} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Somit ist also

$$\begin{aligned}
\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{u(x) u''(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}} dx &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{u(x) u_k''(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}} dx \\
&= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{u_k(x) u_k''(x)^2}{(1 + u_k'(x)^2)^{5/2}} dx.
\end{aligned}$$

- (ii) Für den zweiten Term können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\|u_k\|_{L^\infty}, \|u_k'\|_{L^2}, \left\| \frac{1}{u u_k} \right\|_{L^\infty} \leq C < \infty$ für ein $C > 0$, welches unabhängig von $k \in \mathbb{N}$ ist, und rechnen einfach

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-1}^1 \frac{1}{u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2}} dx - \int_{-1}^1 \frac{1}{u_k(x) \sqrt{1 + u_k'(x)^2}} dx \right| \\
&\leq \underbrace{\left\| \frac{1}{u u_k} \right\|_{L^\infty}}_{\leq C} \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + u'^2} \sqrt{1 + u_k'^2}}}_{\leq 1} \left| u \sqrt{1 + u'^2} - u_k \sqrt{1 + u_k'^2} \right| dx \\
&\leq C \left(\int_{-1}^1 |(u - u_k)| dx + \int_{-1}^1 u_k \left| \sqrt{1 + u'^2} - \sqrt{1 + u_k'^2} \right| dx \right) \\
&\leq C \left(\|u - u_k\|_{L^2} + \underbrace{\|u_k\|_{L^\infty}}_{\leq C} \int_{-1}^1 |u'^2 - u_k'^2| \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + u'^2} + \sqrt{1 + u_k'^2}}}_{\leq \frac{1}{2}} dx \right) \\
&\leq C \left(\|u - u_k\|_{L^2} + \|u' - u_k'\|_{L^2} \underbrace{\|u' + u_k'\|_{L^2}}_{\leq C} \right) \\
&\leq C \|u - u_k\|_{H^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus der schwachen Unterhalbstetigkeit des ersten Terms und der schwachen Stetigkeit des zweiten Terms in H_α die schwache Unterhalbstetigkeit von \mathcal{W}_h in H_α , was zu zeigen war. \square

3.3 Satz (Stetigkeit von \mathcal{W}_h in H_α)

Für alle $\alpha > 0$ ist $\mathcal{W}_h: H_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in der H^2 -Topologie, d. h. für alle Folgen $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H_\alpha$ mit $u_k \rightarrow u \in H^2(-1, 1)$ für ein $u \in H_\alpha$ gilt

$$\mathcal{W}_h(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}_h(u_k).$$

Beweis: Die Stetigkeit von \mathcal{W}_h in H_α ist nun leichter zu zeigen, als die schwache Unterhaltstetigkeit von \mathcal{W}_h in H_α . Wir wählen wieder eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H_\alpha$ mit $u_k \rightarrow u \in H^2(-1, 1)$ und $u \in H_\alpha$. Wir müssen dann zeigen, dass

$$\mathcal{W}_h(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}_h(u_k).$$

Mit dem gleichen Argument wie in Satz 3.2 reicht es, die Behauptung für eine geeignete Teilfolge von $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zu zeigen. Wir wollen diese ebenso wie in dem vorherigen Satz auswählen, sodass wir den Beweis Satz 3.2 nur modifizieren brauchen. Dort hatten wir

$$\mathcal{W}_h(u) = \int_{-1}^1 \frac{u(x) u''(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2}} dx.$$

(i) Für den ersten Term beobachten wir einfach nur für $h \in L^\infty(-1, 1)$, dass

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|h\|_{L^\infty}} \left| \int_{-1}^1 h(x) u''(x)^2 dx - \int_{-1}^1 h(x) u''(x)_k^2 dx \right| \\ & \leq \underbrace{\int_{-1}^1 |u''(x) - u''_k(x)|^2 dx}_{\leq \|u(x) - u_k(x)\|_{H^2} \rightarrow 0} + 2 \left| \int_{-1}^1 u''(x) u''_k(x) dx - \int_{-1}^1 u''(x)^2 dx \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

da $v \mapsto \int_{-1}^1 u'' v'' dx$ ein stetiges lineares Funktional auf $H^2(-1, 1)$ definiert und $u_k \rightarrow u$ auch $u_k \rightharpoonup u$ in H^2 impliziert. Mit der Wahl $h = \frac{u}{(1+u'^2)^{5/2}} \in L^\infty(-1, 1)$ haben wir dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{u(x) u''_k(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{u(x) u''(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}} dx.$$

Zusammen mit der anderen Rechnung aus Teil (i) aus dem Beweis von Satz 3.2 folgt dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \left(\frac{u(x) u''_k(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}} - \frac{u_k(x) u''_k(x)^2}{(1 + u'_k(x)^2)^{5/2}} \right) dx = 0.$$

also insgesamt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{u_k(x) u''_k(x)^2}{(1 + u'_k(x)^2)^{5/2}} = \int_{-1}^1 \frac{u(x) u''(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^{5/2}},$$

was die Stetigkeit des ersten Terms zeigt.

(ii) Für den zweiten Term hatten wir im Teil (ii) aus dem Beweis von Hilfssatz 3.2 gesehen, dass dieser schwach stetig ist und damit insbesondere auch stetig (in der Normtopologie). □

Das Infimum des Willmore-Funktional auf N_α bezeichnen wir mit

$$M_\alpha = \inf \{ \mathcal{W}_h(u) : u \in N_\alpha \} \geq 0.$$

Die Stetigkeit von \mathcal{W}_h bezüglich der starken H^2 -Topologie auf H_α , sowie Dichtheit von N_α in H_α bezüglich dieser implizieren

3.4 Folgerung

Es ist

$$M_\alpha = \inf \{ \mathcal{W}_h(u) : u \in H_\alpha \}.$$

Somit stimmen die Infima von \mathcal{W}_h auf N_α und H_α überein.

Beweis: Nach Hilfssatz 3.1 ist N_α dicht in H_α . Für ein $u \in H_\alpha$ wählen wir also eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset N_\alpha$, sodass $u_k \rightarrow u$ in $H^2(-1, 1)$. Nach Folgerung 3.4 ist \mathcal{W}_h stetig in H_α , also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}_h(u_k) = \mathcal{W}_h(u).$$

Insbesondere ist damit

$$\mathcal{W}_h(u) \geq M_\alpha,$$

also

$$M_\alpha = \inf_{u \in N_\alpha} \mathcal{W}_h(u) \geq \inf_{u \in H_\alpha} \mathcal{W}_h(u) \geq M_\alpha,$$

und damit Gleichheit überall. □

Für die Existenztheorie wird die Konstruktion von Bedeutung sein, wie wir sie im Beweis des folgenden Hilfssatzes durchführen. Einerseits liefert sie uns eine Hilfsfunktion, welche wir durchweg mit w_α bezeichnen wollen, mit welcher wir M_α abschätzen können. Andererseits verdeutlicht sie die Bedeutung der Interpretation des Willmore-Funktional von Rotationsflächen mithilfe der hyperbolischen Halbebene und die Rolle der Geodäten der hyperbolischen Ebene in dieser Existenztheorie.

3.5 Hilfssatz (siehe [GGS, Lemma 8.6])

M_α ist nach oben beschränkt durch

$$M_\alpha \leq 8 \tanh\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Insbesondere ist $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} M_\alpha = 0$.

Beweis: Für $\alpha > 0$ wollen wir eine Hilfsfunktion w_α konstruieren, sodass $\mathcal{W}_h(w_\alpha)$ durch $8 \tanh\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ beschränkt ist. Dazu definieren wir $v(x) := \alpha \cosh\left(\frac{x-1}{\alpha}\right)$ für $x \in (0, 1]$. Dieses v soll an einem eindeutig bestimmten Punkt $x_0 \in (0, 1)$ an einen Kreis, der im Ursprung zentriert ist, "geklebt" werden. Damit die Hilfsfunktion stetig differenzierbar ist in x_0 , muss $0 = x_0 + v(x_0) v'(x_0)$ gelten. Also

$$0 = x_0 + v(x_0) v'(x_0) = x_0 + \alpha \cosh\left(\frac{x_0 - 1}{\alpha}\right) \sinh\left(\frac{x_0 - 1}{\alpha}\right).$$

$x \mapsto x + v(x) v'(x)$ ist strikt monoton steigend mit Werten

$$\text{bei } x = 0 : \quad \alpha \cosh\left(-\frac{1}{\alpha}\right) \sinh\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = -\alpha \cosh\left(\frac{1}{\alpha}\right) \sinh\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 0,$$

$$\text{bei } x = 1 : \quad 1 + \alpha \cosh(0) \sinh(0) = 1 > 0.$$

Wegen dem Vorzeichenwechsel und der Monotonie existiert ein eindeutig bestimmtes $x_0 \in (0, 1)$ mit $0 = x_0 + v(x_0) v'(x_0)$. Wir definieren dann folgende Hilfsfunktion durch Aneinanderkleben von v an einen Kreis im Inneren

$$w_\alpha(x) := \begin{cases} v(|x|) & : x_0 \leq |x| \leq 1, \\ \sqrt{x_0^2 + v(x_0)^2 - x^2} & : 0 \leq |x| < x_0. \end{cases}$$

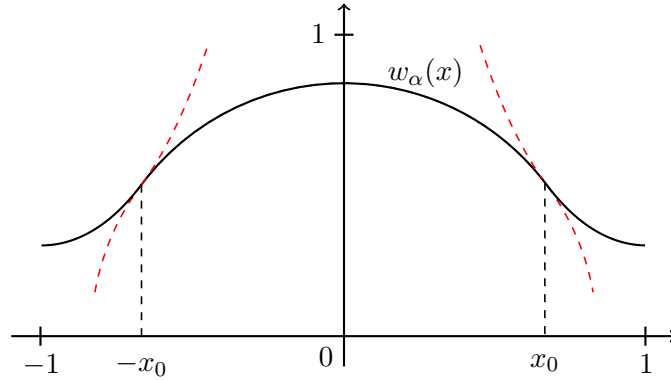


Abb. 3.2: Hilfsfunktion w_α zur Abschätzung von M_α , hier mit $\alpha = 0.3$.

Offensichtlich ist w_α stetig. Nach Konstruktion stimmen die Ableitungen beider aneinandergeklebten Funktionen überein, womit w_α auch stetig differenzierbar ist. Die Ableitungen beider Seiten sind Lipschitz-stetig auf dem jeweiligen Intervall und da w'_α stetig ist, muss dieses auch Lipschitz-stetig sein. Somit haben wir $w_\alpha \in C^{1,1}([-1, 1])$ und nach Konstruktion auch $w_\alpha \in N_\alpha$.

Wir schätzen dann das hyperbolische Willmore-Funktional ab, wobei wir noch beachten, dass $H_{h,w_\alpha} \equiv 0$ auf $(-x_0, x_0)$ ist nach Folgerung 2.23:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_h(w_\alpha) &= \int_{-1}^1 H_{h,w_\alpha}^2 d\mu_{g_h,w_\alpha} = 2 \int_{x_0}^1 H_{h,w_\alpha}^2 d\mu_{g_h,w_\alpha} \\ &= 2 \int_{x_0}^1 \underbrace{\left(\frac{v''(x)}{(1+v'(x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{v(x)\sqrt{1+v'(x)^2}} \right)^2}_{=0} v(x) \sqrt{1+v'(x)^2} dx \\ &\quad + 8 \int_{x_0}^1 \frac{v''(x)}{(1+v'(x)^2)^{3/2}} dx \\ &= 8 \int_{x_0}^1 \frac{v''(x)}{(1+v'(x)^2)^{3/2}} dx = 8 \left[\frac{v'(x)}{\sqrt{1+v'(x)^2}} \right]_{x_0}^1 = -8 \frac{v'(x_0)}{\sqrt{1+v'(x_0)^2}} \end{aligned}$$

$$= -8 \frac{\sinh\left(\frac{x_0-1}{\alpha}\right)}{\cosh\left(\frac{x_0-1}{\alpha}\right)} = 8 \tanh\left(\frac{1-x_0}{\alpha}\right) \leq 8 \tanh\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Im Beweis des letzten Hilfssatzes wurden gleich zwei Tricks verwendet, welche immer wieder auftauchen werden. Der erste Trick ist, Kreissegmente mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung anzukleben. Der zweite Trick ist, links und rechts um „speziellen“ Punkten herum mit dem normalen und hyperbolischen Willmore-Funktional zu rechnen.

Mit dem erstgenannten Trick, angewendet auf Funktionen, welche hinreichend große Funktionswerte annehmen, lässt sich die Willmore-Energie minimieren, sodass man insbesondere eine obere Schranke für Funktionswerte entlang einer Minimalfolge für M_α annehmen kann. Das Resultat wird nicht von entscheidender Bedeutung für die Existenztheorie sein, verdeutlicht aber nochmal die Bedeutung der hyperbolischen Geometrie für das Willmore-Funktional von Rotationsflächen. Im nächsten Kapitel wird die Methode auch bei der Existenztheorie des *Helfrich-Funktional*s für Rotationsflächen auftauchen.

3.6 Hilfssatz

Für $\alpha > 0$ sei $u \in N_\alpha$. Dann gilt

$$(3.2) \quad u(x) \leq \sqrt{1 + \alpha^2 - x^2}, \quad \forall x \in [0, 1],$$

oder es gibt ein $\tilde{u} \in N_\alpha$, sodass $\tilde{u}(x) \leq \sqrt{1 + \alpha^2 - x^2}$ für alle $x \in [0, 1]$ und $\mathcal{W}_h(\tilde{u}) \leq \mathcal{W}_h(u)$.

Beweis: Erfüllt unser $u \in N_\alpha$ Gleichung (3.2), so ist nicht zu zeigen. Sei nun also angenommen dass (3.2) nicht gilt. Wir konstruieren \tilde{u} ähnlich wie die Hilfsfunktion w_α (in Hilfssatz 3.5).

Definiere $r(x) := \sqrt{1 + \alpha^2 - x^2}$ für $x \in [0, 1]$. Da $u(1) = r(1) = \alpha$ und $0 = u'(1) > r'(x)$, gibt es ein maximales Intervall $(x_1, 1)$, mit $x_1 \in (0, 1)$, in dem Sinne, dass $u(x_1) = r(x_1)$ und $u(x) < r(x)$ für alle $x \in (x_1, 1)$, denn nach Voraussetzung ist $\{x \in (0, 1) : u(x) > r(x)\} \neq \emptyset$. Da u stetig differenzierbar ist, muss $u'(x_1) \leq r'(x_1) < 0$ sein. Somit ist

$$\begin{aligned} \text{bei } x = x_1 : & \quad 0 = x_1 + r(x_1)r'(x_1) \geq x_1 + u(x_1)u'(x_1), \\ \text{bei } x = 1 : & \quad 0 = 1 + r(1)r'(1) < 1 + u(1)u'(1) = 1. \end{aligned}$$

Da $[x_1, 1] \ni x \mapsto x + u(x)u'(x)$ stetig ist, muss es ein $x_2 \in [x_1, 1)$ geben ($x_2 = x_1$, und somit insbesondere touchieren, ist auch möglich), sodass $0 = x_2 + u(x_2)u'(x_2)$. Wir sind dann in der gleichen Situation, wie im Beweis von Hilfssatz 3.5 und definieren \tilde{u} dann zu:

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(|x|) & : x_2 \leq |x| \leq 1, \\ \sqrt{x_2^2 + u(x_2)^2 - x^2} & : 0 \leq |x| < x_2. \end{cases}$$

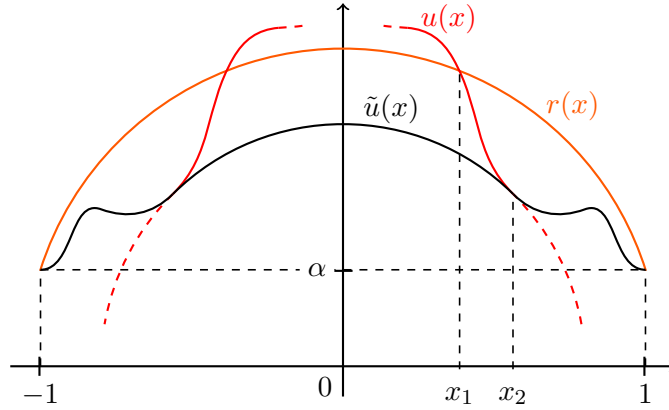


Abb. 3.3: Konstruktion von $\tilde{u}(x)$. x_1 und x_2 können auch zusammenfallen, was insbesondere das Touchieren von u und r impliziert.

Analog ist dann wieder $\tilde{u} \in N_\alpha$ und $\tilde{u}(x) \leq \sqrt{1 + \alpha^2 - x^2}$ für alle $x \in [0, 1]$. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_h(u) &= \int_{-1}^1 H_{h,u}^2 d\mu_{g_h,u} \\
 &= 2 \int_0^{x_2} H_{h,u}^2 d\mu_{g_h,u} + 2 \int_{x_2}^1 H_{h,u}^2 d\mu_{g_h,u} \\
 &\geq 2 \int_{x_2}^1 H_{h,u}^2 d\mu_{g_h,u} \\
 &= \mathcal{W}_h(\tilde{u}),
 \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

Der zweite Trick aus dem Beweis von Hilfssatz 3.5 lässt sich noch auf beliebige Funktionen mit beschränkter Willmore-Energie (für Details, siehe Hilfssatz 3.7) anwenden. Mit dieser „Energimethode“ bekommen wir alle nötigen Abschätzungen, bzw. Schranken, an die Funktionen entlang einer Minimalfolge (welche die angegebene Energieschranke erfüllt), welche wir für den Erfolg der direkten Methode in H_α benötigen (die L^2 -Schranke an die zweiten Ableitungen wird sich daraus ergeben). An dieser Stelle unterscheidet sich die Existenztheorie von den publizierten Vorlagen (siehe [DDG] oder [GGG]) und erlaubt uns eine Verallgemeinerung auf das Helfrich-Funktional. Dabei haben wir uns an [WG] orientiert.

3.7 Hilfssatz

Sei $\alpha > 0$. Dann existieren für alle $\lambda \in (0, 8)$ Konstanten

$$c_1 = c_1(\lambda) := \frac{8 - \lambda}{\sqrt{64 - (8 - \lambda)^2}} > 0$$

und

$$c_2 = c_2(\lambda) := \alpha \exp\left(-4 c_1(\lambda) \sqrt{1 + c_1(\lambda)^2}\right) > 0,$$

sodass für alle $u \in N_\alpha$ mit $\mathcal{W}_h(u) \leq 8 - \lambda$ und für alle $x \in [-1, 1]$ gilt:

$$|u'(x)| \leq c_1, \quad |u(x)| \leq \alpha + c_1, \quad u(x) \geq c_2.$$

Beweis: Sei $\lambda \in (0, 8)$ fest und $u \in N_\alpha$ mit $\mathcal{W}_h(u) \leq 8 - \lambda$. Wir teilen den Beweis in die Teile der Behauptung auf.

Teil 1: Obere Schranke für Ableitung von u .

Sei $x_1 \in [0, 1]$ so, dass $|u'(x_1)| = \max_{x \in [0, 1]} |u'(x)|$. Es reicht dann $|u'(x_1)| \leq c_1$ zu zeigen. Ist $u'(x_1) < 0$, so schätzen wir $\mathcal{W}_h(u)$ ab, indem wir links von x_1 mithilfe des hyperbolischen und rechts davon mithilfe des normalen Willmore-Funktionalen rechnen:

$$\begin{aligned} 8 - \lambda &\geq \mathcal{W}_h(u) \\ &= \int_{-1}^1 H_{h,u}^2 d\mu_{g_{h,u}} \\ &= 2 \int_0^{x_1} H_{h,u}^2 d\mu_{g_{h,u}} + 2 \int_{x_1}^1 H_{h,u}^2 d\mu_{g_{h,u}} \\ &\stackrel{2.20}{=} 2 \int_0^{x_1} H_{h,u}^2 d\mu_{g_{h,u}} + \frac{4}{\pi} \int_{x_1}^1 H_u^2 d\mu_{g_u} + 8 \left[\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right]_{x_1}^1 \\ &\geq -8 \frac{u'(x_1)}{\sqrt{1 + u'(x_1)^2}}. \end{aligned}$$

Quadrieren beider Seiten liefert dann

$$(3.3) \quad (8 - \lambda)^2 \geq 64 \frac{u'(x_1)^2}{1 + u'(x_1)^2}.$$

Die gleiche Ungleichung bekommen wir im Fall $u'(x_1) \geq 0$, wenn wir $\mathcal{W}_h(u)$ abschätzen, indem wir links von x_1 mit dem normalen und rechts davon mit dem hyperbolischen Willmore-Funktional rechnen:

$$\begin{aligned} 8 - \lambda &\geq \mathcal{W}_h(u) \\ &= \int_{-1}^1 H_{h,u}^2 d\mu_{g_{h,u}} \\ &= 2 \int_0^{x_1} H_{h,u}^2 d\mu_{g_{h,u}} + 2 \int_{x_1}^1 H_{h,u}^2 d\mu_{g_{h,u}} \\ &\stackrel{2.20}{=} \frac{4}{\pi} \int_0^{x_1} H_u^2 d\mu_{g_u} + 8 \left[\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right]_0^{x_1} + 2 \int_{x_1}^1 H_{h,u}^2 d\mu_{g_{h,u}} \\ &\geq 8 \frac{u'(x_1)}{\sqrt{1 + u'(x_1)^2}}. \end{aligned}$$

Das Umstellen von Gleichung (3.3) liefert dann

$$|u'(x_1)| \leq \frac{8 - \lambda}{\sqrt{64 - (8 - \lambda)^2}} \stackrel{\text{def}}{=} c_1.$$

Teil 2: Obere Schranke für u .

Die obere Schranke an u erhalten wir direkt durch Integration der oberen Schranke der Ableitung von u aus Teil 1:

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left| u(1) - \int_x^1 u'(x) dx \right| \\
&\leq |u(1)| + \left| \int_x^1 u'(x) dx \right| \\
&\leq \alpha + \int_x^1 |u'(x)| dx \\
&\leq \alpha + c_1 (1 - x) \\
&\leq \alpha + c_1,
\end{aligned}$$

für alle $x \in [0, 1]$ und wegen der Spiegelsymmetrie von u auch für alle $x \in [-1, 1]$.

Teil 3: Untere Schranke für u .

Für $x \in [0, 1]$ schätzen wir folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned}
-\log u(x) &= \log u(1) - \log u(x) - \log u(1) \\
&= \int_x^1 \frac{u'(y)}{u(y)} dy - \log \alpha \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{u'(x)}{u(x)} \right| dx - \log \alpha \\
&\stackrel{\text{Teil 1}}{\leq} c_1 \sqrt{1 + c_1^2} \int_0^1 \frac{1}{u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2}} dx - \log \alpha \\
&\leq c_1 \sqrt{1 + c_1^2} \left(\int_0^1 \left(\frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2}} \right)^2 u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx \right. \\
&\quad \left. - 2 \int_0^1 \frac{u''}{(1 + u'^2)^{3/2}} dx \right) - \log \alpha \\
&= c_1 \sqrt{1 + c_1^2} \left(\frac{1}{2} \mathcal{W}_h(u) - 2 \left[\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \right]_0^1 \right) - \log \alpha \\
&= \frac{c_1}{2} \sqrt{1 + c_1^2} \mathcal{W}_h(u) - \log \alpha \\
&\leq 4 c_1 \sqrt{1 + c_1^2} - \log \alpha,
\end{aligned}$$

also

$$u(x) \geq \exp \left(-4 c_1 \sqrt{1 + c_1^2} + \log \alpha \right) = \alpha \exp \left(-4 c_1 \sqrt{1 + c_1^2} \right) \stackrel{\text{def}}{=} c_2 > 0.$$

Die Symmetrie von u liefert die Abschätzung dann wieder für alle $x \in [-1, 1]$. □

Wir haben nun alle notwendigen Abschätzungen für den Existenzsatz und können damit eine Minimalfolge finden, welche in $H^2(-1,1)$ beschränkt ist. Die schwache Folgenkompaktheit von H^2 liefert uns einen Minimierer $u \in N_\alpha$ für M_α . Dieses u ist glatt und die von u erzeugte Rotationsfläche ist somit eine Willmore-Fläche. Wir fassen dies im folgenden Existenzsatz zusammen (vergleiche auch mit [DDG, Theorem 3.9]):

3.8 Satz (Existenz eines Minimierers von \mathcal{W}_h)

Für alle $\alpha > 0$ existiert eine Funktion $u \in H_\alpha$, sodass

$$\mathcal{W}_h(u) = M_\alpha = \inf_{v \in N_\alpha} \mathcal{W}_h(v) = \inf_{v \in H_\alpha} \mathcal{W}_h(v).$$

Es ist sogar $u \in C^\infty([-1,1])$, sodass insbesondere auch $u \in N_\alpha$ und u löst die hyperbolische Willmore-Gleichung (hWG).

Beweis: Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset N_\alpha$ eine Minimalfolge für M_α , d. h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}_h(u_k) = \inf_{u \in N_\alpha} \mathcal{W}_h(u) = M_\alpha.$$

Durch Modifizierung dieser können wir nach Hilfssatz 3.5 annehmen, dass $\mathcal{W}_h(u_k) \leq 8 - \lambda$ für ein $\lambda \in (0,8)$. Hilfssatz 3.7 liefert uns Konstanten $c_1 = c_1(\lambda) > 0$ und $c_2 = c_2(\lambda) > 0$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [-1,1]$ gilt:

$$|u'_k(x)| < c_1, \quad u_k(x) \leq \alpha + c_1, \quad u_k(x) \geq c_2.$$

Damit können wir dann folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} 8 - \lambda &\geq \mathcal{W}_h(u_k) \\ &= \int_{-1}^1 H_{h,u_k}^2 d\mu_{g_{h,u_k}} \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{u_k(x) u''_k(x)}{(1 + u'_k(x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + u'_k(x)^2}} \right)^2 \frac{\sqrt{1 + u'_k(x)^2}}{u_k(x)} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{u_k(x) u''_k(x)^2}{(1 + u'_k(x)^2)^{5/2}} dx + 2 \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{u''_k(x)}{(1 + u'_k(x)^2)^{3/2}} dx}_{\left[\frac{u'_k(x)}{\sqrt{1 + u'_k(x)^2}} \right]_{-1}^1 = 0} + \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{u_k(x) \sqrt{1 + u'_k(x)^2}} dx}_{\geq 0} \\ &\geq \frac{c_2}{(1 + c_1^2)^{5/2}} \int_{-1}^1 u''_k(x)^2 dx \\ &= \frac{c_2}{(1 + c_1^2)^{5/2}} \|u''_k\|_{L^2(-1,1)}^2. \end{aligned}$$

Damit ist $\|u''_k\|_{L^2(-1,1)}$ gleichmäßig von oben beschränkt und mit den L^2 -Schranken an u_k und u'_k insbesondere auch $\|u_k\|_{H^2(-1,1)}$. $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist also beschränkte Folge in $H^2(-1,1)$. Nach Satz

1.1 finden wir dann, nach Auswahl einer Teilfolge, ein $u \in H^2(-1, 1)$, sodass

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } H^2(-1, 1).$$

Mit der Kompaktheit der Einbettung $H^2(-1, 1) \xrightarrow{c} C^1([-1, 1])$ (siehe Satz 1.4) haben wir insbesondere

$$u_k \rightarrow u \text{ in } C^1([-1, 1]).$$

Damit ist dann auch u positiv, symmetrisch, $u(1) = \alpha$ und $u'(1) = 0$, also $u \in H_\alpha$. Mit der schwachen Unterhalbstetigkeit von \mathcal{W}_h in H_α (siehe Satz 3.2) haben wir dann

$$M_\alpha \stackrel{\text{Folg. 3.4}}{\leq} \mathcal{W}_h(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}_h(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}_h(u_k) = M_\alpha,$$

also Gleichheit überall. u minimiert \mathcal{W}_h damit in der Klasse H_α und löst die Differentialgleichung (hWG) schwach.

Man kann zusätzlich noch zeigen, dass $u \in C^\infty([-1, 1])$. Einen Beweis dazu liest man in [DDG, Theorem 3.9] oder [Sch, Kapitel 6.8] nach. Damit ist u auch eine klassische Lösung von (hWG). \square

3.9 Bemerkung

Der Beweis des Existenzsatzes 3.8 zeigt, dass, abgesehen von der Energieschranke $\mathcal{W}_h(u_k) < 8$, die beiden Schranken

$$|u'_k(x)| < c_1, \quad u_k(x) \geq c_2, \quad \text{für } x \in [-1, 1],$$

die wichtigen sind! Die oberen Schranken an die u_k , sowie deren zweite Ableitungen, folgten unmittelbar daraus. \blacksquare

4 Das Helfrich-Funktional für Rotationsflächen und Existenz rotationssymmetrischer Helfrich-Flächen

Wie in der Einleitung bereits beschrieben, bilden Flächen- und Willmore-Funktional Modelle um Membranen mit bestimmten Eigenschaften zu beschreiben. Physikalisch interessanter und realistischer sind allerdings Modelle, welche Fläche *und* Krümmung modellieren. Das Helfrich-Funktional ist ein solches Beispiel, bei dem wir zum Willmore-Funktional einfach noch das mit einem Vorfaktor gewichtete Flächenfunktional dazu addieren. Wir wollen hier wieder kritische Punkte des Helfrich-Funktional in der Klasse der Rotationsflächen suchen. Es zeigt sich, dass die Methode, welche wir beim Willmore-Funktional angewendet haben, auch für das Helfrich-Funktional funktioniert, wenn der Flächenanteil einen relativ geringen Anteil besitzt.

4.1 Das Helfrich-Funktional

4.1 Definition (Helfrich-Funktional)

Seien (\mathcal{M}^m, g) , $(\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f: (\mathcal{M}^m, g) \rightarrow (\mathcal{N}^n, \tilde{g})$ eine isometrische Immersion. Für $\varepsilon \geq 0$ definieren wir das **Helfrich-Funktional** \mathcal{H}_ε als Summe des Willmore-Funktional \mathcal{W} (siehe Definition 2.1) und dem mit ε gewichteten Flächenfunktional \mathcal{A} (siehe 2.7)

$$\mathcal{H}_\varepsilon(f) := \mathcal{W}(f) + \varepsilon \mathcal{A}(f) = \int_{\mathcal{M}^m} |\vec{H}|^2 d\mu_g + \varepsilon \int_{\mathcal{M}^m} d\mu_g.$$

Analog zum Willmore-Funktional kann man wieder die erste Variation von \mathcal{H}_ε berechnen. Da bereits die ersten Variationen vom Willmore-Funktional und des Flächen-Funktional bekannt sind (siehe Hilfssatz 2.4 und Abschnitt 2.7), erhält man die erste Variation des Helfrich-Funktional durch Addition beider. Unter einer **Helfrich-Immersion** (bzw. **Helfrich-Fläche** für $m = 2$) verstehen wir wieder die kritischen Punkte von \mathcal{H}_ε , sodass

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}_\varepsilon(f_t) \Big|_{t=0} = 0,$$

bezüglich einer vorgegebenen Menge von Variationen von $f = f_0$. Bei dem Analogon von Hilfssatz 2.6 für Helfrich-Flächen erhalten wir die Euler-Lagrange-Gleichung für das Helfrich-Funktional von Hyperflächen in Räumen konstanter Krümmung einfach durch Addition von $-\varepsilon m H$.

Wir wollen uns hier jetzt wieder auf Rotationsflächen konzentrieren, sodass wir uns dann im nächsten Kapitel wieder mit der Existenz von Helfrich-Flächen in einer speziellen Klasse von Rotationsflächen beschäftigen können. Wir nutzen wieder die gleiche Notation, wie in Definition 2.8, sowie die Resultate der darauf folgenden Abschnitte.

4.2 Folgerung (Helfrich-Funktional für Rotationsflächen)

Das Helfrich-Funktional einer Rotationsfläche $f_u: \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon(f_u) &= \frac{\pi}{2} \int_a^b \left(\frac{1}{u(x) \sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} \right)^2 u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} dx \\ &\quad + 2\pi\varepsilon \int_a^b u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} dx. \end{aligned}$$

Beweis: Kombiniere Folgerung 2.12 mit

$$\mathcal{A}(f_u) = \int_{\mathcal{M}^2} d\mu_{g_u} = 2\pi \int_a^b \sqrt{G_u(x)} dx = 2\pi \int_a^b u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} dx.$$

□

4.3 Satz (Helfrich-Gleichung für Rotationsflächen)

Eine Helfrich-Immersion $f: \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ erfüllt mit den in Hilfssatz 2.6 beschriebenen zulässigen Variationen von f die Helfrich-Gleichung

$$\Delta_g H + 2H(H^2 - K) - 2\varepsilon H = 0, \quad \text{auf } \mathcal{M}^2.$$

Insbesondere erfüllen Helfrich-Immersionen als Rotationsflächen die Helfrich-Gleichung

$$\begin{aligned} \text{(HGR)} \quad & \frac{1}{u(x) \sqrt{1+u'(x)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{u(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} H'_u(x) \right) \\ & + \frac{1}{2} H_u(x) \left(\frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{u(x) \sqrt{1+u'(x)^2}} \right)^2 - 2\varepsilon H_u(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b). \end{aligned}$$

Beweis: Kombiniere die ersten Variationen von \mathcal{W} (Hilfssatz 2.4) und \mathcal{A} (Abschnitt 2.7) um erste Variation von \mathcal{H}_ε herzuleiten (wie bereits zuvor beschrieben). Beweise dann Hilfssatz 2.6 für das Helfrich-Funktional, um diesen dann, analog zu Satz 2.13, auszuwerten. □

4.2 Existenz rotationssymmetrischer Helfrich-Flächen

Wie in Kapitel §3 wollen wir hier wieder die Existenz eines Minimierers in der Klasse der Rotationsflächen zeigen, allerdings jetzt für das Helfrich-Funktional. Wir stellen fest, dass wir mit ganz ähnlichen Methoden wie dort arbeiten können, bzw. diese sogar anwenden können. Allerdings können wir dabei nicht erwarten, dass wir mit unseren Methoden für jedes ε , insbesondere für große Anteile des Flächen-Funktionals im Helfrich-Funktional, einen solchen Minimierer finden werden. Entscheidend für die Übersetzung der dort verwendeten Methoden ist die Beobachtung, dass wir die hyperbolische Willmore-Energie der Hilfsfunktion w_α mit $\mathcal{W}_h(w_\alpha) \leq 8 \tanh\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ abgeschätzt haben (siehe Hilfssatz 3.5). Benutzt haben wir im Verlauf allerdings nur, dass

$\mathcal{W}_h(w_\alpha) < 8$. Das heißt, wir haben noch etwas Luft, welche wir in den Flächenterm reinstecken können. Für kleine ε können wir erwarten, dass die Methode erfolgreich sein kann. Diese Beobachtung geht zurück auf [WG].

Variieren wollen wir wieder in den gleichen Klassen wie in Kapitel §3, d. h. es bezeichne wieder

$$N_\alpha = \{u \in C^{1,1}([-1, 1]) : u \text{ ist gerade und positiv, } u(1) = \alpha, u'(1) = 0\},$$

und

$$H_\alpha = \{u \in H^2(-1, 1) : u \text{ ist gerade und positiv, } u(1) = \alpha, u'(1) = 0\}.$$

Weiterhin verstehen wir hier wieder $\mathcal{H}_\varepsilon, \mathcal{W}, \mathcal{A}$ als Funktionale auf H_α (also auch auf N_α), also $\mathcal{W}(u) := \mathcal{W}(f_u)$, $\mathcal{A}(u) := \mathcal{A}(f_u)$, $\mathcal{H}_\varepsilon(u) := \mathcal{H}_\varepsilon(f_u) = \mathcal{W}(u) + \varepsilon \mathcal{A}(u)$ und vergessen die ursprüngliche Notation um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden.

Analog zu Satz 3.2 und Folgerung 3.4 haben wir auch schwache Unterhalbstetigkeit und Stetigkeit von \mathcal{H}_ε in H_α :

4.4 Satz (Schwache Folgen-Unterhalbstetigkeit von \mathcal{H}_ε in H_α)

Für alle $\alpha > 0$ und alle $\varepsilon > 0$ ist $\mathcal{H}_\varepsilon: H_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ schwach folgen-unterhalbstetig in der H^2 -Topologie, d. h. für alle Folgen $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H_\alpha$ mit $u_k \rightharpoonup u \in H^2(-1, 1)$ für ein $u \in H_\alpha$ gilt

$$\mathcal{H}_\varepsilon(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\varepsilon(u_k).$$

Beweis: Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H_\alpha$ mit $u_k \rightharpoonup u \in H^2(-1, 1)$ und $u \in H_\alpha$. Wir müssen dann zeigen, dass

$$\mathcal{H}_\varepsilon(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\varepsilon(u_k) = \liminf_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{W}(u_k) + \varepsilon \mathcal{A}(u_k)).$$

Nach Hilfssatz 3.2 ist $u \mapsto \mathcal{W}_h(u)$ schwach unterhalbstetig in H_α , somit insbesondere auch $u \mapsto \mathcal{W}(u)$ (da $\mathcal{W}(u) = \frac{\pi}{2} \mathcal{W}_h(u)$ auf H_α nach Satz 2.20). Also bleibt noch die schwache Unterhalbstetigkeit von $u \mapsto \mathcal{A}(u)$ in H_α zu zeigen. Wie in Teil (ii) des Beweises von Hilfssatz 3.2 haben wir nach Auswahl einer Teilfolge wegen der Kompaktheit der Einbettungen $H^2(-1, 1) \xrightarrow{c} H^1(-1, 1)$ (siehe Satz 1.3) und $H^2(-1, 1) \xrightarrow{c} C^1([-1, 1])$ (siehe Satz 1.4)

$$u_k \rightarrow u \text{ in } H^1(-1, 1) \quad \text{und} \quad u_k \rightarrow u \text{ in } C^1([-1, 1]),$$

und können ohne Einschränkung annehmen, dass $\|u_k\|_{L^\infty}, \|u'_k\|_{L^2} \leq C < \infty$ für ein $C > 0$, welches unabhängig von $k \in \mathbb{N}$ ist. Wir rechnen:

$$\frac{1}{2\pi} |\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(u_k)|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{-1}^1 u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} dx - \int_{-1}^1 u_k(x) \sqrt{1+u'_k(x)^2} dx \right| \\
&\leq \int_{-1}^1 \left| u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} - u_k(x) \sqrt{1+u'_k(x)^2} \right| dx \\
&\leq \int_{-1}^1 \left| (u(x) - u_k(x)) \sqrt{1+u'(x)^2} \right| dx + \int_{-1}^1 u_k(x) \left| \sqrt{1+u'(x)^2} - \sqrt{1+u'_k(x)^2} \right| dx \\
&\leq \|u - u_k\|_{L^2} \underbrace{\left\| \sqrt{1+u'^2} \right\|_{L^2}}_{=\sqrt{1+\|u'\|_{L^2}^2} \leq C} + \underbrace{\|u_k\|_{L^\infty}}_{\leq C} \int_{-1}^1 |u'(x)^2 - u'_k(x)^2| \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+u'^2} + \sqrt{1+u'_k{}^2}}}_{\leq \frac{1}{2}} dx \\
&\leq C \left(\|u - u_k\|_{L^2} + \|u' - u'_k\|_{L^2} \underbrace{\|u' + u'_k\|_{L^2}}_{\leq C} \right) \\
&\leq C \|u - u_k\|_{H^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Damit ist $u \mapsto \mathcal{A}(u)$ schwach stetig, also insbesondere auch schwach unterhalbstetig. Das zeigt die schwache Unterhalbstetigkeit von \mathcal{H}_ε in H_α . \square

4.5 Satz (Stetigkeit von \mathcal{H}_ε in H_α)

Für alle $\alpha > 0$ und alle $\varepsilon > 0$ ist $\mathcal{H}_\varepsilon: H_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in der H^2 -Topologie, d. h. für alle Folgen $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H_\alpha$ mit $u_k \rightarrow u \in H^2(-1, 1)$ für ein $u \in H_\alpha$ gilt

$$\mathcal{H}_\varepsilon(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\varepsilon(u_k).$$

Beweis: Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H_\alpha$ gegeben mit $u_k \rightarrow u \in H^2(-1, 1)$ für ein $u \in H_\alpha$. Wir müssen dann zeigen, dass

$$\mathcal{H}_\varepsilon(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}_\varepsilon(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{W}(u_k) + \varepsilon \mathcal{A}(u_k)).$$

Aus Folgerung 3.4 wissen wir, dass $u \mapsto \mathcal{W}_h(u)$ stetig ist, also insbesondere auch $u \mapsto \mathcal{W}(u)$ (wieder nach Satz 2.20). Also bleibt nur noch die Stetigkeit von $u \mapsto \mathcal{A}(u)$ in H_α zu zeigen. In Satz 4.4 haben wir allerdings gezeigt, dass $u \mapsto \mathcal{A}(u)$ sogar schwach stetig ist. Insbesondere ist \mathcal{A} damit auch stetig in der H^2 -Topologie auf H_α . \square

Wir definieren das Infimum des Helfrich-Funktionalen auf N_α durch

$$M_\alpha^\varepsilon = \inf \{ \mathcal{H}_\varepsilon(u) : u \in N_\alpha \}.$$

Auch hier können wir mit dem Dichtheitsresultat aus Hilfssatz 3.1 und der Stetigkeit von \mathcal{H}_ε auf H_α zeigen, dass es egal ist, ob das Infimum M_α^ε über N_α oder H_α gebildet wird.

4.6 Folgerung

Es gilt insbesondere auch wieder

$$M_\alpha^\varepsilon = \inf \{ \mathcal{H}_\varepsilon(u) : u \in H_\alpha \}.$$

Beweis: Der Beweis ist analog zu dem von Folgerung 3.4. Nach Hilfssatz 3.1 ist N_α dicht in H_α bzgl. der H^2 -Topologie. Für $u \in H_\alpha$ wählen wir also eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset N_\alpha$ mit $u_k \rightarrow u$ in $H^2(-1, 1)$. Nach Folgerung 4.5 ist \mathcal{H}_ε in H_α stetig, also

$$M_\alpha^\varepsilon \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\varepsilon(u_k) = \mathcal{H}_\varepsilon(u),$$

also

$$M_\alpha^\varepsilon = \inf_{u \in N_\alpha} \mathcal{H}_\varepsilon(u) \geq \inf_{u \in H_\alpha} \mathcal{H}_\varepsilon(u) \geq M_\alpha^\varepsilon,$$

somit Gleichheit überall. \square

Im Folgenden versuchen wir mit einer ähnlichen Strategie wie beim Willmore-Funktional in Kapitel §3 geeignete Schranken für eine Minimalfolge zu finden, sodass wir wie in Satz 3.8 die Existenz eines Minimierers von \mathcal{H}_ε in N_α bzw. H_α nachweisen können. Wie bereits erwähnt, gelingt dies, mit der hier verwendeten Methode, nicht für alle Anteile des Flächenfunktionals. Der folgende Hilfssatz hilft uns dabei einzuschätzen, wie groß der Anteil an Fläche sein darf, den wir in das Helfrich-Funktional stecken dürfen.

4.7 Hilfssatz

Für $\alpha > 0$ sei $u \in N_\alpha$. Dann gilt

$$(4.1) \quad \mathcal{A}(u) = 2\pi \int_{-1}^1 u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx < 4\pi(1 + \alpha)^2 + 4\pi,$$

oder es gibt ein $\tilde{u} \in N_\alpha$, sodass

$$\mathcal{W}(\tilde{u}) \leq \mathcal{W}(u), \quad \mathcal{A}(\tilde{u}) < 4\pi(1 + \alpha)^2 + 4\pi,$$

also insbesondere $\mathcal{H}_\varepsilon(\tilde{u}) \leq \mathcal{H}_\varepsilon(u)$.

Beweis: Ist (4.1) erfüllt, so ist nichts mehr zu zeigen. Wir nehmen also an, dass (4.1) nicht gilt und konstruieren ein \tilde{u} analog zu Hilfssatz 3.6. Dazu müssen wir ein $x_0 \in (0, 1)$ finden, sodass $0 = x_0 + u(x_0)u'(x_0)$. Es bezeichne auch wieder $r(x) := \sqrt{1 + \alpha^2 - x^2}$ für $x \in [0, 1]$. Da $0 < 1 + u(1)u'(1) = 1$ und $u(1) = r(1)$, können wir uns auf die folgenden drei Fälle beschränken:

1. Fall: Es sei angenommen, dass $0 < x + u(x)u'(x)$ und $u(x) \leq r(x)$ für alle $x \in (0, 1)$.

Hier wird gezeigt, dass dieser Fall entfällt. Dazu beobachte, dass $u \leq r \leq \sqrt{1 + \alpha^2}$ und damit für alle $x \in (0, 1)$

$$0 < x + u(x) u'(x) \leq 1 + \sqrt{1 + \alpha^2} u'(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) > -\frac{x}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Wir rechnen weiter

$$\begin{aligned} 0 &< u(0) \\ &= u(1) - \int_0^1 u'(x) dx \\ &= \alpha - \int_{\{x \geq 0: u'(x) \leq 0\}} u'(x) dx - \int_{\{x \geq 0: u'(x) > 0\}} u'(x) dx \\ &< \alpha + \int_{\{x \geq 0: u'(x) \leq 0\}} \frac{x}{\sqrt{1 + \alpha^2}} dx - \int_{\{x \geq 0: u'(x) > 0\}} u'(x) dx \\ &\leq \alpha + \frac{1}{2\sqrt{1 + \alpha^2}} - \int_{\{x \geq 0: u'(x) > 0\}} u'(x) dx, \end{aligned}$$

also

$$(4.2) \quad \int_{\{x \geq 0: u'(x) > 0\}} u'(x) dx < \alpha + \frac{1}{2\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Weiter ist dann

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx &\leq \int_{-1}^1 u(x) (1 + |u'(x)|) dx \\ &\leq \sqrt{1 + \alpha^2} \left[\int_{-1}^1 1 dx + \int_{-1}^1 |u'(x)| dx \right] \\ &= \sqrt{1 + \alpha^2} \left[2 + 2 \int_{\{x \geq 0: u'(x) > 0\}} u'(x) dx + 2 \int_{\{x \geq 0: u'(x) \leq 0\}} (-u'(x)) dx \right] \\ &\stackrel{(4.2)}{<} \sqrt{1 + \alpha^2} \left[2 + 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + 2 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 + \alpha^2}} dx \right] \\ &= \sqrt{1 + \alpha^2} \left[2 + 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right] \\ &= 2\sqrt{1 + \alpha^2} (1 + \alpha) + 2 \\ &< 2(1 + \alpha)^2 + 2. \end{aligned}$$

Und somit ist $\mathcal{A}(u) < 4\pi(1 + \alpha)^2 + 4\pi$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit entfällt dieser Fall!

2. Fall: Es sei angenommen, es gibt ein $x_1 \in (0, 1)$, so dass $0 \geq x_1 + u(x_1) u'(x_1)$, und $u(x) \leq r(x)$ für alle $x \in (0, 1)$.

Wir können hier direkt die Stetigkeit von $x \mapsto x + u(x)u'(x)$ ausnutzen und da $x_1 + u(x_1)u'(x_1) \leq 0 < 1 = 1 + u(1)u'(1)$, finden wir ein $x_0 \in (0, 1)$, sodass $0 = x_0 + u(x_0)u'(x_0)$ und $u(x_0) \leq r(x_0)$, nach Voraussetzung. Wir können zusätzlich noch annehmen, dass es kein $x'_0 > x_0$ gibt mit $0 = x'_0 + u(x'_0)u'(x'_0)$, da $\{x \in (0, 1) : 0 = x + u(x)u'(x)\}$ als kompakte Menge ein Maximum besitzen muss. Analog zu Hilfssatz 3.6 konstruieren wir wieder:

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} v(|x|) & : x_0 \leq |x| \leq 1, \\ \sqrt{x_0^2 + u(x_0)^2 - x^2} & : 0 \leq |x| < x_0. \end{cases}$$

Es ist $\tilde{u} \in N_\alpha$ und $\tilde{u}(x) \leq r(x)$ für alle $x \in [0, 1]$. Analog erhalten wir auch $\mathcal{W}_h(\tilde{u}) \leq \mathcal{W}_h(u)$, also auch $\mathcal{W}(\tilde{u}) \leq \mathcal{W}(u)$ (siehe Satz 2.20). Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{A}(\tilde{u}) < 4\pi(1 + \alpha^2) + 4\pi$ ist. Damit folgt automatisch $\mathcal{A}(\tilde{u}) < \mathcal{A}(u)$ aus der Voraussetzung.

Dies ist allerdings evident, da wir nun für \tilde{u} haben, dass

$$0 \leq x + \tilde{u}(x)\tilde{u}'(x), \quad \forall x \in (0, 1).$$

Die gleiche Rechnung wie im ersten Fall zeigt dann $\mathcal{A}(\tilde{u}) < 4\pi(1 + \alpha)^2 + 4\pi$.

3. Fall: Es sei angenommen, es gibt ein $x_1 \in (0, 1)$, sodass $u(x_1) > r(x_1)$.

Wir sind hier wieder in dem Fall von Hilfssatz 3.6 und finden analog dazu wieder ein $x_0 \in (0, 1)$, sodass $0 = x_0 + u(x_0)u'(x_0)$ und $u(x_0) \leq r(x_0)$. Wie im zweiten Fall können wir zusätzlich annehmen, dass es kein $x'_0 > x_0$ gibt mit $0 = x'_0 + u(x'_0)u'(x'_0)$. Definieren wir unser \tilde{u} genau wie dort, sind wir in exakt der gleichen Situation, haben also $\tilde{u} \in N_\alpha$, $\tilde{u}(x) \leq r(x)$ für alle $x \in [0, 1]$, $\mathcal{W}(\tilde{u}) \leq \mathcal{W}(u)$ und $\mathcal{A}(\tilde{u}) < 4\pi(1 + \alpha)^2 + 4\pi \leq \mathcal{A}(u)$. \square

4.8 Bemerkung (i) Die gefundene obere Schranke ist gerechtfertigt dadurch, dass wir für kleine α Funktionen finden können, welche fast den Flächeninhalt $4\pi(1 + \alpha)^2 + 4\pi$ besitzen und den ersten Fall erfüllen.

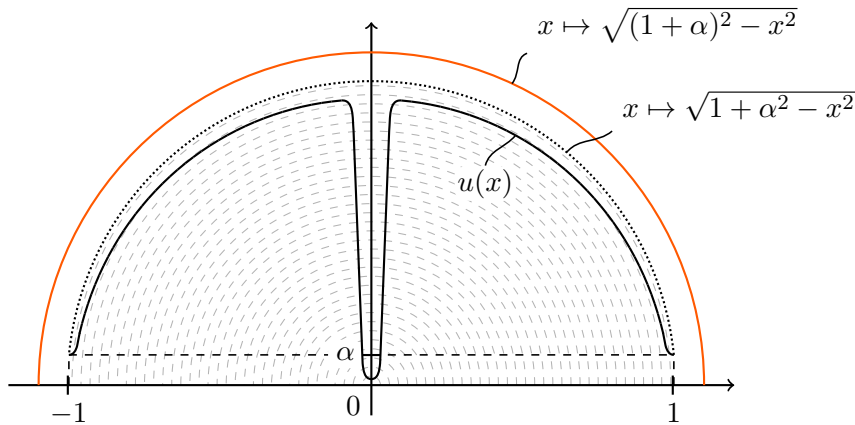


Abb. 4.1: Die Funktion u realisiert fast den Flächeninhalt $\mathcal{A} = 4\pi(1 + \alpha)^2 + 4\pi$. Dabei tangiert sie in $(0, 1)$ keinen Kreis mit Mittelpunkt 0 und liegt strikt unterhalb von $x \mapsto \sqrt{1 + \alpha^2 - x^2}$.

- (ii) Der Beweis zeigt insbesondere auch, dass im Fall $\mathcal{A}(u) \geq 4\pi(1+\alpha)^2 + 4\pi$, das neu konstruierte \tilde{u} die gleiche obere Schranke wie in Hilfssatz 3.6 besitzt, also

$$\tilde{u}(x) \leq \sqrt{1+\alpha^2-x^2}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Für den Fall $\mathcal{A}(u) < 4\pi(1+\alpha)^2 + 4\pi$ können wir diese Schranke a priori nicht erwarten, wie das Beispiel in Bild 4.2 zeigt.

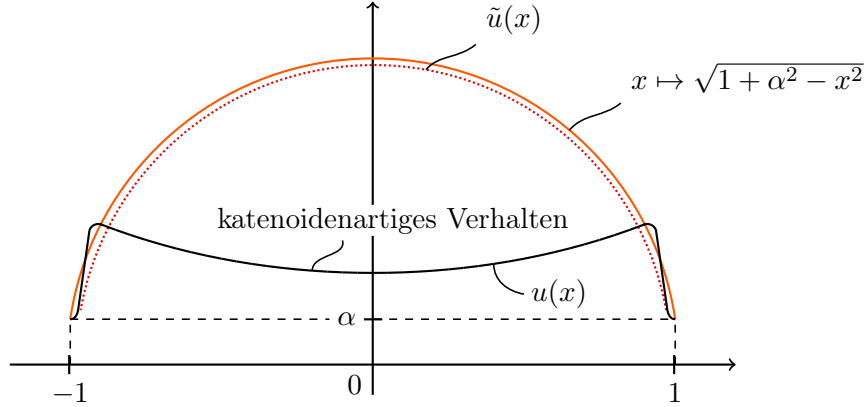


Abb. 4.2: Eine Funktion u , welche eine Fläche $\mathcal{A}(u) < 4\pi(1+\alpha)^2 < 4\pi(1+\alpha)^2 + 4\pi$ hat, aber $u(x) > \sqrt{1+\alpha^2-x^2}$ für ein $x \in (0, 1)$. Die durch „Ankleben“ eines Kreises konstruierte Funktion \tilde{u} (vgl. Hilfssatz 3.6) vergrößert die Fläche, also $\mathcal{A}(\tilde{u}) > \mathcal{A}(u)$.

Durch „Ankleben“ von Kreisen kann sich Fläche also vergrößern. Das Willmore-Funktional wird sich aber immer verringern. Wie auch im letzten Kapitel, wird die so konstruierte obere Schranke nicht von entscheidender Bedeutung sein. ■

Um Hilfssatz 3.7 auf das Helfrich-Funktional anwenden zu können, müssen wir garantieren, dass es eine Minimalfolge $(u_k)_k \subset H_\alpha$ für M_α^ε gibt mit $\mathcal{W}(u_k) < 4\pi$. Hinreichend dafür ist es $\mathcal{H}_\varepsilon(w_\alpha) < 4\pi$ zu haben, was erfordert, dass wir das ε hinreichend klein wählen müssen. Das heißt, wir können das Energiepolster von $4\pi - \mathcal{W}(w_\alpha)$ noch in den Flächenanteil, also dem ε , packen. Um den Flächenanteil dafür abschätzen zu können, müssen wir $\mathcal{A}(w_\alpha)$ abschätzen. Dies kann man direkt machen. Wir wollen hier allerdings den bereits bewiesenen Hilfssatz 4.7 verwenden.

4.9 Folgerung

Für $\alpha > 0$ und $\varepsilon < \frac{1-\tanh(\alpha^{-1})}{(1+\alpha)^2+1}$ ist M_α^ε nach oben beschränkt durch

$$M_\alpha^\varepsilon < 4\pi.$$

Beweis: Wir nutzen die im Beweis von Hilfssatz 3.5 explizit konstruierte Hilfsfunktion $w_\alpha \in N_\alpha$. Dort hatten wir gefunden, dass

$$\mathcal{W}_h(w_\alpha) \leq 8 \tanh\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

also insbesondere

$$\mathcal{W}(w_\alpha) \leq 4\pi \tanh\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Ohne $\mathcal{A}(w_\alpha)$ explizit berechnen zu wollen, versuchen wir $\mathcal{A}(w_\alpha)$ mithilfe von Hilfssatz 4.7 abzuschätzen. Laut diesem Hilfssatz existiert eine Funktion $\tilde{w}_\alpha \in N_\alpha$ mit $\mathcal{W}(\tilde{w}_\alpha) \leq \mathcal{W}(w_\alpha)$ und $\mathcal{A}(\tilde{w}_\alpha) < 4\pi(1 + \alpha)^2 + 4\pi$ (eventuell ist sogar $\tilde{w}_\alpha = w_\alpha$), für welches wir $\mathcal{H}_\varepsilon(\tilde{w}_\alpha)$ abschätzen können zu

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon(\tilde{w}_\alpha) &= \mathcal{W}(\tilde{w}_\alpha) + \varepsilon \mathcal{A}(\tilde{w}_\alpha) \\ &< \mathcal{W}(w_\alpha) + 4\pi\varepsilon((1 + \alpha)^2 + 1) \\ &< 4\pi \tanh(\alpha^{-1}) + 4\pi(1 - \tanh(\alpha^{-1})) \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Es scheint so, als habe Hilfssatz 4.7 nur den Sinn, dass wir vermeiden, explizit den Flächeninhalt der von w_α generierten Fläche zu berechnen und abzuschätzen. Durch direktes Abschätzen ließe sich ε eventuell sogar noch vergrößern. Dies ist allerdings nicht von wesentlichem Interesse. Wichtig ist, dass die Methode überhaupt für hinreichend kleine ε funktioniert. Andererseits liefert uns Hilfssatz 4.7 ein allgemeineres Resultat als alleine eine Abschätzung von $\mathcal{A}(w_\alpha)$. Dies könnte sich eventuell als hilfreich erweisen in Hinblick auf Existenzresultate zu Minimierern von \mathcal{H}_ε für alle $\varepsilon \geq 0$. ■

Durch Einschränkung der zu betrachtenden $\varepsilon \geq 0$ in Folgerung 4.9 sind wir nun in der gleichen Situation wie beim Willmore-Funktional im letzten Kapitel. Hilfssatz 3.7 lässt sich dann auf \mathcal{H}_ε anwenden:

4.10 Hilfssatz

Seien $\alpha > 0$ und $\varepsilon < \frac{1 - \tanh(\alpha^{-1})}{(1 + \alpha)^2 + 1}$. Dann existieren für alle $\lambda \in (0, 4\pi)$ Konstanten

$$c_1 = c_1(\lambda) := \frac{4\pi - \lambda}{\sqrt{16\pi^2 - (4\pi - \lambda)^2}} > 0$$

und

$$c_2 = c_2(\lambda) := \alpha \exp\left(-4c_1(\lambda)\sqrt{1 + c_1(\lambda)^2}\right) > 0,$$

sodass für alle $u \in N_\alpha$ mit $\mathcal{H}_\varepsilon(u) \leq 4\pi - \lambda$ und für alle $x \in [-1, 1]$ gilt:

$$|u'(x)| \leq c_1, \quad |u(x)| \leq \alpha + c_1, \quad u(x) \geq c_2.$$

Beweis: Sei $\lambda \in (0, 4\pi)$ fest und $u \in N_\alpha$ mit $\mathcal{H}_\varepsilon \leq 4\pi - \lambda$. Wir beobachten dann

$$4\pi - \lambda \geq \mathcal{H}_\varepsilon(u) = \mathcal{W}(u) + \underbrace{\varepsilon \mathcal{A}(u)}_{\geq 0} \geq \mathcal{W}(u) \stackrel{\text{Satz 2.20}}{=} \frac{\pi}{2} \mathcal{W}_h(u),$$

sodass $\mathcal{W}_h(u) \leq 8 - \tilde{\lambda}$ mit $\tilde{\lambda} := \frac{2\lambda}{\pi}$. Nach Hilfssatz 3.7 erhalten wir für alle $x \in [-1, 1]$ dann die Abschätzungen

$$|u'(x)| \leq c_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{8 - \tilde{\lambda}}{\sqrt{64 - (8 - \tilde{\lambda})^2}} = \frac{4\pi - \lambda}{\sqrt{16\pi^2 - (4\pi - \lambda)^2}},$$

sowie

$$|u(x)| \leq \alpha + c_1, \quad u(x) \geq c_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \exp\left(-4c_1\sqrt{1+c_1^2}\right).$$

□

Mit diesen Schranken geht der Beweis für die Existenz eines Minimierers des Willmore-Funktional, Satz 3.8, auch für das Helfrich-Funktional durch.

4.11 Satz (Existenz eines Minimierers von \mathcal{H}_ε)

Für alle $\alpha > 0$ und $0 < \varepsilon < \frac{1 - \tanh(\alpha^{-1})}{(1+\alpha)^2+1}$ existiert eine Funktion $u \in H_\alpha$, sodass

$$\mathcal{H}_\varepsilon(u) = M_\alpha^\varepsilon = \inf_{v \in N_\alpha} \mathcal{H}_\varepsilon(v) = \inf_{v \in H_\alpha} \mathcal{H}_\varepsilon(v).$$

Es ist sogar $u \in C^\infty([-1, 1])$, sodass insbesondere auch $u \in N_\alpha$ und u löst die Helfrich-Gleichung für Rotationsflächen (HGR).

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis des Existenzsatzes 3.8. Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H_\alpha$ eine Minimalfolge für M_α^ε , d. h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\varepsilon(u_k) = \inf_{u \in N_\alpha} \mathcal{H}_\varepsilon(u) = M_\alpha^\varepsilon.$$

Nach Modifizierung können wir wegen Hilfssatz 4.9 annehmen, dass $\mathcal{H}_\varepsilon(u_k) \leq 4\pi - \lambda$ für ein $\lambda \in (0, 4\pi)$. Hilfssatz 4.10 liefert uns dann Konstanten $c_1 = c_1(\lambda)$ und $c_2 = c_2(\lambda)$, sodass wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [-1, 1]$ die Schranken

$$|u'_k(x)| < c_1, \quad u_k(x) \leq \alpha + c_1, \quad u_k(x) \geq c_2,$$

bekommen. Die gleiche Rechnung wie im Beweis von Satz 3.8 ergibt dann für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$8 - \lambda \geq \frac{2}{\pi} \mathcal{H}_\varepsilon(u_k) \geq \mathcal{W}_h(u_k) \stackrel{\text{Satz 3.8}}{\geq} \frac{c_2}{(1+c_1^2)^{5/2}} \|u''_k\|_{L^2(-1,1)}^2.$$

Also insbesondere ist damit auch wieder $\|u_k\|_{H^2(-1,1)}$ gleichmäßig beschränkt, also $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $H^2(-1,1)$. Schwache Folgenkompaktheit beschränkter abgeschlossener Mengen in H^2 (Satz 1.1) liefert nach Auswahl einer Teilfolge wieder ein $u \in H^2(-1,1)$, sodass

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } H^2(-1,1).$$

Wie im Beweis von Satz 3.8 zeigt man dann wieder $u \in H_\alpha$ und

$$\mathcal{H}_\varepsilon(u) = M_\alpha^\varepsilon.$$

Damit minimiert u \mathcal{H}_ε in der Klasse H_α und löst die Differentialgleichung (HGR) schwach.

Die Regularität von u lässt sich hier wieder zeigen. Für einen Beweis von $u \in C^\infty([-1,1])$ siehe man [Sch, Kapitel 6.8]. Damit ist u also auch eine klassische Lösung von (HGR). □

4.12 Bemerkung und Ausblick

Bereits in [Sch] wurde die Existenz von Minimierern für M_α^ε für hinreichend großes ε gezeigt (vgl. [Sch, Theorem 1.1 und Theorem 4.14]). Es lässt sich mit dem hier gezeigten Resultat auch vermuten, dass Existenz von Minimierern für M_α^ε auch für *alle* ε existieren könnten. Zum Nachweis dieser Behauptung muss die hier verwendete „Energimethode“ allerdings etwas abgewandelt werden. Die entscheidende Abschätzung, welche unser Resultat hier auf hinreichend kleine ε eingeschränkt hat, war die in Folgerung 4.10, als wir $\mathcal{H}_\varepsilon(u) \geq \mathcal{W}(u)$, d. h. $\mathcal{A}(u) \geq 0$, abgeschätzt hatte. Für bessere Existenzresultate muss also diese Abschätzung verbessert werden!

Literaturverzeichnis

- [Alt] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, 6. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [Ba] C. Baker, *The mean curvature flow of submanifolds of high codimension*, Dissertation, Australian National University, 2010.
- [Bal] W. Ballmann, *Vector Bundles and Connections*, Vorlesungsskript, Universität Bonn, 2002.
- [Bla] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie III*, Springer Berlin, 1929.
- [Bry] R. Bryant, *A Duality Theorem for Willmore Surfaces*, J. Diff. Geom. **20**, 23-53, 1984.
- [BryGri] R. Bryant, P. Griffiths, *Reduction for Constrained Variational Problems and $\int \frac{1}{2}\kappa^2 ds$* , Amer. J. Math. **108**, 525-570, 1986.
- [Cha] I. Chavel, *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*, Cambridge University Press, 1994.
- [Chen] B. Y. Chen, *Some Conformal Invariants of Submanifolds and Their Applications*, Bol. Un. Mat. Ital. **10**, 380-385, 1974.
- [Dac] B. Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations*, 2. Auflage, Imperial College Press, 2009.
- [DDG] A. Dall'Acqua, K. Deckelnick, H.-Ch. Grunau, *Classical solutions to the Dirichlet problem for Willmore surfaces of revolution*, Adv. Calc. Var. **1**, 379-397, 2008.
- [DDW] A. Dall'Acqua, K. Deckelnick, G. Wheeler, *Unstable Willmore surfaces of revolution subject to natural boundary conditions*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. **48**, 293-313, 2013.
- [DFGS] A. Dall'Acqua, S. Fröhlich, H.-Ch. Grunau, F. Schiweck, *Symmetric Willmore surfaces of revolution satisfying arbitrary Dirichlet boundary data*, Adv. Calc. Var. **4**, 1-81, 2011.
- [DG] K. Deckelnick, H.-Ch. Grunau, *A Navier boundary value problem for Willmore surfaces of revolution*, Analysis **29**, 229-258, 2009.
- [Do] M. Dobrowolski, *Angewandte Funktionalanalysis*, 2. Auflage, Springer, 2010.

- [GGS] F. Gazzola, H.-Ch. Grunau, G. Sweers, *Polyharmonic Boundary Value Problems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [H] W. Helfrich, *Elastic Properties of Lipid Bilayers: Theory and possible Experiments*, Z. Naturforsch. C **28**, 693-703, 1973.
- [Jo] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, 4. Auflage, Springer-Verlag, 2005.
- [JoLi] J. Jost, X. Li-Jost, *Calculus of Variations*, Cambridge University Press, 1998.
- [KoNo] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*, Wiley New York London, 1963.
- [Lee1] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, 2. Auflage, Springer-Verlag New York, 2013.
- [Lee2] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag New York, 1997.
- [LaSi] J. C. Langer, D. A. Singer, *Curves in the Hyperbolic Plane and mean curvature of Tori in 3-Space*, Bull. London Math. Soc. **16**, 531-534, 1984.
- [Ni] J. C. C. Nitsche, *Boundary Value Problems for variational Integrals involving Surface Curvatures*, Quarterly Appl. Math. **51**, 363-387, 1993.
- [PaTe] R. S. Palais, C.-I. Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Springer-Verlag, 1988.
- [Per] J. Persson, *Willmore Surfaces*, Master Arbeit, Lund University, 2003.
- [Sch] S. Scholtes, *Elastic Catenoids*, Analysis **31**, 125-143, 2011.
- [Sim] L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Centre for Mathematical Analysis, Australien National University, 1984.
- [Tho] G. Thomson, *Über Konforme Geometrie, I: Grundlagen der konformen Flächentheorie*, Hamb. Math. Abh. **3**, 31-56, 1923.
- [Wal] S. Waldmann, *Poisson-Geometrie und Deformationsquantisierung*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [Wei] J. L. Weiner, *On a problem of Chen, Willmore, et al.*, Indiana Univ. Math. J. **27**, 19-35, 1978.
- [WG] G. Wheeler, H.-CH. Grunau, *Working Notes on Helfrich Surfaces of Revolution*, Arbeitsnotizen, unveröffentlicht.

- [Wi1] T. J. Willmore, *Note on Embedded surfaces*, Ann. Stiint. Univ. Al. I. Cuza, Iasi. Sect. I a Matt. **11**, 1965.
- [Wi2] T. J. Willmore, *Riemannian Geometry*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University, New York, 1993.

Symbolverzeichnis

$[X, Y]$	$= X \circ Y - Y \circ X$ Lie-Klammer von Vektorfeldern	12
$\ \cdot\ _X$	Norm auf dem Vektorraum X	4
$\ \cdot\ _{H^m(\Omega)}$	$= \ \cdot\ _{W^{m,2}(\Omega)}$ Sobolev-Norm für den Fall der Hilberträume bei $p = 2$	8
$\ \cdot\ _{L^p(\Omega)}$	Lebesgue-Norm	7
$\ \cdot\ _{W^{m,p}(\Omega)}$	Sobolev-Norm	7
\rightharpoonup	schwache Konvergenz	5
\hookrightarrow	stetige Einbettung eines Banachraums in einen anderen	8
\xrightarrow{c}	kompakte Einbettung eines Banachraums in einen anderen	8
$\mathcal{A}(f)$	Flächenfunktional einer Immersion $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ bezüglich der zurückgezogenen Metrik	34
B	zweite Fundamentalform	21
$C_0^0(\Omega)$	stetige Funktionen auf Ω mit kompaktem Träger	6
$C_0^k(\Omega)$	k -fach (und unendlich oft) differenzierbare Funktionen auf Ω mit kompaktem Träger	6
$C^k(\Omega)$	k -fach differenzierbare Funktionen auf Ω	6
$C^k(\bar{\Omega})$	k -fach differenzierbare Funktionen auf $\bar{\Omega}$	6
$C^{k,\gamma}(\Omega)$	Hölder-Raum der k -fach differenzierbaren Funktionen mit Hölder-Exponent γ	6
$C^\infty(\Omega)$	unendlich differenzierbare Funktionen auf Ω	6
$C^\infty(\bar{\Omega})$	unendlich differenzierbare Funktionen auf $\bar{\Omega}$	6
$C^\infty(\mathcal{E})$	$= C^\infty(\mathcal{M}^m, \mathcal{E})$ (globale) Schnitte von \mathcal{E} , also glatte reellwertige Abbildungen $X: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{E}$ mit $\pi \circ X = \text{id}_{\mathcal{M}^m}$	11
$C^\infty(\mathcal{E}_U)$	$= C^\infty(U, \mathcal{E})$ lokale Schnitte von \mathcal{E} , also glatte reellwertige Abbildungen $X: U \subset \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{E}$ mit $\pi \circ X = \text{id}_{\mathcal{M}^m} _U$	11
$C^\infty(\mathcal{M}^m)$	$= C^\infty(\mathcal{M}^m, \mathbb{R})$ glatte reellwertige Funktionen auf \mathcal{M}^m	10
∂_i	$= \frac{\partial}{\partial x^i}$ das durch die Komponente $x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$ einer Karte (U, x) erzeugte Tangentialvektorfeld	
$\partial\mathcal{M}^m$	geometrischer Rand einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m	27
∇	Zusammenhang, bzw. kovariante Ableitung, auf einem Vektorbündel \mathcal{E}	13
∇^*	Pullback-Zusammenhang über $f^*\mathcal{E}$ eines Zusammenhangs $\tilde{\nabla}$ über \mathcal{E}	19

$\nabla^\top, \nabla^\perp$	tangentialem und normalem Anteil der Pullback-Zusammenhangs ∇^*	21
∇^2	zweite kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel \mathcal{E}	15
Δ_g	$= Z \mapsto \text{tr}_g((X, Y) \mapsto \nabla_{X,Y}^2 Z)$ Laplace-Operator auf Vektorbündel \mathcal{E} für $X, Y \in C^\infty(T\mathcal{M}^m)$ und $Z \in C^\infty(\mathcal{E})$; auf $\mathcal{E} = \mathcal{M}^m \times \mathbb{R}$ auch als Laplace-Beltrami-Operator bezeichnet	16, 16
Δ_g^\perp	Laplace-Operator auf Normalenbündel bezüglich der normalen Komponenten ∇^{Perp} des Pullback-Zusammenhangs	30, 16
ε	Konstante, welche den Anteil des Flächenfunktionals im Helfrich-Funktional angibt	64
\mathcal{E}	Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m mit Projektion $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}^m$ und Fasern $\mathcal{E}_p = \pi^{-1}(p)$	10
f	bezeichnet meist eine Abbildung $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$, welche stellenweise als Immersion vorausgesetzt wird	9
$f_u, f_{h,u}$	Immersion als Rotationsflächen in \mathbb{R}^3 mit Profilkurve u , bzw. als hyperbolischen Graphen in \mathbb{H}^2	35, 43
f_*	Pullback oder Differential einer Funktion $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$, mit $df(p) = f_* _p: T_p\mathcal{M}^m \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}^n$	20
f^*E	Pullback-Bündel eines Vektorbündels $\tilde{\pi}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}^n$ auf \mathcal{M}^m	18
F	bezeichnet eine Variation einer Immersion $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$	28
Γ_{ij}^k	Christoffel-Symbole eines linearen Zusammenhangs ∇	14
g	Metrik auf Bündel \mathcal{E} ; riemannsche Metrik, falls $\mathcal{E} = T\mathcal{M}^m$	12
$g_u, g_{h,u}$	zurückgezogene Metrik, bzw. erste Fundamentalform, der Rotationsfläche mit Profilkurve u und des hyperbolischen Graphen	36, 44
g_h	hyperbolische Metrik auf \mathbb{H}^n	41
$\mathcal{H}_\varepsilon(f)$	$= \mathcal{W}(f) + \varepsilon \mathcal{A}(f)$ Helfrich-Funktional einer Immersion $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$	64
\mathbb{H}^n	$\{q \in \mathbb{R}^n : q^n > 0\}$ offener Halbraum	41
\vec{H}	$= \frac{1}{m} \text{tr}_g B$ mittleres Krümmungsvektorfeld über \mathcal{M}^m mit Betrag $H = \vec{H} $	24
$\vec{H}_u, \vec{H}_{h,u}$	mittleres Krümmungsvektorfeld einer Rotationsfläche mit Profilkurve u und eines hyperbolischen Graphen mit Beträgen H_u und $H_{h,u}$	37, 45
H_α	$= \{u \in H^2(-1, 1) : u \text{ ist gerade und positiv, } u(1) = \alpha, u'(1) = 0\}$	49, 66
κ	geodätische Krümmung einer regulären Kurve	25
K	Gauß-Krümmung	18
K_u	Gauß-Krümmung einer Rotationsfläche mit Profilkurve u	37

$K(X, Y)$	Schnittkrümmung bezüglich der Schar von Tangentialebenen $\text{lin}(X, Y) \subset T\mathcal{M}^m$	18
$L^p(\Omega)$	Lebesgue-Raum über Ω	7
$\mu_g, \mu_{\partial g}$	bezeichnet das riemannsche Volumenmaß auf (\mathcal{M}^m, g) bzw. das durch g auf $\partial\mathcal{M}^m$ induzierte Volumenmaß des Randes.	27
$\mathcal{M}^m, \mathcal{N}^n$	Notation für eine m -, bzw. n -dimensionale Mannigfaltigkeit	9
M_α	$= \inf \{ \mathcal{W}_h(u) : u \in N_\alpha \}$	55
M_α^ε	$= \inf \{ \mathcal{H}_\varepsilon(u) : u \in N_\alpha \}$	67
N	übliche Bezeichnung für Einheitsnormalenvektorfelder	
N_α	$= \{ u \in C^{1,1}([-1, 1]) : u \text{ ist gerade und positiv, } u(1) = \alpha, u'(1) = 0 \}$	49, 66
$N\mathcal{M}^m$	Normalenbündel über \mathcal{M}^m bezüglich der Immersion $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$.	20
Ω	meist eine offene und beschränkte Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$	6
p, q	bezeichnet meist Punkte auf den Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}^m und \mathcal{N}^n	9
R_∇	Krümmungstensor bezüglich dem Zusammenhang ∇ auf \mathcal{E} ; für $\mathcal{E} = T\mathcal{M}^m$ auch als riemannscher Krümmungstensor bezeichnet	17
Ric	Ricci-Tensor bzw. Ricci-Krümmung als einzigst nichttriviale Spur von Riem	18
Riem	4-fach kovarianter Riemannscher Krümmungstensor	18
S	$= \text{tr}_g \text{Ric}$ skalare Krümmung	18
$T_p\mathcal{M}^m, T_q\mathcal{N}^n$	Tangentialraum an \mathcal{M}^m (bzw. \mathcal{N}^n) an Punkt p (bzw. q)	10
$T\mathcal{M}^m$	$= \coprod_{p \in \mathcal{M}^m} T_p\mathcal{M}^m$ Tangentialbündel über \mathcal{M}^m	10
\coprod	disjunktione Vereinigung; Elemente in der Vereinigung werden als disjunkte Mengen gesehen	10
$\text{vol}_g(\mathcal{M}^m)$	$= \int_{\mathcal{M}^m} d\mu_g$ Volumen der Mannigfaltigkeit bezüglich der Metrik g	34
V	bezeichnet meist das zu einer Variation F zugehörige Variationsvektorfeld	28
$\mathcal{W}(f), \mathcal{W}_c(f)$	normales und konformes Willmore-Funktional einer isometrischen Immersion $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$	27
$\mathcal{W}_h(f_{h,u})$	hyperbolisches Willmore-Funktional eines hyperbolischen Graphen $f_{h,u}$	46
w_α	Hilfsfunktion aus Kapitel §3 und §4.2 mit $w_\alpha(\pm 1) = \alpha$	57
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev-Raum über Ω	7
x, y	Bezeichnung für Karten auf den Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}^m und \mathcal{N}^n ; $x^i: U \subset \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}$ und $y^j: V \subset \mathcal{N}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind die Komponenten von x und y ; in Kapitel §3 und §4.2 ist x ein Element aus \mathbb{R}	9

X	überlicherweise Vektorfeld oder Schnitt eines Vektorbündels, d. h. als Derivation auf \mathcal{M}^m ; in Unterkapitel 1.1 auch als Vektorraum, bzw. Banachraum 4, 11, 12
X^*	(topologischer) Dualraum zum Banachraum X 4
X^{**}	Bidualraum zum Banachraum X 5
Y	Vektorfeld oder Schnitt eines Vektorbündels
Z	Vektorfeld oder Schnitt eines Vektorbündels

Sachverzeichnis

A

Ableitung	
kovariante	13
zweite	15
schwache	7

B

Banachraum	4
Hölder-Raum	6
Lebesgue-Raum	7
reflexiv	5
Sobolev-Raum	7
Bidualraum	4
Bogenlänge	25
Bündel	
Homomorphismen-	11
-Karte	10
-Metrik	12
Normalen-	20
Pullback-	18
Tangential-	10
Tensor-	11
Vektor- (siehe <i>Vektorbündel</i>)	10

C

Christoffel-Symbole	14
hyperbolischer Halbraum	41

D

Derivation	12
Differentialform	12
Dualraum	4

E

Einbettung	
kompakt	8
Sobolev-	8, 9
stetig	8
1-Form	12
Existenzsatz	
Minimierer von \mathcal{H}_ε in H_α	73
Minimierer von \mathcal{W}_h in H_α	62

F

Faser	10
Flächenfunktional	34
folgenkompakte Menge	4
Frame	11
orthonormal	13
Fundamentalform	
erste	20
hyperbolischer Graph	44
Rotationsfläche	36
zweite	21
hyperbolischer Graph	44
Rotationsfläche	36
Fundamentallema der riemannschen Geometrie	15
Funktional	
Helfrich-	64
stetiges lineares	4

G

Gauß	
-Formel	22

-Krümmung	18
Rotationsfläche	37
Geodäte	25
hyperbolische Halbebene	48
geodätische Krümmung	25
Graph	
hyperbolisch (siehe <i>hyperbolischer Graph</i>)	
43	
H	
Helfrich	
-Fläche	64
-Funktional	64
Rotationsfläche	65
-Gleichung	
Rotationsfläche	65
-Immersion	64
Hilfsfunktion w_α	57
Hölder	
-Halbnorm	6
-Raum	6
-stetig	6
Sobolev-Einbettung	9
hyperbolisch	
Graph	43
erste Fundamentalform	44
mittlere Krümmung	45
zweite Fundamentalform	44
Halbebene	41
Geodäten	48
Halbraum	41
Christoffel-Symbole	41
Krümmung	42
Willmore	
-Funktional	46
-Gleichung	47
I	
Injektion, kanonische	5

K	
Kommutator	12
kompakt	
Einbettung	8
folgen-	4
schwach folgen-	5
Konvergenz, schwache	5
Krümmung	
Gauß-	18
geodätische	25
mittlere	24
Ricci-	18
Schnitt-	18
skalare	18
-Tensor	17
riemannsch	17
Kurve	24
reguläre	24
L	
Laplace-Beltrami-Operator	16
Laplace-Operator	16
Lebesgue	
-Raum	7
L^p -Norm	7
Levi-Civita-Zusammenhang	15
Lie-Klammer	12
Lipschitz-stetig	6
M	
Mannigfaltigkeit, riemannsche	13
Metrik	
Bündel-	12
induzierte	19
Pullback-	20
riemannsch	13
Rotationsfläche	36
Minimalfläche	34
mittlere Krümmung	24

hyperbolischer Graph	45	S	
Rotationsfläche	37	Schnitt	11
-Vektorfeld	24	induzierter	19
N		schwach	
Norm		Ableitung	7
C^k -	6	folgenkompakt	5
Hölder-Halbnorm	6	Konvergenz	5
L^p -	7	separable Menge	4
$W^{m,p}$ -	8	Sobolev	
P		-Einbettung	8, 9
Profilkurve	35	-Raum	7
Pullback		$W^{m,p}$ -Norm	8
-Bündel	18	stetig	
-Metrik	20	Einbettung	8
-Zusammenhang	19	Hölder-	6
R		Lipschitz-	6
reflexiver Raum	5	Stetigkeit von \mathcal{H}_ε in H_α	67
Ricci		Stetigkeit von \mathcal{W}_h in H_α	54
-Krümmung	18	T	
-Tensor	18	Tangential	
riemannsch		-Raum	9
Krümmungstensor	17	-Vektor	10
Mannigfaltigkeit	13	-Bündel	10
Metrik	13	Tensor	
Vektorbündel	14	-Bündel	11
Rotationsfläche	35	Krümmungs-	17
Gauß-Krümmung	37	-Produkt von Vektorbündeln	11
Helfrich		Ricci-	18
-Funktional	65	tensoriell	12
-Gleichung	65	Trivialisierung	10
Metrik, erste Fundamentalform	36	U	
mittlere Krümmung	37	Unterhalbstetigkeit	
Willmore		schwache Folgen-Unterhalbstetigkeit von	
-Funktional	38	\mathcal{H}_ε in H_α	66
-Gleichung	40	schwache Folgen-Unterhalbstetigkeit von	
zweite Fundamentalform	36	\mathcal{W}_h in H_α	52

V

Variation	28
-Vektorfeld	28
Vektorbündel	10
direkte Summe	10
duales	11
Frame (siehe <i>Frame</i>)	11
Laplace-Operator	16
riemannsch	14
Schnitt	11
Tensorprodukt	11
Zusammenhang (siehe <i>Zusammenhang</i>)	
13	
Vektorfeld	12
entlang einer Kurve	24
Ko-	12
mittleres Krümmungs-	24
Variations-	28

Pullback-	19
-----------------	----

W

Whitney-Summe	10
Willmore	
-Fläche	31
-Funktional	27
hyperbolisch	46
Rotationsfläche	38
-Gleichung	31
hyperbolischer Graph	47
Rotationsfläche	40
-Immersion	30

Z

Zusammenhang	13
entlang einer Kurve	25
kompatibel mit Metrik	14
Levi-Civita-	15
linearer	13
Christoffel-Symbole	14
torsionsfrei	15

