$L^p - L^q$-Theorie und asymptotisches Verhalten der Störungsenergie bei einem Navier-Stokes-System im Außenraum mit Anströmgeschwindigkeit für kleine Reynoldszahlen

Von der Universität Bayreuth
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Christian Ernst Meister
geboren am 14.5.1969 in Frankfurt a. M.

1. Gutachter: Prof. Dr. Wolf von Wahl
2. Gutachter: Prof. Dr. Hans-Christoph Grunau

Tag der Einreichung: 5. Juni 2001
Tag des Kolloquiums: 22. Oktober 2001

Du musst verstehn!
Aus Eins mach Zehn,
Und Zwei lass gehn,
Und Drei mach gleich,
So bist Du reich.
Verlier die Vier!
Aus Fünf und Sechs-
So sagt die Hex-
Mach Sieben und Acht,
So ists vollbracht:
Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins.
Das ist das Hexen-Einmaleins!

Johann Wolfgang von Goethe

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

In erster Linie geht es weniger um Existenz und Eindeutigkeit, als vielmehr um Qualität bzw. physikalische Relevanz existierender (physikalisch vernünftiger [Finn2]) Lösungen von Navier-Stokes. Die Frage ist, was passiert im Laufe der Zeit mit einer Strömung, die zu einem bestimmten Zeitpunkt um u gestört wird.

Konkret wird die Umströmung eines Hindernisses auf unbeschränktem Grundgebiet Ω und fester, nicht verschwindender Anströmgeschwindigkeit v_∞ untersucht. Das zugrundeliegende Gebiet Ω soll in allen 3 Raumdimensionen unendlich ausgedehnt sein, d.h. das Hindernis $\mathbb{R}^3 - \overline{\Omega} \subset B_R(0)$ mit R hinreichend groß, ist ein beschränktes Gebiet und die Lösung v soll sich asymptotisch einem konstanten Vektor v_∞ im Unendlichen nähern, d.h. v soll eine Lösung von

$$
\begin{aligned}
\partial_t v - \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla p &= 0 && \text{in } (0,\infty) \times \Omega, \\
\nabla \cdot v &= 0 && \text{in } (0,\infty) \times \Omega, \\
v|_{\partial\Omega} &= 0 && \text{auf } [0,\infty) \times \partial\Omega \\
v(0,x) &= v_0(x) && \text{in } \Omega, \\
v(t,x) \to v_\infty &\neq 0 && \text{für } |x| \to \infty,\ t \in [0,\infty),
\end{aligned}
\tag{1.0.1}
$$

sein. Betrachtet man stationäre ($\partial_t v = 0$) Lösungen von (1.0.1), so muß physikalisch gesehen, die durch die auf den Körper permanent ausgeübte Kraft ($v_\infty \neq 0$) entstehende Energie in der Strömung dissipieren. Es fragt sich daher, ob eine stationäre Lösung $\overset{\circ}{v}$ von (1.0.1) durch kleine Störungen $u(t)$, d.h. $v(t) = \overset{\circ}{v} + u(t)$ *im Wesentlichen verändert* wird. Von Stabilität spricht man, wenn in einem gewissen Sinne der Einfluß der Störung $u(t)$ im Laufe der Zeit abnimmt. Es gibt mehrere Methoden an das Stabilitätsproblem heranzugehen: Mit Hilfe der Methode der linearisierten Stabilität, die auf der Untersuchung des Spektrums des linearen Teil der Störungsgleichung basiert (voller Oseen-Operator), läßt sich Stabilität nur für hinreichend kleine Anfangsstörungen $u(0)$ zeigen. Dafür erhält man in manchen Fällen auch ein Kriterium für Instabilität. Der hier verwendete Ansatz überprüft, ob und wie die kinetische Energie $\|u(t)\|_2$ der Störung in der Zeit fällt. Verschwindet die kinetische Energie mit der Zeit, spricht man von asymptotischer Energiestabilität. Verschwindet sie, unabhängig von der Größe der Anfangsstörung, so spricht man von unbedingter (asymptotischer) Energiestabilität.

Es stellt sich heraus, daß eine die Stabilität gut beschreibende Größe dabei die energetische Reynoldszahl Re_{E} ist:

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{E}}(\mathring{v}) = \sup_{w\in\mathcal{D}\left(\mathbb{A}_2^{1/2}(\Omega)\right)\setminus\{0\}} \frac{\langle \mathring{v} - v_\infty, (w\cdot\nabla)w\rangle_\Omega}{\|\nabla w\|_2^2}$$

Für die genaue Definition siehe Kapitel 2 Definition 2.0.10. Anders betrachtet, erkennt man aus der Definition der Reynoldszahl, daß sie bei ähnlichen Verhältnissen grob der Geschwindigkeit $\mathring{v}$ modulo v_∞ entspricht. Aus physikalischer Sicht ist i. Allg. bei sehr großen Reynoldszahlen keine Stabilität, d.h. kein Abklingen der kinetischen Energie der Störung zu erwarten. In dieser Arbeit wollen wir uns auf den Fall Reynoldszahl < 1 beschränken. Aus der Energieungleichung (6.0.3) sieht man schnell, daß bei Reynoldszahlen kleiner 1 die Energie der Störung unbedingt asymptotisch abfallen muß.

Etwas polemisch könnte man behaupten, daß diese Erkenntnis höchstens dann physikalische Relevanz gewinnt, wenn es Mindestabklingraten gibt. Solche expliziten Abklingraten wurden von verschiedenen Autoren berechnet. Ein schon länger bekanntes Resultat ist, wie bereits erwähnt, daß bei $\mathrm{Re}_{\mathrm{E}} < 1$ die Störung der stationären Grundströmung mit der Zeit abfällt. Auch sind in den 80er Jahren Abklingraten der Energie $\|u\|_2$ der Störung von $t^{-1/8}$ berechnet worden (siehe u.a. [Mar], [Sc1, Sc2]). Für die ruhende Flüssigkeit sind Abklingraten von $t^{-3/4}$ seit 1992 bekannt und seither nicht verbessert worden [Borchers W., Miyakawa T.; 1988-1992]. Ein erstaunliches Ergebnis ist es daher, dies auch im ungleich komplizierteren Fall nicht verschwindender Anströmgeschwindigkeit zu erhalten.

Für das hier vorliegende Außenraumproblem ist in [Bo, Miy.2] unter gewissen Voraussetzungen, die Reynoldszahl kleiner 1 implizieren, eine Rate von $t^{-\frac{1}{2}+\epsilon}$ zu finden. Siehe dazu auch [Bo, Miy.1] bis [Bo, Miy.5], [Mar], [Sc1], [Sc2], [SWW], [Wi], [Grunau1], [Grunau3], [Mas] und [MiSo]. Erwähnt sei noch, daß [Grunau3] mit Hilfe von Fouriertheorie im Ganzraum $\Omega = \mathbb{R}^3$ eine Abklingrate von $t^{-\frac{5}{4}+\epsilon}$ berechnen konnte. Welche Voraussetzung an die Anfangsstörung gestellt werden muß, um die in Kapitel 6 angegebene Abklingrate von $t^{-\frac{3}{4}+\epsilon}$ zu sichern, ist z.B. der $L^p - L^q$ Abschätzung des einfachen Oseen-Operators in [ShiKo, Theorem 1.2] zu entnehmen. Demnach ist z.B. die Anfangsbedingung $u(0) \in L^{1+\delta}(\Omega)$ für hinreichend kleines $\delta > 0$ ausreichend. Insofern scheint diese Rate auch optimal in dem Sinne zu sein, wie es das Abklingen der Halbgruppe des zugehörigen linearen (Oseen-) Operators nahelegt. Ebenso steht die Frage nach Stabilität und Regularität für das Außenraumproblem bei höheren Reynoldszahlen noch zur Beantwortung offen. Im Grenzfall $\mathrm{Re}_{\mathrm{E}} = 1$ gelten zumindest noch gewisse Regularitätseigenschaften (siehe [Grunau1]). Im Fall $\mathrm{Re}_{\mathrm{E}} > 1$ scheint weder Regularität noch Abklingen im Allgemeinen zu gelten. Aussagen zur Stabilität bei größeren Reynoldszahlen in anderen Systemen oder zu Instabilität oberhalb einer weiteren kritischen Zahl wurden z.B. von von Wahl [WaSc] oder [WaS] behandelt.

Setzt man $v := \mathring{v} - v_\infty$, so erfüllt die Störung $u(t)$ der gestörten Strömung $v(t) = \mathring{v}(x) + u(x,t)$

die folgende Differentialgleichung (mit $f = 0$)

$$
\begin{aligned}
u_t - \Delta u + (v_\infty \cdot \nabla)u + \mathcal{B}(u) + (u \cdot \nabla)u + \nabla \tilde{p} &= f && \text{in } (0,\infty) \times \Omega,\\
\nabla \cdot u &= 0 && \text{in } (0,\infty) \times \Omega,\\
u(t,x) &= 0 && \text{auf } (0,\infty) \times \partial\Omega,\\
u(0,x) &= u_0(x) && \text{in } \Omega,\\
u(t,x) &\to 0 && \text{für } |x| \to \infty
\end{aligned}
\tag{1.0.2}
$$

Abgesehen von der Projektion auf den divergenzfreien Anteil ist die volle Oseenhalbgruppe die Lösung des linearen, stationären Anteils dieser Gleichung. Den Zugang zu den Gleichungen (1.0.2) gewinnt man durch die genaue Untersuchung des vollen Oseen-Operators $\mathbb{O} = \mathbb{P}(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B})$ mit $\mathcal{B}. = (v \cdot \nabla). + (. \cdot \nabla)v$, insbesondere dessen Resolventenmenge und durch die $L^p - L^q$- Abschätzungen seiner Halbgruppe. Der Begriff „voll“ soll hier lediglich den Bezug zur Störungsgleichung wiedergeben. Hinsichtlich der Leistungen von Kobayashi und Shibata in [ShiKo] könnte man ebenso von dem durch $\mathcal{B}$ gestörten Oseen-Operator sprechen.

Kobayashi und Shibata haben in [ShiKo] bei der Betrachtung des einfachen Oseen-Operators $\mathbb{O}_e = \mathbb{P}(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla))$ einen großen Schritt getan. Wie sie zeigten, liegt, anders als beim Stokes-Operator $\mathbb{A} = \mathbb{P}(-\Delta)$, die Resolventenmenge links einer mit dem Scheitel in die Null reichenden, liegenden, rechts offenen Parabel, so daß es keinen Kegel mit Spitze in der Null und Schenkeln in der positiven Halbebene gibt, der ganz in der Resolventenmenge liegt. Eine wohlbekannte Technik zur Repräsentation der Halbgruppe sektorieller Operatoren mit Hilfe einer Integraldarstellung und einem sektoriellen Integrationsweg [Sa, Friedmann] ist somit nicht mehr möglich. Bezeichne für $v_\infty \neq 0$

$$
\sum\nolimits_{v_\infty} = \{\lambda \in \mathbb{C} | |v_\infty|^2 \operatorname{Re}\lambda + (\operatorname{Im}\lambda)^2 > 0\}
\tag{1.0.3}
$$

so zeigt Theorem 4.4 [ShiKo] oder auch [Sa], daß $\sum_{v_\infty} \subset \rho(-\mathbb{O}_e)$ in der Resolventenmenge von $-\mathbb{O}_e$ liegt. Zudem ist der Rand von $\sum_{v_\infty}$ zumindest im Ganzraum nicht in $\rho(-\mathbb{O}_e)$ enthalten.

Bei der Erweiterung auf den vollen Oseen-Operator konnte die Struktur nur noch auf beschränkten Grundgebieten erhalten bleiben (Kapitel 3). In unbeschränkten Gebieten ist zumindest $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \leq 0,\ \lambda \neq 0\}$ in der Resolventenmenge des vollen Oseen-Operators enthalten. Ein weiteres Phänomen tritt bei der Erweiterung des Oseen-Operators auf. Es handelt sich dabei um die Abhängigkeit von $|v_\infty|$ im Nenner der Konstanten in der $L^p - L^q$ Abschätzung (siehe Kapitel 5.3). Dieses unerwartete Resultat zeichnet sich schon bei bei [ShiKo] in Lemma 3.8 ab. Tatsächlich verliert die Lösung $\mathring{v}$ die von uns geforderte Regularität, falls $v_\infty = 0$ (siehe [Galdi2]). Es ist zur Zeit nicht klar, ob das Auftreten von $|v_\infty|$ im Nenner eine phänomenologische Notwendigkeit darstellt oder ob es andere technische Methoden eliminieren können.

Erläuterungen zum Aufbau des Beweises: Die zu den Lösungsoperatoren $(\mathbb{O}_e + \lambda)^{-1}$ bzw. $(\mathbb{O} + \lambda)^{-1}$ gehörenden Eigenschaften werden jeweils in einem beschränkten, das Hindernis $\mathbb{R}^3 - \Omega$ enthaltene Gebiet (Kapitel 3) und im Ganzraum (Kapitel 4.2) erarbeitet und schließlich als Parametrix (Kapitel 5.1) zusammengebaut. Da die Aussagen für die Resolvente im beschränkten

Raum sogar die Umgebung der Null mit einschließen (siehe Kapitel 3, Satz 3.0.13), ist dieser Fall unkritisch. Dagegen müssen im Ganzraum weitere Abschätzungen für Werte nahe Null ausdrücklich berechnet werden (Kapitel 4.3).

Zwei wichtige Argumente gehen bei der Hinzunahme von $\mathcal{B}$ verloren. Zum einen kann eine Fundamentallösung der vollen Oseen-Gleichung im ganzen Raum $\mathbb{R}^3$ nicht mehr explizit angegeben werden, wie das bei der einfachen Oseen-Gleichung durch

$$u(t,x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-|x-tv_\infty-y|^2/4t} u_0(y)dy$$

der Fall ist. Diese Darstellung gibt vermöge Youngs Ungleichung unmittelbar einen Beweis für [ShiKo, Theorem 1.2.] für $t \geq 1$ [ShiKo, Lemma 6.1] im Ganzraum $\Omega = R^3$. Eine Verbesserung dieser Resultate scheint schon aus diesem Grund nicht möglich. Dieser Verlust wird aber durch die günstigen Eigenschaften des Operators $\mathcal{B}$ weitgehend aufgehoben. Weitaus schwerwiegender ist, daß eine Lösung der vollen, stationären Oseen-Gleichung im Ganzraum $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \big(\lambda - \Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B}\big)u + \nabla p &= f \ \in L^p(\mathbb{R}^3) \\ \nabla \cdot u &= 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

nicht mehr mit Hilfe der Fouriertransformierten in geschlossener Form dargestellt werden kann, wie das im Fall der einfachen Oseen-Gleichung möglich ist. In letzterem Fall kann die Lösung u als

$$u = E(f) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\hat{f} - \tilde{\xi}\left(\tilde{\xi} \cdot \hat{f}(\xi)\right)}{q(\lambda,\xi)}\right], \quad p = \Pi(f) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\tilde{\xi} \cdot \hat{f}(\xi)}{i|\xi|}\right]$$

geschrieben werden, wobei $q(\lambda,\xi) = \lambda + |\xi|^2 + iv_\infty \cdot \xi$ das charakteristische Polynom von $\lambda - \Delta + (v_\infty \cdot \nabla)$ ist und $\tilde{\xi} := (\xi_1,\xi_2,\xi_3)^T/|\xi|^{-1}$. Damit gehen zunächst auch alle mit Hilfe dieser Darstellung gewonnenen Abschätzungen, einschließlich der zentralen Resolventenabschätzung, verloren. Einen Ausweg schafft hier Kapitel 4.2. Es konnte gezeigt werden, daß zu jedem $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ genau ein $g_\lambda = g_\lambda(f) \in H_p(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ $\forall 6/5 \leq p \leq 2$ existiert, so daß $u = E(f + g_\lambda(f))$ und $p = \Pi(f + g_\lambda(f))$ die volle, stationäre Oseen-Gleichung löst. Um die benötigten Abschätzungen, insbesondere die Resolventenabschätzung zu zeigen, ist es notwendig g_λ als stetig von f abhängend zu erkennen. Diese Tatsache liefert der Beweis von sich aus mit. Die Untersuchung nach dem eben genannten Strukturerhalt des Spektrums des vollen Oseen-Operators kann sich auf die Existenz eines solchen Operators g_λ beschränken.

Um die Abklingrate der vollen Oseen-Halbgruppe in unbeschränkten Gebieten Ω beweisen zu können, muß zuvor ein etwas stärkeres Ergebnis im beschränkten Gebiet $\Omega \cap B_r(0)$ verifiziert werden. Dazu reicht jedoch die Stetigkeit von g allein nicht aus. Vielmehr muß noch einmal in den Beweis der Existenz von g zurückgegangen werden, um sich von der Abhängigkeit der Abbildung $g = g_\lambda$ von λ zu befreien. Hierzu konnte die Ungleichung

$$\|g_\lambda(\psi f)\|_q \leq c_{p,q,r}\|f\|_p \qquad \forall 6/5 \leq q \leq 2,\ 1 < p < \infty$$

mit $\psi \in C_0^\infty(B_r(0))$ als Abschneidefunktion gezeigt werden, mit deren Hilfe die Resultate folgen.

Natürlich drängt sich die Frage auf, ob nicht die Resultate von [ShiKo] als feststehende Ergebnisse hingenommen und durch einen eigenständigen Beweis um den Operator $\mathcal{B}$ verallgemeinert werden können.

Der Standardansatz vermöge des Prinzip von Duhamel gibt als Lösung der vollen Oseen-Gleichung

$$u(t,x) = e^{-\mathbb{O}t}a - \int_0^t e^{-\mathbb{O}(t-s)}\mathcal{B}u(s,x)ds \tag{1.0.4}$$

mit $\mathbb{O} = \mathbb{P}(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla)$ als einfachen Oseen-Operator.

Versuche mit diesem Ansatz die gewünschte $L^p - L^q$ Abschätzungen zu erhalten, könnten analog zum Satz 5.3.5 durchgeführt werden. Einige entscheidende Argumente gingen allerdings verloren, wenn $\Omega \neq \mathbb{R}^3$ nicht mehr der Ganzraum ist. Das sind zum einen die expliziten Darstellungen von $e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}t}$ und $\mathbb{P}_{\mathbb{R}^3}$ und andererseits das eng damit verknüpfte Kommutieren dieser Operatoren mit den Raumableitungen ∂_x.

Eine weiterer Ansatz, Abschätzungen wie sie in Theorem 1.2. [ShiKo] für den Oseen-Operator gefunden wurden auf den vollen Oseen-Operator zu erweitern, findet sich in [Sol3] und ist der, zunächst die einfache Oseen-Gleichung mit rechter Seite f

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + (v_\infty \cdot \nabla)u + \nabla p &= f \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ u(0) &= a \end{aligned}$$

zu betrachten und dafür zu geeigneten $m \in \mathbb{N}$ und Anfangswerten Abschätzungen der Art

$$\int_0^T \|u(s)\|_{q,2m}^r ds + \int_0^T \|\partial_s u(s)\|_q^r ds \leq C \int_0^T \|f(s)\|_q^r ds \tag{1.0.5}$$

herzuleiten. In einem nächsten Schritt könnte (1.0.5) auf den vollen Oseen-Operator ausgedehnt werden.

Führt man dieses Verfahren analog zu den Ausführungen bei [Sol3] durch, erhält man lediglich exponentielles Wachstum wie $e^{\gamma t}$ mit einem $\gamma > \gamma_0 \geq 0$. Wie bei [Sol3] müßten weitere Untersuchungen über die Resolvente und die Resolventenmenge zeigen, daß man $\gamma_0 = \sup_{z \in \sigma(\mathbb{O}+\mathcal{B})} \operatorname{Re} z$ als 0 annehmen kann. Weitere Verfeinerungen seiner Methode könnten dann evtl. auch $\gamma = \gamma_0 = 0$ zulassen. Aber genau hier, in der Untersuchung der Resolventenabschätzung, steckt sowohl bei [ShiKo] wie auch bei [Sol3] ein Großteil der Arbeit. Es läßt sich somit wohl nicht vermeiden, sich ausführlich mit den Resolventenabschätzungen für den vollen Oseen-Operator zu beschäftigen, weshalb man auch oder gerade versucht die Erweiterung der Abklingrate der vollen Oseen-Halbgruppe analog zur Vorgehensweise von [Sol3] zu erbringen. Auch meine Untersuchungen beziehen sich im Schwerpunkt darauf, basierend auf den Ergebnissen von [ShiKo], die Aussagen zur Resolvente herzuleiten. Hier bauen sogar weite Teile der Resolventenabschätzung des vollen Oseen-Operators auf denen des einfachen auf, anstatt die Beweise lediglich zu erweitern.

Letztlich wäre es denkbar einen „eigenständigen“ Beweis, analog zu der Arbeit von [Sol3] zu erstellen, der jedoch implizit die wichtigsten bei [ShiKo] gemachten Schritte enthalten würde und müßte.

Bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. von Wahl und bei Herrn Prof. Grunau für die sehr anregenden und geduldigen Gespräche, außerdem bei Manuela Weinbrenner für die geistige Unterstützung.

Kapitel 2

Stationäre Lösung von Navier-Stokes und Grundlagen

Wie schon in Kapitel 1 erwähnt, ist das Ziel des ersten Teils dieser Arbeit, die Aussagen von [ShiKo] zu dem einfachen Oseen-Operator $\mathbb{O}_e = \mathbb{P}(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla))$ auf den vollen Oseen-Operator $\mathbb{O} = \mathbb{P}(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B})$ zu erweitern, wobei wir mit dem zusätzlich eingeführte Operator an $\mathcal{B}. = (v \cdot \nabla). + (. \cdot \nabla)v$, $v := \overset{\circ}{v} - v_\infty$ und $\overset{\circ}{v}$ eine Lösung der stationären Navier-Stokes Gleichungen (1.0.1) interessiert sind. Im Folgenden möchte ich eine klare Definition und Eigenschaften von $\overset{\circ}{v}$ zu Verfügung stellen und auch $\mathcal{B}$ etwas allgemeiner definieren. Für eine Definition der verwendeten Symbole siehe Seite 179.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand für das $\mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist. Die Menge $\mathbb{R}^3 - \Omega$ heißt Hindernis. Der Vektor $0 \neq v_\infty \in \mathbb{R}_+$ heißt Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen und erfüllt lediglich zu einem willkürlich gewählten $\sigma_0 \in \mathbb{R}_+$, daß $|v_\infty| < \sigma_0$ ist.

Wir fassen Gleichung (1.0.1) zunächst im schwachen Sinn auf (siehe dazu [Galdi2, Definition 1.1, S. 63])und nehmen an, es gäbe ein Lösung $\overset{\circ}{v}$. Dann gelten folgende Regularitätsaussagen:

Satz 2.0.1 *Sei $v_\infty \in \mathbb{R}^3$ und $\overset{\circ}{v}$ eine stationäre Lösung von (1.0.1). Definiert man $v := \overset{\circ}{v} - v_\infty$ so gilt:*

$$v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{n,\infty}(\Omega) \cap \mathbb{L}^p(\Omega) \tag{2.0.1}$$

$$\nabla v \in L^r(\Omega) \tag{2.0.2}$$

$$\nabla^2 v \in L^t(\Omega) \tag{2.0.3}$$

$$v \notin L^2(\Omega) \tag{2.0.4}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $p \in (2, \infty]$, $r \in (4/3, \infty]$, $t \in (1, \infty]$

Beweis: [Galdi2, Theorem 1.1, Seite 67] $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$
[Galdi2, Th. 1.1, S. 67; Th. 6.1, S. 105] $v \in W^{n,\infty}(\Omega) \quad \forall n \geq 0$

[Galdi2, Theorem 7.1, Seite 125] $v \in L^p(\Omega)$, $\nabla v \in L^r \quad \forall p \in (2, \infty]; r \in (4/3, \infty]$,
[Galdi2, Remark 7.2, Seite 126] $\nabla^2 v \in L^p(\Omega) \quad \forall p \in (1, \infty)$,
da die dortige rechte Seite f in unserem Fall identisch verschwindet und somit alle in [Galdi2] verlangten Bedingungen erfüllt.
Daß $v \notin L^2(\Omega)$ findet sich in [Finn1]. □

Theorem 1 (Helmholz-Zerlegung) *Sei $1 < q < 3$ und $G \subset \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängendes (möglicherweise unbeschränktes) Gebiet. Sei $v \in L^q(G)^3$. Dann ist mit zwei beschränkten Operatoren Q, $\mathbb{P}$ in $L^q(G)^3$, für die*

$$Q\mathbb{P} = \mathbb{P}Q = 0,\ Q^2 = Q,\ \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$$

gilt,

$$v = Qv + \mathbb{P}v$$

Der Wertebereich $\mathcal{R}(\mathbb{P})$ von $\mathbb{P}$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $L^q(G)^3$. Er wird mit $H_q(G)$ bezeichnet. Er enthält alle $u \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$ mit $\operatorname{div} u = 0$. Diese Vektorfelder, die mit $\mathcal{C}_\sigma^\infty(G)$ bezeichnet werden, liegen dicht in $\mathcal{R}(\mathbb{P})$. Qu ist von der Form ∇g mit einem $g \in L^r(G)$, $1/r = 1/p - 1/3$, für das $\nabla g \in L^q(G)$ ist. Der Wertebereich $\mathcal{R}(Q)$ von Q wird mit $G_q(G) = \{w \in L^q : \exists g \in W^{1,r}_{\mathrm{loc}} : w = \nabla g\}$ bezeichnet. Falls $u \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$ ist, können wir Q und $\mathbb{P}$ explizit angeben. Es ist

$$\begin{aligned} Qu(x) &= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int_G \frac{1}{|x-y|} \mathit{div}\, u(y)\, dy + \operatorname{grad} p \\ \mathbb{P}u(x) &= +\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_G \frac{1}{|x-y|} \operatorname{rot} u(y)\, dy - \operatorname{grad} p \end{aligned}$$

wobei p Lösung des Neumann-Problems

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0 \quad \textit{in } G \\ \frac{\partial p}{\partial \mu} &= \left(\mu, \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_G \frac{1}{|x-y|} \operatorname{rot} u(y)\, dy\right) \quad \textit{auf } \partial G \end{aligned}$$

und μ die äußere Normale an G ist. Der Wertebereich $\mathcal{R}(Q)$ ist ebenfalls ein abgeschlossener Teilraum von $L^q(G)^3$ und wir haben die direkte Zerlegung

$$L^q(G)^3 = \mathcal{R}(Q) \oplus \mathcal{R}(\mathbb{P}) = G_q(G) \oplus H_q(G) \tag{2.0.5}$$

die man die Helmholz-Zerlegung nennt. Der Operator $\mathbb{P}$ heißt Projektor auf den divergenzfreien Teil.

Beweis: siehe [Wahl1, Satz I.9.1., Seite 215ff]. □

Bemerkung: Die Helmholz-Zerlegung ist orthogonal in $L^2(G)$. Wegen der expliziten Darstellung des Operators $\mathbb{P}$ auf den $\mathcal{C}_0^\infty$-Funktionen bedeutet divergenzfrei in L^p auch divergenzfrei in L^q, d.h. der Projektor $\mathbb{P}$ auf den divergenzfreien Teil ist auch auf dem Durchschnitt $L^p \cap L^q$ eindeutig bestimmt.

$\mathcal{C}_\sigma^\infty$ liegt dicht, wenn G die erste Betti-Zahl 0 hat, was für unser Ω der Fall ist. Allgemeiner als G können die zugrundeliegenden Gebiete wie in [Wahl1, Definition I.3.4., Seite 108] definiert sein. Beschränkt man sich darauf, daß G ganz $\mathbb{R}^3$, der Halbraum oder ∂G zumindest $\mathcal{C}^2$ ist, gilt die Helmholz-Zerlegung auch für $q \in (1, \infty)$ [Galdi1, III.1, Theorem 1.2.].

Satz 2.0.2 *Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand. Sei $1 < q < \infty$ und $0 \leq m \in \mathbb{N}$ und $u \in W^{m,q}(D)^3$. Dann existiert $p \in W^{m+1,q}(D)$ mit $\|\nabla p\|_{q,m,D} \leq c_{q,m,D}\|u\|_{q,m,D}$ das die Gleichung*

$$\begin{aligned} \Delta p &= \nabla \cdot u \quad \textit{in } D \\ \partial_\mu p &= \mu \cdot u \quad \textit{auf } \partial D \end{aligned} \tag{2.0.6}$$

erfüllt mit μ die äußere Normale an ∂D. Der Operator $\mathbb{P}_D u := u - \nabla p$ ist für $G = D$ und $1 < q < 3$ mit dem in Theorem 1 definiertem Projektor auf den divergenzfreien Anteil identisch und es gilt:

$$\mathbb{P}_D u \in W^{m,q}(D) \cap H_q(D) \tag{2.0.7}$$

Beweis: Siehe [GiMi]. Da die Zerlegung direkt ist, muß auch $\mathbb{P}_D u = \mathbb{P} u$ sein. □

Satz 2.0.3 (Beschränktheit von $\mathbb{P}$) *Sei $\mathbb{P}$ der Projektor von $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ auf den divergenzfreien Teil $H_p(\Omega)$. Dann gilt für jede ganze Zahl $m \geq 0$*

$$\mathbb{P} \, : \, W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \cap H_p(\Omega)$$

ein beschränkter Operator.

Beweis: Siehe [GiSo]. □

Da wir die volle Oseen-Gleichung auf unterschiedlichen Gebieten betrachten möchten, definieren wir um keine Mißverständnisse entstehen zu lassen den Operator $\mathcal{B}$ auf $W^{m,p}(G)$ mit $G \subset \mathbb{R}^3$, $m \in \mathbb{N}$ etwas gründlicher. Da wir außerdem bei den Beweisen nur gewisse Eigenschaften an die Struktur des Operators und an die zugrundeliegende Funktion $v = \mathring{v} - v_\infty$ benutzen, definieren wir den Operator gleich etwas allgemeiner. So werden wir an keiner Stelle benutzen, daß v eine Lösung von Navier-Stokes ist, sondern nur die Eigenschaften, daß v in den in Satz 2.0.1 erwähnten Räumen liegt.

Definition 2.0.4 (Definition von $\mathcal{B}$) *Sei $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $p > 2$, $\nabla v \in L^q(\Omega)$ mit $q > 4/3$ und $m \in \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{E}$ ein Fortsetzungsoperator bzw. die Beschränkung von Ω auf G, $G \subset \mathbb{R}^3$*

ein beschränktes oder unbeschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand und $1 \leq p \leq \infty$. *Wir definieren*

$$\mathcal{B} \,:\, W^{m+1,p}(G) \;\longrightarrow\; W^{m,q}(G) \tag{2.0.8}$$

durch

$$\mathcal{B}(u) \;:=\; \nabla\big(\mathcal{E}v \otimes u + u \otimes \mathcal{E}v\big) \tag{2.0.9}$$

für geeignete m, p, q. *Dabei meinen wir mit* $\mathcal{E}v \otimes u$ *die Matrix* $(\mathcal{E}v_i u_j)_{i,j=1,2,3}$ *und mit* $\nabla. = (c_i\partial_i, c_j\partial_j, c_k\partial_k)\,\cdot$. *einen beliebigen, vektoriellen Ableitungsoperator erster Ordnung (z.B. Divergenz). Beachte auch die Ungleichungen von Satz 2.0.5.*

Da $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ *beschränkt ist, lassen wir den Fortsetzungsoperator in der Notation weg, wenn dadurch keine Probleme entstehen.*

Beweis: Zur Existenz von Fortsetzungsoperatoren siehe [Adams, Chapter IV, Extension Theorems, S. 83ff].

□

Beispiel:

(i) Ist v divergenzfrei, also $\nabla \cdot v = 0$ und der Ableitungsoperator $\nabla = \text{div} = \nabla\cdot$ die Divergenz, so reduziert sich $\mathcal{B}$ offensichtlich zu

$$\mathcal{B}u = (v \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)v \quad \forall u \in H_p$$

zu dem schiefsymmetrischen Operator in der Störungsgleichung für alle divergenzfreien u.

(ii) Hat $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ kompakten Träger, so hat auch $\mathcal{B}u$ kompakten Träger und $\mathcal{B} : W^{m,p} \longrightarrow W^{n,q}$ ist ein kompakter Opertor für geeignete m, n, p, q.

Satz 2.0.5 *Sei* $1 \leq p \leq \infty$, $u \in W^{m,p}(G)$ *und der in Definition 2.0.4 definierte Operator* $\mathcal{B}$. *Dann gelten folgende Ungleichungen:*

$$\|\mathcal{B}u\|_{q,m} \leq \; c_{p,q}\|\nabla u\|_{p,m} \qquad \forall 3 > p \geq q \geq 1 \text{ und } \frac{12}{5} < \frac{pq}{p-q},\; m \geq 0 \tag{2.0.10}$$

$$\|\mathcal{B}u\|_{q,m} \leq \; c_{p,q}\|u\|_{p,m+1} \qquad \forall p \geq q \geq 1 \text{ und } 2 < \frac{pq}{p-q} \tag{2.0.11}$$

$$\|\mathcal{B}u\|_{q,m} \leq \; c_{p,q}\|\nabla^2 u\|_{p,m} \qquad \forall\, 1 \leq p < \min\left\{\frac{3}{2}, \frac{12q}{12-q}\right\},\; m \geq 0 \tag{2.0.12}$$

Sämtliche Konstanten sind abhängig von der stationären Lösung v.

Bemerkung: Einen Beweis zu (2.0.12) für den Fall $p = q$, $m = 0$ findet sich in [Bo, Miy.4, Lemma 3.1]. Die Autoren verwenden dabei nur die schwächeren Voraussetzungen $\sup_{x\in G}|x||v(x)| < \infty$ und $\sup_{x\in G}|x|^2|\nabla v(x)| < \infty$.

Beweis: Zu (2.0.10): Nach Sobolev haben wir die folgende Einbettung (siehe auch Satz 2.0.12):

$$W^{m+1,p}(G) \hookrightarrow W^{m,\frac{3p}{3-p}}(G)$$

mit der zugehörigen Ungleichung

$$\|u\|_{\frac{3p}{3-p},m} \;\; \leq \;\; c_p\|\nabla u\|_{p,m}$$

mit einer gebietsunabhängigen Konstanten $c_{p,q}$ (vergl. [Adams]). Sei $r := 3pq/(3p-3q+pq)$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} < \; r \; = \; \frac{3pq}{3p-3q+pq} \\ \iff \quad & \frac{12}{3}(p-q) + \frac{4}{3}pq < \; 3pq \\ \iff \quad & \frac{12}{5} < \; \frac{pq}{p-q} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}u\|_{q,m} &\leq \; \|\nabla(\mathcal{E}v \otimes u)\|_{q,m} + \|\nabla(u \otimes \mathcal{E}v)\|_{q,m} \\ &\leq \; c_p\|\mathcal{E}v\|_{\frac{pq}{p-q},m}\|\nabla u\|_{p,m} + c_p\|\nabla\mathcal{E}v\|_{r,m}\|u\|_{\frac{3p}{3-p},m} && \text{nach Hölder, da } p < 3 \\ &\leq \; c_{p,q}\left(\|\mathcal{E}v\|_{\frac{pq}{p-q},m} + \|\nabla\mathcal{E}v\|_{r,m}\right)\|\nabla u\|_{p,m} && \text{Einbettung} \\ &\leq \; c_{p,q}\left(\|v\|_{\frac{pq}{p-q},m} + \|\nabla v\|_{r,m}\right)\|\nabla u\|_{p,m} && \text{nach Definition von } \mathcal{E} \\ &\leq \; c_{p,q}\|\nabla u\|_{p,m} && \text{Satz 2.0.1 (2.0.1), (2.0.2)} \end{aligned}$$

für $\frac{pq}{p-q} > \frac{12}{5} > 2$.

Zu (2.0.11):

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}u\|_{q,m} &\leq \; \|\nabla(\mathcal{E}v \otimes u)\|_{q,m} + \|\nabla(u \otimes \mathcal{E}v)\|_{q,m} \\ &\leq \; c_p\|\mathcal{E}v\|_{\frac{pq}{p-q},m}\|\nabla u\|_{p,m} + \|\nabla\mathcal{E}v\|_{\frac{pq}{p-q},m}\|u\|_{p,m} && \text{Hölder} \\ &\leq \; c_{p,q}\left(\|\mathcal{E}v\|_{\frac{pq}{p-q},m} + \|\nabla\mathcal{E}v\|_{\frac{pq}{p-q},m}\right)\|u\|_{p,m+1} \\ &\leq \; c_{p,q}\|\mathcal{E}v\|_{\frac{pq}{p-q},m+1}\|u\|_{p,m+1} \\ &\leq \; c_{p,q}\|v\|_{\frac{pq}{p-q},m+1}\|\nabla u\|_{p,m} && \text{nach Definition von } \mathcal{E} \\ &\leq \; c_{p,q}\|u\|_{p,m+1} && \text{Satz 2.0.1 (2.0.1), (2.0.2)} \end{aligned}$$

für $\frac{pq}{p-q} > 2 > 4/3$.

Zu (2.0.12):

$$\|\mathcal{B}u\|_{q,m} \;\; \leq \;\; \|v\|_{\frac{3pq}{3p-3q+pq},m}\|\nabla u\|_{\frac{3p}{3-p},m} + \|\nabla v\|_{\frac{3pq}{3p-3q+2pq},m}\|u\|_{\frac{3p}{3-2p},m}$$

Mit Sobolevungleichungen folgt für $p < 3/2$

$$\leq \|v\|_{\frac{3pq}{3p-3q+pq},m}\|\nabla^2 u\|_{p,m} + \|\nabla v\|_{\frac{3pq}{3p-3q+2pq},m}\|\nabla^2 u\|_{p,m}$$

Für $p < \frac{12q}{12-q}$ folgt außerdem

$$\frac{3pq}{3p-3q+pq} > 2 \text{ und } \frac{3pq}{3p-3q+2pq} > \frac{4}{3}$$

□

Definition 2.0.6 (Stokes-Operator) *Sei $q \geq 1$, $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes oder unbeschränktes Gebiet und*

(2.0.13) $$\mathcal{D}_q(\mathbb{A}_{q,G}) := H_q(G) \cap W_0^{1,q}(G) \cap W^{2,q}(G)$$

Der Operator $\mathbb{A}_{q,G} := -\mathbb{P}\Delta$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_q(\mathbb{A}_{q,G})$ heißt Stokes-Operator. Sind Verwechselungen ausgeschlossen, schreiben wir auch kurz $\mathbb{A}$ statt $\mathbb{A}_{q,G}$.

Bemerkung: Die Menge

$$\sum\nolimits_0 := \mathbb{R}^2 - \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq 0, \operatorname{Im}\lambda = 0\}$$

ist in der Resolventenmenge von $-\mathbb{A}$ enthalten [BoSo, Gi1, Gi2]. In $H_q(G)$ erzeugt $\mathbb{A}_q$ eine analytische Halbgruppe [Wahl2, Theorem III.1.3., Seite 74] und es ist $\mathcal{D}_q(\mathbb{A}^{1/2}) = H_q(G) \cap W_0^{1,q}(G)$. Für $q = 2$ ist $\mathbb{A}$ ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum H_2 und $\|\mathbb{A}^{1/2}u\|_2 = \|\nabla u\|_2$.

In beschränkten Gebieten lassen sich die Abschätzungen des Stokes-Operator verfeinern:

Satz 2.0.7 *Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit (hinreichend) glattem Rand ∂D. Sei $1 < q < \infty$ und $m \geq 0$ eine natürliche Zahl. Zu jedem $f \in W^{m,q}(D)^3$ existiert genau ein $u \in W^{m+2,q}(D)^3$ und bis auf eine additive Konstante ein eindeutig bestimmtes $p \in W^{m+1,q}(D)$, die die Gleichungen*

(2.0.14) $$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f \quad \textit{in } D \\ \nabla \cdot u &= 0 \quad \textit{in } D \\ u|_{\partial D} = 0 & \end{aligned}$$

erfüllen und die folgende Abschätzung ist gültig

(2.0.15) $$\|u\|_{q,m+2,D} + \|\nabla p\|_{q,m,D} \leq c_{q,m,D}\|f\|_{q,m,D}$$

Beweis: Siehe dazu [Galdi1, Gi1, Lady, Sol1, Sol2] und auch die Ausführungen von von Wahl in [Wahl2, Seite 72ff]. □

Definition 2.0.8 (Oseen-Operator) *Sei $q \geq 1$, $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes oder unbeschränktes Gebiet und*

$$\mathcal{D}_q(\mathbb{O}_{q,G}) := \mathcal{D}_q(\mathbb{O}_{eq,G}) := \mathcal{D}_q(\mathbb{A}_{q,G})$$

Der Operator $\mathbb{O}_{eq,G} := \mathbb{P}(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla))$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_q(\mathbb{O}_{eq,G})$ heißt einfacher Oseen-Operator. Der (volle) Oseen-Operator ist durch $\mathbb{O}_{q,G} := \mathbb{P}(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla)) + \mathcal{B}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_q(\mathbb{O}_{q,G})$ definiert. Wenn klar ist, um welches q und welches Grundgebiet G es sich handelt, lassen wir dir zugehörigen Indizes auch weg.

Die Wohldefiniertheit folgt aus Definition 2.0.4 des Operators $\mathcal{B}$ und Definition 2.0.6 des Stokes-Operators.

Verantwortlich für kompakte Soboleveinbettungen vom Typ $W^{j+m,p}(D) \hookrightarrow W^{j,q}$ für $1 \leq q < p/(3-mp)$, [Adams] sind Abschätzungen wie im folgenden Satz, die auf allgemeinen, unbeschränkten Gebieten verloren gehen [Adams, Theorem 6.37 S. 163, Theorem 6.38 S.164].

Satz 2.0.9 (Poincaré) *Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $\tilde{D} \subset D$ eine Menge mit positiven Lebesque-Maß und $1 < p < \infty$. Dann gilt*

$$\|v\|_{p,D} \leq c_{D,\tilde{D}} \left(\|\nabla v\|_{p,D} + \left| \int_{\tilde{D}} v(x)\, dx \right| \right) \quad \forall\, v \in W^{1,p}(D) \tag{2.0.16}$$

$$\|v\|_{p,D} \leq c_D \|\nabla v\|_{p,D} \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(D) \tag{2.0.17}$$

Ist $0 \leq m \in \mathbb{N}$, dann existiert für jedes $u \in W^{m,p}(D)$ ein $v \in W^{m,p}(\mathbb{R}^3)$, so daß

$$\begin{aligned} v &= u \quad \text{in } D \text{ und} \\ \|v\|_{p,m,\mathbb{R}^3} &\leq c_{p,m,D} \|u\|_{p,m,D} \end{aligned}$$

mit einer von u und v unabhängigen Konstanten $c_{p,m,D}$.

Beweis: Siehe zum ersten Teil [Galdi1, II.4] und [Galdi1, II.2] zum zweiten Teil. □

Definition 2.0.10 (Energetische Reynoldszahl) *Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, $\mathcal{B}$ der in Satz 2.0.4 definierte Operator . Dann heißt die Zahl*

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{E}}(v) = \mathrm{Re}_{\mathrm{E}}(\mathcal{B}) := \sup_{w \in \mathcal{D}\left(\mathbb{A}_2^{1/2}\right) \setminus \{0\}} \frac{\langle -\mathcal{B}w, w \rangle_G}{\|\nabla w\|_2^2} \tag{2.0.18}$$

energetische Reynoldszahl von $\mathcal{B}$ bzw. Reynoldszahl von v. Ist das dem Operator$\mathcal{B}$ zugrundegelegte v divergenzfrei und der Ableitungsoperator in $\mathcal{B}$ gleich der Divergenz, so ist offensichtlich

$$\sup_{w \in \mathcal{D}\left(\mathbb{A}_2^{1/2}\right) \setminus \{0\}} \frac{\langle -\mathcal{B}w, w \rangle_G}{\|\nabla w\|_2^2} = \sup_{w \in \mathcal{D}\left(\mathbb{A}_2^{1/2}\right) \setminus \{0\}} \frac{\langle v, (w \cdot \nabla) w \rangle_G}{\|\nabla w\|_2^2} \tag{2.0.19}$$

und heißt Reynoldszahl von v.

Für später (Kapitel 4.3) sei hier ein nützliches Hilfsmittel eingeführt. Bekanntlich ist $f \in L^q$, falls $f \in L^p \cap L^r$ und $p < q < r$. Für Operatoren gilt der folgende Satz. Ein Beweis findet sich bei [Hörmander, Theorem 7.1.12, S.: 165]

Satz 2.0.11 *Sei T eine lineare Abbildung von $L^{p_1} \cap L^{p_2}$ nach $L^{q_1} \cap L^{q_2}$, so daß*

$$\|Tf\|_{q_j} \quad \leq \quad M_j \|f\|_{p_j} \qquad j = 1, 2$$

und sei $1/p = t/p_1 + (1-t)/p_2$, $1/q = t/q_1 + (1-t)/q_2$ für $t \in (0, 1)$. Dann ist

$$\|Tf\|_q \quad \leq \quad M_1^t M_2^{1-t} \|f\|_p \qquad f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$$

Beweis: [Hörmander, Theorem 7.1.12, S.: 165] □

Satz 2.0.12 (Sobolevungleichung) *Sei $1 \leq p < 3$, $G = \mathbb{R}^3$ oder $G = \Omega$ wobei $\partial\Omega$ Lipschitz ist. Sei $f \in L^p(G \cap B_R), \forall R > 0, \nabla f \in L^p(G)^3$ und die Spur $f|_{\partial G} = 0$. Dann existiert $c_p \in \mathbb{R}$, so daß $f_0 - c_p \in L^{p^*}(\mathbb{R}^3)$, wobei $p^* = 3p/(3-p)$ der kritische Sobolevexponent und f_0 gegebenenfalls die Fortsetzung von f mit 0 auf ganz $\mathbb{R}^3$ sind.*

Insbesondere ist $c_p = 0$, falls $f \in L^r(G)$ mit irgendeinem $1 \leq r < \infty$.

Beweis: Sobolevungleichungen finden sich für $\mathcal{C}_0^\infty$ Funktionen in [Friedmann], [Adams, 5.11, S.: 104] und gelten damit offensichtlich auch für $W_0^{1,p}(G)$ (siehe z.B. [Galdi1, (2.6), S.: 31]). Ein Beweis für unsere Formulierung ist in [SiSo, Theorem 2.13, S.: 34] zu finden.

□

Kapitel 3

Oseen-Gleichung in beschränkten Gebieten

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Oseen-Gleichung auf beschränkten Grundgebieten $D \subset \mathbb{R}^3$. Die Reynoldszahl von v bzw. $\mathcal{B}$ wird als echt kleiner 1 angenommen. Wie schon in (1.0.3) eingeführt sei

$$\sum\nolimits_{v_\infty} = \{\lambda \in \mathbb{C} | |v_\infty|^2 \operatorname{Re} \lambda + (\operatorname{Im} \lambda)^2 > 0\}$$

Diese Menge entspricht „fast“ der Resolventenmenge des einfachen Oseen-Operators. Wie schon in der Einführung erwähnt, läßt die Hinzunahme von $\mathcal{B}$ zwar die Struktur von $\sum_{v_\infty}$ im Wesentlichen unberührt, jedoch muß der Faktor $|v_\infty|^2$ vergrößert werden. Für den vollen Oseen-Operator führen wir die Menge

$$\sum\nolimits_{v_\infty, v} = \{\lambda \in \mathbb{C} | \frac{(|v_\infty| + C)^2}{1 - \mathrm{Re}_\mathrm{E}} \operatorname{Re} \lambda + (\operatorname{Im} \lambda)^2 > 0\} \tag{3.0.1}$$

ein, wobei die Konsatnte $C = C(v)$ eine noch näher zu bestimmende von der stationären Lösung v abhängende Abschätzungskonstante und Re_E die Reynoldszahl sind.

Schon im nächsten Satz wird deutlich, warum $-\sum_{v_\infty, v}$ in der Resolventenmenge des Oseen-opertors liegt, genauer werden wir sogar sehen, daß $-\sum_{v_\infty, v} \cup U_\epsilon(0)$ in der Resolventenmenge liegt, wenn wir nur beschränkte Gebiete betrachten.

Rein formal definieren wir für $\lambda \in \mathbb{C}$ den Operator

$$\mathcal{Q}_\lambda u \quad = \quad (\lambda - \Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B}) \tag{3.0.2}$$

wobei $\mathcal{B}(u) := \nabla\big(\mathcal{E}v \otimes u + u \otimes \mathcal{E}v\big)$ der in Definition 2.0.4 definierte Operator. Zur Untersuchung der Resolventenmenge fassen wir diesen Operator für Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}^3$ auf.

Es gilt:

Satz 3.0.13 *Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet, die Reynoldszahl $\mathrm{Re}_\mathrm{E} < 1$, $1 < p < \infty$, $0 \leq m \in \mathbb{N}$ Dann existiert $\epsilon = \epsilon(v_\infty, D) > 0$, $\mathcal{U}_\epsilon(0) \subset \mathbb{C}$ eine ϵ-Umgebung der $0 \in \mathbb{C}$ und*

Abbildungen

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_{v_\infty,v,D} &: \sum\nolimits_{v_\infty} \cup\, \mathcal{U}_\epsilon(0) \times W^{m,p}(D) \times \mathbb{C} \longrightarrow W^{m+2,p}(D), \quad (\lambda, f, c) \longmapsto \mathbb{L}(\lambda, f, c) \\
\mathcal{I}_{v_\infty,v,D} &: \sum\nolimits_{v_\infty} \cup\, \mathcal{U}_\epsilon(0) \times W^{m,p}(D) \times \mathbb{C} \longrightarrow W^{m+1,p}(D), \quad (\lambda, f, c) \longmapsto \mathcal{I}(\lambda, f, c)
\end{aligned}$$

die holomorph in λ und linear stetig in f und c sind, so daß $u := \mathbb{L}_{v_\infty,v,D}(\lambda, f, c)$ und $p := \mathcal{I}_{v_\infty,v,D}(\lambda, f, c)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_\lambda u + \nabla p &= f \quad \textit{in } D \\
\nabla \cdot u &= 0 \quad \textit{in } D \\
u|_{\partial D} &= 0 \\
\int_D p(x)\, dx &= c
\end{aligned} \tag{3.0.3}$$

eindeutig lösen. Sind Verwechselungen ausgeschlossen, lassen wir die Indizes an $\mathbb{L}$ und $\mathcal{I}$ auch weg.

Sei $0 \leq k \in \mathbb{N}$, $|v_\infty| < \sigma_0$ und $K \subset\subset \sum_{v_\infty} \cup \mathcal{U}_\epsilon(0)$ eine kompakte Menge. Dann gilt für jedes $f \in W^{m,p}(D)$, $c \in \mathbb{C}$, $|v_\infty|, |v_\infty{}'| < \sigma_0$ und $\lambda, \lambda' \in K$

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^k \mathbb{L}_{v_\infty,v,D}(\lambda, f, c) \right\|_{p,m+2,D} + \left\| \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^k \mathcal{I}_{v_\infty,v,D}(\lambda, f, c) \right\|_{p,m+1,D} \\
&\leq C \left(\|f\|_{p,\max\{m-k,0\},D} + |c| \right)
\end{aligned} \tag{3.0.4}$$

$$\begin{aligned}
&\|\mathbb{L}_{v_\infty,v,D}(\lambda, f, c) - \mathbb{L}_{v_\infty{}',v,D}(\lambda', f, c)\|_{p,m+2,D} + \|\mathcal{I}_{v_\infty,v,D}(\lambda, f, c) - \mathcal{I}_{v_\infty{}',v,D}(\lambda', f, c)\|_{p,m+1,D} \\
&\leq C \left(|v_\infty - v_\infty{}'| + |\lambda - \lambda'| \right) \left(\|f\|_{p,m,D} + |c| \right)
\end{aligned} \tag{3.0.5}$$

mit Konstanten $C = C(p, m, D, K, k, v, \sigma_0)$.

Bemerkung: Der Sinn die Abhängigkeit der Lösungsoperatoren in v_∞ zu untersuchen liegt darin die explizite Größe v_∞ implizit durch σ_0 mit $|v_\infty| \leq \sigma_0$ betrachten zu können. Diese Unterscheidung war mit ein Grund, warum Kobayashi und Shibata viele in der Literatur existierenden Aussagen mit in ihre Arbeit [ShiKo] aufgenommen haben um die Abhängigkeiten der Abschätzungskonstanten von Parametrn wie v_∞ zu überprüfen.

Beweis: Im beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ existiert zum Stokes-Operator $\mathbb{A} = \mathbb{A}_D$ nach Satz 2.0.7 eine beschränkte Inverse $\mathbb{A}^{-1} : W^{m+1,p}(D) \to W^{m+3,p}(D) \cap \mathcal{D}_p(\mathbb{A})$. Wenden wir $\mathbb{P}$ und dann $\mathbb{A}^{-1}$ auf Gleichung (3.0.3) an, so haben wir wegen $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}(-\Delta) = \mathbb{I}$

$$
\begin{aligned}
& (\mathbb{I} + \mathbb{Q}(v_\infty, \lambda))u \\
(3.0.6) \qquad &= \left(\mathbb{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}(\lambda + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B})\right) u \\
&= \left(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}(\lambda - \Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B})\right) u \\
&= \mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}\mathcal{Q}_\lambda u \\
&= \mathbb{A}^{-1}\mathbb{P} f
\end{aligned}
$$

wobei der Operator $\mathbb{Q}(v_\infty, \lambda)$ definiert ist durch

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Q}(v_\infty, \lambda) := \mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}(\lambda + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B}) : \\
&\qquad W^{m+2,p}(D) \cap \mathcal{D}(\mathbb{A}) \longrightarrow W^{m+3,p}(D) \cap \mathcal{D}(\mathbb{A}) \subset\subset W^{m+2,p}(D) \cap \mathcal{D}(\mathbb{A})
\end{aligned}
$$

und kompakt ist.

Daher läßt sich auf $\mathbb{I} + \mathbb{Q}(v_\infty, \lambda)$ die *Fredholmsche Alternative* anwenden. Um zu zeigen, daß $\mathbb{I} + \mathbb{Q}(v_\infty, \lambda)$ eine beschränkte Inverse hat, genügt es also Injektivität von $\mathbb{I} + \mathbb{Q}(v_\infty, \lambda)$ nachzuweisen.

Angenommen es gäbe ein $g \in W^{m+2,p}(D) \cap \mathcal{D}(\mathbb{A})$ mit

$$(\mathbb{I} + \mathbb{Q}(v_\infty, \lambda))g = 0$$

Wir zeigen, daß dann g schon identisch 0 ist: Aus $(\mathbb{I} + \mathbb{Q}(v_\infty, \lambda))g = 0$ folgt

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathbb{A}(\mathbb{I} + \mathbb{Q}(v_\infty, \lambda))g \\
&= \mathbb{A}(\mathbb{I} + \mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}(\lambda + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B}))g \\
&= \mathbb{P}(\lambda - \Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B})g \\
&= \mathbb{P}\mathcal{Q}_\lambda g
\end{aligned}
$$

Aus Satz 2.0.2 wissen wir, daß dann ein $p \in W^{m+1,p}(D)$ existiert, so daß

$$\mathcal{Q}_\lambda g + \nabla p = 0$$

in D gilt. Oder anders geschrieben

$$-\Delta g + \nabla p = f$$

mit $f := -(\lambda + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B}))g$. Nach Definition 2.0.4 bzw. Satz 2.0.5 ist $f, \nabla p \in W^{m+i,p}(D) \cap \mathcal{D}(\mathbb{A})$ für zunächst $i = 1$, da $g \in W^{m+i+1,p}(D) \cap \mathcal{D}(\mathbb{A})$. Und daher nach Satz 2.0.7

$$g \in W^{m+i+3,p}(D) \cap \mathcal{D}(\mathbb{A})$$

Nach dem Induktionsschritt $i \to i + 1$ sieht man also, daß g und p hinreichend glatt sind. Da außerdem D beschränkt ist, haben wir daher

$$g \in W^{2,2}(D) \cap W_0^{1,2}(D) \cap H_2(D), \ p \in W^{1,2}(D)$$

$g \in H_2(D)$, weil divergenzfrei in $L^p(D)$ und divergenzfrei in $L^2(D)$ auf dem Durchschnitt das selbe ist (Siehe auch Bemerkung zu Theorem 1).

Mit Hilfe partieller Integration und der Tatsache, daß die Helmholz-Zerlegung in L^2 orthogonal ist, ist $< \nabla p, g >_D = 0$, $\mathrm{Re}(< (v_\infty \cdot \nabla)g, g >_D) = 0$ und es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= < \mathcal{Q}_\lambda g + \nabla p, g >_D \\
&= < (\lambda - \Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B}))g + \nabla p, g >_D \\
&= (\mathrm{Re}\,\lambda)\|g\|_{2,D}^2 + i(\mathrm{Im}\,\lambda)\|g\|_{2,D}^2 + \|\nabla g\|_{2,D}^2 + < (v_\infty \cdot \nabla)g, g >_D + < \mathcal{B}g, g >_D \\
&= (\mathrm{Re}\,\lambda)\|g\|_{2,D}^2 + \|\nabla g\|_{2,D}^2 + \mathrm{Re}(< \mathcal{B}g, g >_D) \\
&\quad + i\left((\mathrm{Im}\,\lambda)\|g\|_{2,D}^2 + \mathrm{Im}(< (v_\infty \cdot \nabla)g, g >_D) + \mathrm{Im}(< \mathcal{B}g, g >_D)\right)
\end{aligned}$$

also

$$0 = (\mathrm{Re}\,\lambda)\|g\|_{2,D}^2 + \|\nabla g\|_{2,D}^2 + \mathrm{Re}(< \mathcal{B}g, g >_D) \tag{3.0.7}$$

$$0 = (\mathrm{Im}\,\lambda)\|g\|_{2,D}^2 + \mathrm{Im}(< (v_\infty \cdot \nabla)g, g >_D) + \mathrm{Im}(< \mathcal{B}g, g >_D) \tag{3.0.8}$$

Da die Helmholz-Zerlegung in L^2 orthogonal ist und g divergenzfrei, haben wir zusammen mit partieller Integration und der Definition der Reynoldszahl

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re} < \mathcal{B}g, g >_D &= < \mathcal{B}\,\mathrm{Re}\,g, \mathrm{Re}\,g >_D + < \mathcal{B}\,\mathrm{Im}\,g, \mathrm{Im}\,g >_D \\
&\geq -\mathrm{Re}_{\mathrm{E}}\left(\|\nabla\,\mathrm{Re}\,g\|_2^2 + \|\nabla\,\mathrm{Im}\,g\|_2^2\right) \\
&= -\mathrm{Re}_{\mathrm{E}}\,\|\nabla g\|_2^2
\end{aligned}$$

Somit schreibt sich (3.0.7)

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathrm{Re}\,\lambda)\|g\|_{2,D}^2 + \|\nabla g\|_{2,D}^2 + \mathrm{Re}(< \mathcal{B}g, g >_D) \\
&\geq (\mathrm{Re}\,\lambda)\|g\|_{2,D}^2 + \|\nabla g\|_{2,D}^2 - \mathrm{Re}_{\mathrm{E}}\,\|\nabla g\|_2^2 \\
&= (\mathrm{Re}\,\lambda)\|g\|_{2,D}^2 + (1 - \mathrm{Re}_{\mathrm{E}})\|\nabla g\|_{2,D}^2
\end{aligned}$$

Wenn $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ ist, folgt daraus, daß $\nabla g = 0$ in D ist und aufgrund der Nullrandbedingungen von g impliziert das schon $g = 0$.

Wenn $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ ist, folgt aus (3.0.8), Satz 2.0.5 und Poincare, da $g \in H_2(D)$ ist

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{Im}\,\lambda|\|g\|_{2,D}^2 &= |\mathrm{Im}(< (v_\infty \cdot \nabla)g, g >_D) + \mathrm{Im}(< \mathcal{B}g, g >_D)| \\
&\leq |< (v_\infty \cdot \nabla)g, g >_D| + |< \mathcal{B}g, g >_D| \\
&\leq |v_\infty|\|\nabla g\|_{2,D}\|g\|_{2,D} + \|v\|_\infty\|\nabla g\|_{2,D}\|g\|_{2,D} + \|\nabla v\|_\infty\|g\|_{2,D}\|g\|_{2,D} \\
&\leq |v_\infty|\|\nabla g\|_{2,D}\|g\|_{2,D} + \|v\|_\infty\|\nabla g\|_{2,D}\|g\|_{2,D} + C_{p,D}\|\nabla v\|_\infty\|g\|_{2,D}\|\nabla g\|_{2,D} \\
&\leq (|v_\infty| + C_{p,D}\|v\|_{\infty,1})\|\nabla g\|_{2,D}\|g\|_{2,D} \\
&\leq (|v_\infty| + C_{p,D}\|v\|_{\infty,1})\sqrt{\frac{-\mathrm{Re}\,\lambda}{1 - \mathrm{Re}_{\mathrm{E}}}}\|g\|_{2,D}^2
\end{aligned}$$

also

$$\left(|\operatorname{Im}\lambda|^2+\operatorname{Re}\lambda\frac{(|v_\infty|+C)^2}{1-\operatorname{Re}_{\mathrm{E}}}\right)\|g\|_{2,D}^4 \quad\leq\quad 0$$

wobei $C=C_{p,D}\|v\|_{\infty,1}$ ist. Das bedeutet auch in diesem Fall $g=0$, da wegen $\lambda\in\sum_{v_\infty,v}$ der Faktor $|\operatorname{Im}\lambda|^2+\operatorname{Re}\lambda(|v_\infty|+C)^2/(1-\operatorname{Re}_{\mathrm{E}})>0$ ist.

In jedem Fall also, ist $g=0$ für $\lambda\in\sum_{v_\infty,v}\cup\{0\}$ und daher besitzt $\mathbb{I}+\mathbb{Q}(v_\infty,\lambda)$ eine beschränkte Inverse $\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)$ von und nach $W^{m+2,p}(D)\cap\mathcal{D}(\mathbb{A})$.

Schreiben wir die Inverse mit Hilfe der Neumannschen Reihe etwas anders:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)^{-1}\mathcal{R}(v_\infty{}',\lambda') &= \left(\mathcal{R}(v_\infty{}',\lambda')^{-1}\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\right)^{-1}\\
&= \left((\mathbb{I}+\mathbb{Q}(v_\infty{}',\lambda'))\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\right)^{-1}\\
&= \left((\mathbb{I}+\mathbb{Q}(v_\infty,\lambda)+\mathbb{Q}(v_\infty{}',\lambda')-\mathbb{Q}(v_\infty,\lambda))\,\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\right)^{-1}\\
&= \left(\mathbb{I}+(\mathbb{Q}(v_\infty{}',\lambda')-\mathbb{Q}(v_\infty,\lambda))\,\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\right)^{-1}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}\left((v_\infty{}'-v_\infty)\cdot\nabla+(\lambda'-\lambda)\right)\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\right)^j
\end{aligned}$$

Also

$$\mathcal{R}(v_\infty{}',\lambda') \;=\; \mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}\left((v_\infty{}'-v_\infty)\cdot\nabla+(\lambda'-\lambda)\right)\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\right)^j$$

für alle $\lambda\in\sum_{v_\infty,v}\cup\{0\}$. Diese Reihe konvergiert in der Operatorennorm von $\mathcal{L}\left(W^{m+2,p}(D)\right)$, vorausgesetzt die Summenden sind hinreichend klein. Es gibt daher ein $\epsilon=\epsilon(v_\infty,\lambda)$, so daß für alle $v_\infty{}',\lambda'$ mit $|v_\infty{}'-v_\infty|+|\lambda'-\lambda|<\epsilon$ die Reihe konvergiert und es gilt

(3.0.9) $$\|\mathcal{R}(v_\infty{}',\lambda')\|_{\mathcal{L}(W^{m+2,p}(D))} \;=\; 2\,\|\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\|_{\mathcal{L}(W^{m+2,p}(D))}$$

Insbesondere ist zu einem festen $v_\infty\in\mathbb{R}^3$ der Operator $\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)$ für alle $\lambda\in\sum_{v_\infty,v}\cup\mathcal{U}_{\epsilon(\lambda=0)}(0)$ definiert.

Eine Funktion $h=h(z)$ ist holomorph in z, falls eine in z stetige Funktion $\Delta(z,z')$ existiert mit $|\Delta(z,z')|\to 0$ für $z'\to z$ und $h(z')=h(z)+(z'-z)\Delta(z,z')$. Die Darstellung von $\mathcal{R}(v_\infty{}',\lambda')$ zeigt

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(v_\infty,\lambda') &= \mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}\left((\lambda'-\lambda)\right)\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\right)^j\\
&= \mathcal{R}(v_\infty,\lambda)+(\lambda'-\lambda)\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j(\lambda'-\lambda)^{j-1}\left(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\right)^j
\end{aligned}$$

und $\Delta(z,z'):=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j(\lambda'-\lambda)^{j-1}\left(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\right)^j$ ist die gesuchte in λ stetige Funktion. Somit ist $\mathcal{R}$ holomorph in λ.

Nach Definition von $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}\mathcal{Q}_\lambda = \mathbb{Q} + \mathbb{I} \iff \mathbb{P}\mathcal{Q}_\lambda = \mathbb{A}(\mathbb{Q} + Id)$ (siehe auch (3.0.6)). Für $f \in W^{m,p}(D)$ folgt daraus
(3.0.10)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\mathcal{Q}_\lambda(\mathcal{R}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}f) &= \mathbb{A}(\mathbb{Q}+\mathbb{I})\mathcal{R}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}f \\ &= \mathbb{P}f \end{aligned}$$

Da $K \subset\subset \sum_{v_\infty,v} \cup \mathcal{U}_\epsilon(0)$ kompakt ist, ist es auch $K \times \overline{\mathcal{U}_{\sigma_0}(0)}$. Es existieren daher endlich viele $(\lambda_j, v_{\infty j}) \in K \times \overline{\mathcal{U}_{\sigma_0}(0)},\ j = 1, \dots, L$, so daß

$$K = \bigcup_{j=1}^{L} \left\{ (\lambda_j, v_{\infty j}) \in K \times \overline{\mathcal{U}_{\sigma_0}(0)} : |v_\infty - v_{\infty j}| + |\lambda - \lambda_j| < \epsilon(\lambda_j, v_{\infty j}) \right\}$$

Setzen wir

$$N_{p,m,K,\sigma_0} := 2 \max_{1\le j\le L} \left\| \mathcal{R}(v_{\infty j}, \lambda_j) \right\|_{\mathcal{L}(W^{m+2,p}(D))}$$

so folgt wegen (3.0.9)

$$\text{(3.0.11)} \qquad \|\mathcal{R}(v_\infty, \lambda)\|_{\mathcal{L}(W^{m+2,p}(D))} \le N_{p,m,K,\sigma_0} \quad \forall (\lambda, v_\infty) \in K \times \overline{\mathcal{U}_{\sigma_0}(0)}$$

Und wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(v_\infty', \lambda') - \mathcal{R}(v_\infty, \lambda) &= \left(\mathbb{I} - \mathcal{R}(v_\infty, \lambda)\mathcal{R}(v_\infty', \lambda')^{-1}\right) \mathcal{R}(v_\infty', \lambda') \\ &= \left(\mathcal{R}(v_\infty, \lambda)\mathcal{R}(v_\infty, \lambda)^{-1} - \mathcal{R}(v_\infty, \lambda)\mathcal{R}(v_\infty', \lambda')^{-1}\right) \mathcal{R}(v_\infty', \lambda') \\ &= \mathcal{R}(v_\infty, \lambda) \left(\mathcal{R}(v_\infty, \lambda)^{-1} - \mathcal{R}(v_\infty', \lambda')^{-1}\right) \mathcal{R}(v_\infty', \lambda') \\ &= \mathcal{R}(v_\infty, \lambda) \left(\mathbb{Q}(v_\infty, \lambda) - \mathbb{Q}(v_\infty', \lambda')\right) \mathcal{R}(v_\infty', \lambda') \\ &= \mathcal{R}(v_\infty, \lambda)\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}\left((v_\infty - v_\infty')\cdot\nabla + (\lambda - \lambda')\right) \mathcal{R}(v_\infty', \lambda') \end{aligned}$$

impliziert (3.0.11)

$$\text{(3.0.12)} \qquad \|\mathcal{R}(v_\infty', \lambda') - \mathcal{R}(v_\infty, \lambda)\|_{\mathcal{L}(W^{m+2,p}(D))} \le C\left(|v_\infty - v_\infty'| + |\lambda' - \lambda|\right)$$

für alle $(\lambda, v_\infty), (\lambda', v_\infty') \in K \times \overline{\mathcal{U}_{\sigma_0}(0)}$ mit einer Konstanten $C = C(p, m, K, \sigma_0)$.

Nun sind wir in der Lage $\mathbb{L}$ und $\mathcal{I}$ mit Hilfe von $\mathcal{R}$ zu definieren: Mit

$$u := \mathbb{L}f := \mathcal{R}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}f$$

folgt aus (3.0.10)

$$\mathbb{P}\mathcal{Q}_\lambda u = \mathbb{P}f$$

Nach Satz 2.0.2 existiert ein $p \in W^{m+1,p}(D)$, so daß

$$\mathcal{Q}_\lambda u + \nabla p = f$$

Zu einem gegebenem $c \in \mathbb{C}$ setzen wir $d := (c - \int_D p(x)\, dx)/|D|$, wobei $|D|$ das Volumen von D ist.

$$\mathcal{I} f := p + d$$

und u erfüllen somit alle Gleichungen von (3.0.3).

Zur Eindeutigkeit: Wegen der Linearität der Gleichungen (3.0.3) genügt es zu $f = 0$ und $c = 0$ auch u und p als 0 zu erkennen. Für $f = 0$ folgt aber aus Gleichung (3.0.6), zusammen mit der Injektivität von $\mathbb{I} + \mathbb{Q}$ schon $u = 0$. Damit muß auch schon $\nabla p = 0$ sein, d.h. p ist eine Konstante. Gleichung (3.0.3) mit $c = 0$ impliziert $p = 0$.

Zum zweiten Teil des Satzes: $\mathbb{A}^{-1}$ und $\mathbb{P}$ sind jeweils beschränkte Operatoren. Wegen (3.0.11) und der Definition von $\mathbb{L}$ folgt

$$\|\mathbb{L}(\lambda, f, c)\|_{p,m+2,D} \quad \leq \quad C_{p,m,D,K,\sigma_0} \|f\|_{p,m} \quad \forall (\lambda, v_\infty) \in K \times \overline{\mathcal{U}_{\sigma_0}(0)}$$

und wegen $\nabla \mathcal{I}(\lambda, f, c) = \nabla(p + d) = \nabla p = f - \mathcal{Q}_\lambda \mathbb{L}(\lambda, f, c)$ folgt daraus

$$\|\nabla \mathcal{I}(\lambda, f, c)\|_{p,m,D} \quad \leq \quad C_{p,m,D,K,\sigma_0} \|f\|_{p,m} \quad \forall (\lambda, v_\infty) \in K \times \overline{\mathcal{U}_{\sigma_0}(0)}$$

Anwendung von Satz 2.0.9, Gleichung (2.0.16) ergibt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}(\lambda, f, c)\|_{p,m,D} &\leq C_{m,p,D,\sigma_0} \left(\|\nabla \mathcal{I}(\lambda, f, c)\|_{p,m,D} + |c|\right) \\ &\leq C_{m,p,D,\sigma_0} \left(\|f\|_{p,m} + |c|\right) \end{aligned}$$

Diese 3 Ungleichungen zusammen ergeben (3.0.4) für $k = 0$.

Sei $u := \mathbb{L}_{v_\infty}(\lambda, f, c) - \mathbb{L}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c)$ und $p := \mathcal{I}_{v_\infty}(\lambda, f, c) - \mathcal{I}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c)$, dann

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}_{\lambda, v_\infty} u + \nabla p \\ &\quad = \quad \mathcal{Q}_{\lambda, v_\infty} \mathbb{L}_{v_\infty}(\lambda, f, c) + \nabla \mathcal{I}_{v_\infty}(\lambda, f, c) - \mathcal{Q}_{\lambda, v_\infty} \mathbb{L}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) \\ &\qquad\quad - \nabla \mathcal{I}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) \\ &\quad = \quad f - \mathcal{Q}_{\lambda, v_\infty} \mathbb{L}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) - \nabla \mathcal{I}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) \\ &\quad = \quad f + \mathcal{Q}_{\lambda', v_\infty{}'} \mathbb{L}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) - \mathcal{Q}_{\lambda, v_\infty} \mathbb{L}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) - \mathcal{Q}_{\lambda', v_\infty{}'} \mathbb{L}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) \\ &\qquad\quad - \nabla \mathcal{I}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) \\ &\quad = \quad f + \left(\mathcal{Q}_{\lambda', v_\infty{}'} - \mathcal{Q}_{\lambda, v_\infty}\right) \mathbb{L}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) - f + \nabla \mathcal{I}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) - \nabla \mathcal{I}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) \\ &\quad = \quad \left(\mathcal{Q}_{\lambda', v_\infty{}'} - \mathcal{Q}_{\lambda, v_\infty}\right) \mathbb{L}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) \\ &\quad = \quad \left((\lambda' - \lambda) + (v_\infty{}' - v_\infty) \cdot \nabla\right) \mathbb{L}_{v_\infty{}'}(\lambda', f, c) \\ &\quad =: \quad h \end{aligned}$$

Ersetzt man also in den Gleichungen (3.0.3) f durch h und c durch 0, so erfüllen u und p diese

Gleichungen und Gleichung (3.0.4) für $k=0$ und (3.0.12) ergibt (3.0.5):

$$\begin{aligned}
&\|\mathbb{L}_{v_\infty}(\lambda,f,c)-\mathbb{L}_{v_\infty{}'}(\lambda',f,c)\|_{p,m+2,D}+\|\mathcal{I}_{v_\infty}(\lambda,f,c)-\mathcal{I}_{v_\infty{}'}(\lambda',f,c)\|_{p,m+1,D}\\
&\quad = \quad \|u\|_{p,m+2,D}+\|p\|_{p,m+1,D}\\
&\quad = \quad \|\mathbb{L}_{v_\infty}(\lambda,h,0)\|_{p,m+2,D}+\|\mathcal{I}_{v_\infty}(\lambda,h,0)\|_{p,m+1,D}\\
&\quad \overset{(3.0.4)}{\leq} \quad C\|h\|_{p,m,D}\\
&\quad = \quad C\|\left((v_\infty{}'-v_\infty)\cdot\nabla+(\lambda'-\lambda)\right)\mathbb{L}_{v_\infty{}'}(\lambda',f,c)\|_{p,m,D}\\
&\quad \leq \quad C\left(|v_\infty{}'-v_\infty|+|\lambda'-\lambda|\right)\|\mathbb{L}_{v_\infty{}'}(\lambda',f,c)\|_{p,m+2,D}\\
&\quad = \quad C\left(|v_\infty{}'-v_\infty|+|\lambda'-\lambda|\right)\left\|\left(\mathcal{R}(v_\infty{}',\lambda')-\mathcal{R}(v_\infty,\lambda)\right)\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}f+\mathbb{L}_{v_\infty}(\lambda,f,c)\right\|_{p,m+2,D}\\
&\quad \overset{(3.0.12)}{\leq} \quad C\left(|v_\infty{}'-v_\infty|+|\lambda'-\lambda|\right)^2\|\mathbb{A}^{-1}\mathbb{P}f\|_{p,m+2,D}\\
&\qquad\qquad +C\left(|v_\infty{}'-v_\infty|+|\lambda'-\lambda|\right)\left(\|f\|_{p,m,D}+|c|\right)\\
&\quad \overset{(2.0.15)}{\leq} \quad C\left(|v_\infty{}'-v_\infty|+|\lambda'-\lambda|\right)^2\|f\|_{p,m,D}+C\left(|v_\infty{}'-v_\infty|+|\lambda'-\lambda|\right)\left(\|f\|_{p,m,D}+|c|\right)\\
&\quad \leq \quad C\left(|v_\infty{}'-v_\infty|+|\lambda'-\lambda|\right)\left(\|f\|_{p,m,D}+|c|\right)
\end{aligned}$$

und $C=C(m,p,D,K,\sigma_0)$.

Bleibt noch Gleichung (3.0.4) für $k\geq 1$ zu zeigen. Dazu setzen wir $u_\lambda:=\mathbb{L}(\lambda,f,c)$, $p_\lambda:=\mathcal{I}(\lambda,f,c)$ und leiten die Gleichungen (3.0.3) nach λ ab:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}u_\lambda+\nabla\frac{\partial}{\partial\lambda}p_\lambda &= -u_\lambda \quad \text{in } D\\
\nabla\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}u_\lambda &= 0 \quad \text{in } D\\
\frac{\partial}{\partial\lambda}u_\lambda|_{\partial D} &= 0\\
\int\limits_D\frac{\partial}{\partial\lambda}p_\lambda(x)\,dx &= 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbb{L}(\lambda,f,c) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}u_\lambda = \mathbb{L}(\lambda,-u_\lambda,0) = \mathbb{L}(\lambda,-\mathbb{L}(\lambda,f,c),0)\\
\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{I}(\lambda,f,c) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}p_\lambda = \mathcal{I}(\lambda,-u_\lambda,0) = \mathcal{I}(\lambda,-\mathcal{I}(\lambda,f,c),0)
\end{aligned}$$

Unterdrücken wir für ein Augenblick die Abhängigkeit in λ, so können wir nach Induktion schreiben:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^k\mathbb{L}(\lambda,f,c) &= \underbrace{\mathbb{L}(0)\circ\ldots\circ\mathbb{L}(0)}_{k\text{ mal}}\circ\mathbb{L}(c)f\\
\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^k\mathcal{I}(\lambda,f,c) &= \underbrace{\mathcal{I}(0)\circ\ldots\circ\mathcal{I}(0)}_{k\text{ mal}}\circ\mathcal{I}(c)f
\end{aligned}$$

und erhalten wieder mit Induktion und (3.0.4) für $k = 0$

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^k \mathbb{L}(\lambda, f, c) \right\|_{p,m+2,D} &= \|\mathbb{L}(\underbrace{\mathbb{L}(0) \circ \ldots \circ \mathbb{L}(0)}_{k-1 \text{ mal}} \circ \mathbb{L}(c)f, 0)\|_{p,m+2,D} \\
&\leq C\| \underbrace{\mathbb{L}(0) \circ \ldots \circ \mathbb{L}(0)}_{k-1 \text{ mal}} \circ \mathbb{L}(c)f\|_{p,m,D} + 0 \\
&\vdots \\
&\leq C \, \|\mathbb{L}(\lambda, f, c)\|_{p,\max\{m-2k+2,0\},D} \\
&\leq C \left(\|f\|_{p,\max\{m-2k,0\},D} + |c| \right)
\end{aligned}$$

Analog

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^k \mathcal{I}(\lambda, f, c) \right\|_{p,m+1,D} \leq C \left(\|f\|_{p,\max\{m-k,0\},D} + |c| \right)$$

Beide Ungleichungen zusammen zeigen (3.0.4) für alle $k \geq 0$. $\square$

Kapitel 4

Oseen-Gleichung in $\mathbb{R}^3$

4.1 Erste Eigenschaften

Wurde in Kapitel 3 die Existenz eines Lösungsoperators im Ganzraum gezeigt, werden hier weiter Abschätzungen erstellt, insbesondere um das Verhalten der Lösungsoperatoren in der Nähe um $\lambda = 0$ in den Griff zu bekommen. Wie schon in der Bemerkung zu Satz 3.0.13 erwähnt, zielten die Untersuchungen der Operatoren auf die Abhängigkeit in v_∞ lediglich darauf ab, die Anströmgeschwindigkeit v_∞ auf den Betrag $\sigma_0 \geq |v_\infty|$ zu reduzieren. Jetzt jedoch genügt es nicht mehr σ_0 zu betrachten, sondern $|v_\infty|$ tritt explizit im Nenner von Konstanten auf. Der Grund hierfür sind die Integralabschätzungen wie sie zur Ungleichung (4.1.12) führen werden. Der Term $v_\infty \cdot \xi$ im Nenner von χ reduziert die Singularität in der Tat. Es ist also ein echter Sprung zwischen $|v_\infty| \searrow 0$ und $v_\infty = 0$ festzustellen. Auch wenn es nicht Gegenstand der Untersuchung dieser Arbeit ist, führen wir die Abhängigkeit der Konstanten in $|v_\infty|^{-1}$ ausdrücklich mit, da sie phänomenologisch interessant erscheint.

Definition 4.1.1 *Sei $\varphi^0(\xi) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ eine Abschneidefunktion mit*

$$\varphi^0(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| < 1 \\ 0 & |\xi| \geq 2 \end{cases}$$

und $\varphi^\infty(\xi) := 1 - \varphi^0(\xi)$. Dann definieren wir

$$E^N_{v_\infty}(\lambda) f := \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi^N(\xi)\frac{\hat{f}(\xi) - \tilde{\xi}(\tilde{\xi}\cdot\hat{f}(\xi))}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)}\right) \tag{4.1.1}$$

für jeweils $N = 0$ oder $N = \infty$, wobei $\tilde{\xi} := \xi/|\xi|$. Offensichtlich ist $E_{v_\infty}(\lambda) = E^0_{v_\infty}(\lambda) + E^\infty_{v_\infty}(\lambda)$. Gelegentlich lassen wir den untenstehenden Index oder die Abhängigkeit in λ unberücksichtigt, wenn es darauf nicht ankommt.

Beachte, daß $E^0_{v_\infty}(\lambda) f$ trotzdem keinen endlichen Träger hat. Grob gesprochen wird durch das Abschneiden der Funktion vor der Fouriertransformation nur die Regularität erhöht.

Der nächste Satz befaßt sich mit L^p-Abschätzungen von Fourier-Multiplikatoren und ist ein nützliches Werkzeug um über die $p \leq 2$ Grenze der Fouriertheorie hinauszugehen; was aber natürlich an der speziellen Wahl der Räume liegt.

Satz 4.1.2 *Sei $1 < p < \infty$ und sei $k(\xi) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{S}'$ mit der Eigenschaft*

$$|\xi|^\alpha \left|\partial_\xi^\alpha k(\xi)\right| \;\leq\; C_k \;<\; \infty \quad \forall \alpha \;:\; |\alpha| \leq 2, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^3$$

Dann existiert eine von C_k unabhängige Konstant c_p, so daß

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}(k\hat{u})\right\|_p \;\leq\; c_p C_k \|u\|_p \quad \forall u \in L^p(\mathbb{R}^3) \tag{4.1.2}$$

Beweis: Aus

$$|\xi|^\alpha \left|\partial_\xi^\alpha k(\xi)\right| \;\leq\; C_k \;<\; \infty \quad \forall \alpha \;:\; |\alpha| \leq 2, \xi \neq 0$$

folgt

$$\frac{1}{R^3} \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{R/2 < |\xi| < 2R} \left|R^\alpha \partial_\xi^\alpha k(\xi)\right|^2 \, d\xi \;\leq\; C_k \;<\; \infty \quad \forall R > 0$$

Und mit $n = 3$, $\hat{k}$ statt k folgt der Satz aus [Hörmander, Theorem 7.9.5., S. 243] $\square$

Satz 4.1.3 *Sei $1 < p < \infty$, $r > 0$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ und sei $\epsilon \geq$ hinreichend klein. Dann gelten die folgenden Ungleichungen*

$$\begin{aligned}
&(4.1.3) & \|E^0_{v_\infty}(\lambda) f\|_{\infty,2} &\leq c_p \|f\|_{1+\epsilon} && \forall f \in L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3) \\
& & &\leq c_{p,r} \|f\|_p && \forall f \in L^p_r(\mathbb{R}^3) \\
&(4.1.4) & \|\nabla^4 E^0_{v_\infty}(\lambda) f\|_p &\leq c_{p,\sigma_0} \|f\|_p && \forall f \in L^p(\mathbb{R}^3) \\
&(4.1.5) & \|E^0_{v_\infty}(\lambda) f - E^0_{{v_\infty}'}(\lambda') f\|_{\infty,2} &\leq c_p \left(|v_\infty - {v_\infty}'| + |\lambda - \lambda'|\right)^{\frac{1}{4}} \|f\|_{1+\epsilon} && \forall f \in L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3)
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die in [ShiKo] analog zu (4.1.4) gemachte Aussage mit nur 2ten Ableitungen und $\lambda = 0$ konnten wir an dieser Stelle nicht nachvollziehen. Diese Aussage folgt nicht, wie angegeben, aus Satz 4.1.2 bzw. aus [Hörmander, Theorem 7.9.5., S. 243]. Als Konsequenz verliert man ohne Weieteres die Eindeutigkeit der Oseen-Gleichung für $\lambda = 0$. Mit Ungleichung (4.1.4) kann man das zumindest für $p > 4/3$ retten. Siehe auch Eingangsbemerkung zu Kapitel 5.1.

Das Besondere an den 3 Ungleichungen liegt darin, daß die Konstanten unabhängig von λ sind. Das Verhalten der Differenz der Operatoren $E^0_{v_\infty}(\lambda)$ in v_∞ habe ich nur deshalb mit aufgenommen, weil der analoge Satz in [ShiKo] es hat. Für unsere Untersuchung spielt das keine Rolle. Vergleiche auch Satz 4.1.6, bei dem Differenzen untersucht werden, wenn λ reinen Imaginärteil hat.

Beweis:

Der Einfachheit halber sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $|\varphi^0(\xi)| \leq 1$. Sei weiter $u := \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f} - \tilde{\xi}(\tilde{\xi} \cdot \hat{f})\right)$ Dann ist

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\nabla \cdot u) &= \sum_{j=1}^{3} i\xi_j \mathcal{F}(u_j) \\
&= \sum_{j=1}^{3} i\xi_j \left(\hat{f}_j - \tilde{\xi}_j \left(\tilde{\xi} \cdot \hat{f}\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} i\xi_j \left(\hat{f}_j - \frac{\tilde{\xi}_j}{|\xi|} \left(-i\mathcal{F}(\nabla \cdot f)\right)\right) \\
&= \mathcal{F}(\nabla \cdot f) + \sum_{j=1}^{3} i^2 \underbrace{\tilde{\xi}_j \tilde{\xi}_j}_{=1} \mathcal{F}((\nabla \cdot f) \\
&= \mathcal{F}(\nabla \cdot f) - \mathcal{F}(\nabla \cdot f) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Also auch $\nabla \cdot u = 0$, d.h. u ist divergenzfrei. Andererseits ist

$$
\begin{aligned}
u &= f - \mathcal{F}^{-1}\left(\tilde{\xi}(\tilde{\xi} \cdot \hat{f})\right) \\
&= \mathbb{P}f + Qf + \operatorname{grad} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\tilde{\xi}}{|\xi|} \cdot \hat{f}\right)
\end{aligned}
$$

wobei $\mathbb{P}$ der Projektor auf den divergenzfreien Teil und Q der Projektor auf den Gradientenanteil sind. Daraus folgt wegen der Direktheit der Helmholz-Zerlegung, daß

$$
u = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f} - \tilde{\xi}(\tilde{\xi} \cdot \hat{f})\right) = \mathbb{P}f \tag{4.1.6}
$$

Zunächst Ungleichung (4.1.3): $\|E^0_{v_\infty}(\lambda) f\|_{\infty,2} \leq c_{p,r} \|f\|_p$: Sei $\alpha \in \mathbb{N}^3$ ein Multiindex mit $|\alpha| \leq 2$. Da für $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ gilt

$$
|q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)| \geq |\xi|^2 \quad \forall \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0 \tag{4.1.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x^\alpha E^0_{v_\infty}(\lambda) f\|_\infty &= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi^\alpha \varphi^0}{q}(\hat{f} - \tilde{\xi}(\tilde{\xi} \cdot \hat{f}))\right)\right\|_\infty \\
&\leq c \left\| \frac{\xi^\alpha \varphi^0}{q}(\hat{f} - \tilde{\xi}(\tilde{\xi} \cdot \hat{f}))\right\|_1 \qquad \textit{Hausdorff-Young} \\
&\leq c \left\| \frac{\xi^\alpha \varphi^0}{q} \right\|_{1+\epsilon} \|\hat{u}\|_{(1+\epsilon)'} \; \textit{Hölder} \\
&\leq c \left\| |\xi|^{|\alpha|-2} \varphi^0(\xi) \right\|_{1+\epsilon} \|\mathbb{P}f\|_{1+\epsilon} \qquad \textit{Hausdorff-Young} \text{ und (4.1.7)} \\
&\leq c \|f\|_{1+\epsilon}
\end{aligned}
$$

Die zweite Zeile von (4.1.3) folgt offensichtlich mit *Hölder*, da dann f nach Voraussetzung kompakten Träger mit Durchmesser $\leq r$ hat.

Um nun Ungleichung (4.1.4) zu zeigen, möchte ich Satz 4.1.2 anwenden: Sei mit einem Multiindex β mit $|\beta| = 4$

$$k_\lambda(\xi) \quad := \quad \frac{\xi^\beta \varphi^0(\xi)}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)}$$

Dann genügt es

$$|\xi|^\alpha \left|\partial_\xi^\alpha k_\lambda(\xi)\right| \quad \leq \quad C \; < \; \infty \quad \forall \alpha \; : \; |\alpha| \leq 2, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^3$$

mit einer von λ unabhängigen Konstante $C = C(r)$ zu zeigen.

$|\alpha| = 0$:

$$\begin{aligned} |\xi|^0 k_\lambda(\xi) &:= \frac{\xi^\beta \varphi^0(\xi)}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)} \\ &\leq \frac{|\xi|^4}{|\xi|^2}\left|\varphi^0(\xi)\right| \quad \text{nach (4.1.7)} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

$|\alpha| = 1$: Wegen $\partial_\xi^\alpha q(\xi) = 2\xi^\alpha + i{v_\infty}^\alpha$ haben wir

$$\partial_\xi^\alpha k_\lambda(\xi) \quad = \quad \frac{\partial_\xi^\alpha \xi^\beta \varphi^0(\xi)}{q(\xi)} + \frac{\xi^\beta \partial_\xi^\alpha \varphi^0(\xi)}{q(\xi)} - \frac{2\xi^{\beta+\alpha}\varphi^0(\xi)}{q^2(\xi)} - \frac{i{v_\infty}^\alpha \xi^\beta \varphi^0(\xi)}{q^2(\xi)}$$

und mit (4.1.5) folgt

$$\begin{aligned} |\xi|\left|\partial_\xi^\alpha k_\lambda(\xi)\right| &\leq \frac{|\xi|^{4-1+1}|\varphi^0(\xi)|}{|\xi|^2} + \frac{|\xi|^{4+1}|\partial_\xi^\alpha \varphi^0(\xi)|}{|\xi|^2} + \frac{2|\xi|^{4+1}|\varphi^0(\xi)|}{|\xi|^4} + \frac{|v_\infty||\xi|^{4+1}|\varphi^0(\xi)|}{|\xi|^4} \\ &\leq 16 + 2|v_\infty| \end{aligned}$$

$|\alpha| = 2$: Die kritischen Terme sind die, in denen der Zähler groß oder in denen der Nenner klein werden kann:

$$\partial_\xi^\alpha k_\lambda(\xi) \quad = \quad \frac{\partial_\xi^\alpha \xi^\beta \varphi^0(\xi)}{q(\xi)} + \ldots + \frac{2i^{|\alpha|}{v_\infty}^\alpha \xi^\beta \varphi^0(\xi)}{q^3(\xi)}$$

Mit (4.1.7) folgt mit $|v_\infty| \leq \sigma_0$

$$\begin{aligned} |\xi|^2\left|\partial_\xi^\alpha k_\lambda(\xi)\right| &\leq \frac{|\xi|^{4-1+2}|\varphi^0(\xi)|}{|\xi|^2} + \ldots + \frac{2|v_\infty|^2|\xi|^{4+2}|\varphi^0(\xi)|}{|\xi|^6} \\ &\leq C_{\sigma_0} \end{aligned}$$

Schließlich ist also

$$\begin{aligned} \left\|\nabla^4 E^0_{v_\infty} f\right\|_p &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi^\beta \varphi^0(\xi)}{q_{v_\infty}(\xi)}\left(\hat{f} - \tilde{\xi}\left(\tilde{\xi}\cdot\hat{f}\right)\right)\right)\right\|_p \\ &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(k_\lambda \hat{u}\right)\right\|_p \\ &\leq C_{\sigma_0}\|u\|_p \quad \text{nach Satz 4.1.2} \\ &= C_{\sigma_0}\|\mathbb{P}f\|_p \\ &\leq C_{\sigma_0}\|f\|_p \end{aligned}$$

Nun zur Ungleichung (4.1.5): Sei $a := q_{v_\infty}(\lambda)(\xi) - q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi)$. Dann ist

$$\begin{aligned} |a| &= |q_{v_\infty}(\lambda)(\xi) - q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi)| \\ &\leq |q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)| + |q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi)| \\ &\leq 2\max\{|q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)|, |q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi)|\} \end{aligned}$$

und für $|\xi| \leq 2$ ist

$$\begin{aligned} |a| &= |q_{v_\infty}(\lambda)(\xi) - q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi)| \\ &= |\lambda - \lambda' + i\xi(v_\infty - v_\infty{}')| \\ &\leq |\lambda - \lambda'| + |\xi||v_\infty - v_\infty{}'| \\ &\leq 2\left(|\lambda - \lambda'| + |v_\infty - v_\infty{}'|\right) \end{aligned}$$

Für $|\xi| \leq 2$ gilt dann wegen (4.1.7) und o.B. $|a| \leq 2|q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)|$

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)} - \frac{1}{q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi)}\right| &= \left|\frac{q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi) - q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi)}\right| \\ &= \frac{|a|}{|q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)||q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi)|} \\ &= \frac{|a|^{3/4}|a|^{1/4}}{|q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)|^{3/4+1/4}|q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi)|} \\ &\leq \frac{2^{3/4}|a|^{1/4}}{|q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)|^{1/4}|q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi)|} \\ &\leq \frac{2^{3/4}2^{1/4}\left(|\lambda - \lambda'| + |v_\infty - v_\infty{}'|\right)^{1/4}}{|\xi|^{2+2\frac{1}{4}}} \\ &\leq \frac{2\left(|\lambda - \lambda'| + |v_\infty - v_\infty{}'|\right)^{1/4}}{|\xi|^{5/2}} \end{aligned}$$

Daraus folgt für $|\alpha| \leq 2$

$$\begin{aligned} &\left\|\partial_\xi^\alpha \left(E^0_{v_\infty}(\lambda) - E^0_{v_\infty{}'}(\lambda')\right) f\right\|_\infty \\ &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{1}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)} - \frac{1}{q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi)}\right)\left(\xi^\alpha\varphi^0(\xi)\right)\underbrace{\left(\hat{f} - \tilde{\xi}(\tilde{\xi}\cdot\hat{f})\right)}_{=\hat{u}}\right)\right\|_\infty \\ &\leq C\left\|\left|\frac{1}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)} - \frac{1}{q_{v_\infty{}'}(\lambda')(\xi)}\right||\varphi^0(\xi)||\xi|^{|\alpha|}\right\|_{1+\epsilon}\|\hat{u}\|_{(1+\epsilon)'} \quad \textit{Hölder} \\ &\leq C\left(|\lambda - \lambda'| + |v_\infty - v_\infty{}'|\right)^{1/4}\|\mathbb{P}f\|_{1+\epsilon} \quad \textit{Hausdorff-Young} \end{aligned}$$

□

Die kommenden Sätze sind technischer Natur und haben in erster Linie die Befreiung von dem Parameter λ zum Ziel. Als erstes schreiben wir den Operator $E^0_{v_\infty}$ etwas anders:

Definition 4.1.4 *Sei mit $\delta_{jk} = 1$ für $j = k$ und $\delta_{jk} = 0$ $j \neq k$ formal*

$$\chi_{jk}(\lambda) \quad := \quad \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(\delta_{jk} - \xi_j \xi_k |\xi|^{-2})\varphi^0(\xi)}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)}\right) \tag{4.1.8}$$

Dann ist offensichtlich

$$\left(E^0_{v_\infty}(\lambda) f\right)_j \quad = \quad \sum_{k=1}^{3} \chi_{jk}(\lambda) * f_k \qquad \forall j = 1, 2, 3$$

Der Kürze halber definieren wir die Matrix $\chi(\lambda) := (\chi_{jk}(\lambda))_{j,k=1,2,3}$ und schreiben $E^0_{v_\infty}(\lambda) f = \chi(\lambda) * f$.

Zusätzlich zu [ShiKo, Lemma 3.5] gilt der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 4.1.5 *Sei $\chi_{jk}(\lambda)$ wie in Definition 4.1.4. Dann gilt mit $v_\infty \neq 0$, falls $\delta \neq 0$*

$$\sup_{\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0} \left\| \mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \chi_{jk}(\lambda)\right)\right\|_{p'} \ \leq \ \frac{C}{|v_\infty|^{\delta \frac{p-1}{p}}} \quad \textit{falls } p > \frac{3+\delta}{1+|\alpha|+\delta} \textit{ für } \ 0 \leq \delta \leq 1 \tag{4.1.9}$$

$$\sup_{\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0} (\mathrm{Re}(\lambda))^{\frac{1}{2}} \left\| \mathcal{F}\left(\chi_{jk}(\lambda)\right)\right\|_{1,m} + \sup_{\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0} (\mathrm{Re}(\lambda))^{\frac{1}{2}} \left\| \mathcal{F}\left(\partial_\lambda \chi_{jk}(\lambda)\right)\right\|_{1,m} \ \leq \ C_m \tag{4.1.10}$$

$$\sup_{\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0} (\mathrm{Re}(\lambda))^{q} \left\| \mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \partial_\lambda \chi_{jk}(\lambda)\right)\right\|_{p'} \ \leq \ C \frac{1}{|v_\infty|^{\delta \frac{p-1}{p}}} \tag{4.1.11}$$

wobei $1 = 1/p + 1/p'$ und

$$p > \frac{3+\delta}{-1+|\alpha|+\delta} \qquad q = 0 \qquad \textit{falls } 0 \leq \delta \leq 1,\ |\alpha| \geq 1$$
$$\frac{1}{p} > \frac{-1+t|\alpha|+\delta}{3+\delta} \qquad q = -\frac{-1+t|\alpha|+\delta}{2} + \frac{3+\delta}{2p} \qquad \textit{falls } 0 \leq t, \delta \leq 1$$

Vermöge der *Hausdorff-Young* Ungleichung $\|\hat{f}\|_p \leq (2\pi)^{\frac{3}{2}-\frac{3}{p'}} \|f\|_{p'}$ könnte man die obigen Formeln auch ohne die Fouriertransformierte und p statt p' bzw. ∞ statt 1 formulieren. Nur müßte man dann auch die Grenze $p \geq 2$ in Kauf nehmen. Da die linken Seiten aber zumeißt in der Form $\chi_{jk} * f$ auftauchen, ermöglicht die *Young* Ungleichung die angegebenen Bereiche in bestimmten Fällen auch unter dem Wert $p = 2$ zu benutzen.

Beweis: Formel (4.1.10) ist Teil des Beweises von [ShiKo, Lemma 3.5]. Beachte, daß die Funktion φ^0 unter der Fouriertransformierten in (4.1.8) kompakten Träger in $\{|\xi| \leq 2\}$ hat.

Zunächst eine kleine Rechnung: Sei $0 < s < 1$ und a, b nicht negative reelle Zahlen.

$$\int\limits_{a \leq |\xi| \leq b} \frac{|\xi|^{|\alpha| 2\tilde{s}}}{|q(\xi)|^{2s}}\, d\xi$$
$$= \int\limits_{a \leq |\xi| \leq b} \frac{|\xi|^{|\alpha| 2\tilde{s}}}{\left((|\xi|^2 + \mathrm{Re}(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}(\lambda) + v_\infty \cdot \xi)^2\right)^s}\, d\xi$$

Ist θ der Winkel zwischen v_∞ und $\xi \neq 0$, $r = |\xi|$ so ergibt die Umrechnung auf die Polarkoordinaten (r, ψ, θ) wegen der Kugelsymmetrie:

$$= \int_{r=a}^{b} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}} \sin(\theta)}{\left((r^2 + \mathrm{Re}(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}(\lambda) + |v_\infty| r \cos(\theta))^2\right)^s} \, d\theta d\psi dr$$

$$= 2\pi \int_{r=a}^{b} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}} \sin(\theta)}{\left((r^2 + \mathrm{Re}(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}(\lambda) + |v_\infty| r \cos(\theta))^2\right)^s} \, d\theta dr$$

Sei $t := \cos(\theta)$. Dann ist $t_1 = 1, t_2 = -1$ und $d\theta = -dt/\sin(\theta)$

$$\leq C \int_{r=a}^{b} \int_{t=-1}^{1} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{\left((r^2 + \mathrm{Re}(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}(\lambda) + r|v_\infty| t)^2\right)^s} \, dt dr$$

Substitution: $x := \mathrm{Im}(\lambda)/r + |v_\infty| t$

$$\leq \frac{C}{|v_\infty|} \int_{r=a}^{b} \int_{x=\frac{\mathrm{Im}(\lambda)}{r} - |v_\infty|}^{x=\frac{\mathrm{Im}(\lambda)}{r} + |v_\infty|} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{\left((r^2 + \mathrm{Re}(\lambda))^2 + r^2 x^2\right)^s} \, dx dr$$

Der Integrand hat sein einziges Maximum bezüglich x in 0. Wir können daher den Integrationsbereich in Richtung des Maximums verschieben. Oder anders: in dem man das innere Integral nach $\mathrm{Im}(\lambda)/r$ ableitet, sieht man, daß für positives $\mathrm{Im}(\lambda)/r$ der Ausdruck monoton fallend in $\mathrm{Im}(\lambda)/r$ und für negatives $\mathrm{Im}(\lambda)/r$ der Ausdruck monoton steigend ist. Also

$$\leq \frac{C}{|v_\infty|} \int_{r=a}^{b} \int_{x=-|v_\infty|}^{x=|v_\infty|} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{\left((r^2 + \mathrm{Re}(\lambda))^2 + r^2 x^2\right)^s} \, dx dr$$

und aus Symmetriegründen

$$\leq \frac{C}{|v_\infty|} \int_{r=a}^{b} \int_{x=0}^{x=|v_\infty|} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{\left((r^2 + \mathrm{Re}(\lambda))^2 + r^2 x^2\right)^s} \, dx dr$$

und mit der Formel $2\,(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, für $a, b \geq 0$. Beachte, daß nach Voraussetzung $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ ist.

$$\leq \frac{C}{|v_\infty|} \int_{r=a}^{b} \int_{x=0}^{x=|v_\infty|} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{(r^2 + \mathrm{Re}(\lambda) + rx)^{2s}} \, dx dr$$

Substituieren wir nun wieder zurück $x = |v_\infty|t$ und schätzen $rt|v_\infty| \geq rt^{\frac{1}{\delta}}|v_\infty|$ beziehungsweise $rt|v_\infty| \geq 0$ ab.

$$= C \int\limits_{r=a}^{b} \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{(r^2 + \mathrm{Re}(\lambda) + rt|v_\infty|)^{2s}} \, dtdr$$

(*) $$\leq C \begin{cases} \int\limits_{r=a}^{b} \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{\left(r^2+\mathrm{Re}(\lambda)+rt^{\frac{1}{\delta}}|v_\infty|\right)^{2s}} \, dtdr & \text{für } 0 < \delta \leq 1 \\ \int\limits_{r=a}^{b} \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{(r^2+\mathrm{Re}(\lambda)+0)^{2s}} \, dtdr & \text{für } \delta = 0 \end{cases}$$

Schätzen wir nun doch $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ ab und substituieren wir als nächstes mit $x = t^{\frac{1}{\delta}}|v_\infty|$, d.h. $dt = dx\delta x^{\delta-1}/|v_\infty|^\delta$ und $x_1 = 0$, $x_2 = |v_\infty|$.

$$\leq \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \begin{cases} \delta \int\limits_{r=a}^{b} \int\limits_{x=0}^{x=|v_\infty|} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{x^{1-\delta}(r^2+rx)^{2s}} \, dxdr & \text{für } 0 < \delta \leq 1 \\ \int\limits_{r=a}^{b} \int\limits_{t=0}^{t=1} r^{2+|\alpha|2\tilde{s}-4s} \, dtdr & \text{für } \delta = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \begin{cases} \int\limits_{r=a}^{b} \int\limits_{x=0}^{x=|v_\infty|} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{x^{1-\delta}r^{4s}\left(1+\frac{x}{r}\right)^{2s}} \, dxdr & \text{für } 0 < \delta \leq 1 \\ \int\limits_{r=a}^{b} r^{2+|\alpha|2\tilde{s}-4s} & \text{für } \delta = 0 \end{cases}$$

Merken wir uns das Ergebnis für $\delta = 0$ und betrachten jetzt nur noch den Fall $0 < \delta \leq 1$. Dann ergibt die Substitution $y = x/r$ im inneren Integral

$$\begin{aligned}
&= \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \int\limits_{r=a}^{b} \int\limits_{y=0}^{x=|v_\infty|/r} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}-4s-(1-\delta)+1}}{y^{1-\delta}\,(1+y)^{2s}} \, dydr \\
&\leq \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \int\limits_{r=a}^{b} r^{2+|\alpha|2\tilde{s}-4s+\delta} \, dr \int\limits_{y=0}^{\infty} \frac{1}{y^{1-\delta}\,(1+y)^{2s}} \, dy \\
&= \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \int\limits_{r=a}^{b} r^{2+|\alpha|2\tilde{s}-4s+\delta} \, dr \left(\int\limits_{y=0}^{1} \frac{1}{y^{1-\delta}\,(1+y)^{2s}} \, dy + \int\limits_{y=1}^{\infty} \frac{1}{y^{1-\delta}\,(1+y)^{2s}} \, dy \right) \\
&\leq \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \int\limits_{r=a}^{b} r^{2+|\alpha|2\tilde{s}-4s+\delta} \, dr \left(\int\limits_{y=0}^{1} \frac{1}{y^{1-\delta}} \, dy + \int\limits_{y=0}^{\infty} \frac{1}{(1+y)^{1-\delta}\,(2+y)^{2s}} \, dy \right) \\
&\leq \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \int\limits_{r=a}^{b} r^{2+|\alpha|2\tilde{s}-4s+\delta} \, dr \left(\left[y^\delta\right]_0^1 + \left[(1+y)^{\delta-2s}\right]_0^\infty \right)
\end{aligned}$$

Also zusammen mit dem Fall $\delta = 0$ folgt

$$= \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \int\limits_{r=a}^{b} r^{2+|\alpha|2\tilde{s}-4s+\delta}\, dr \qquad \text{für } 0 \leq \delta < 2s$$

Halten wir für später das allgemeine Ergebnis

$$\text{(4.1.12)} \quad \int\limits_{a\leq|\xi|\leq b} \frac{|\xi|^{|\alpha|2\tilde{s}}}{|q(\xi)|^{2s}}\, d\xi \;\leq\; \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \int\limits_{r=a}^{b} r^{2+|\alpha|2\tilde{s}-4s+\delta}\, dr \qquad \text{für } 0 \leq \delta \leq 1,\ \delta < 2s$$

fest und setzen nun $a = 0$ und $b = 2$ ein. Dann haben wir

$$\text{(4.1.13)} \quad \int\limits_{|\xi|\leq 2} \frac{|\xi|^{|\alpha|2\tilde{s}}}{|q(\xi)|^{2s}}\, d\xi \;\leq\; \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \qquad \text{falls } 0 < 3-4s+2\tilde{s}|\alpha|+\delta,\ \ 0 \leq \delta \leq 1,\ \delta < 2s$$

Vermöge einer ganz ähnlichen Rechnung können wir den Bereich für s erweitern indem wir gegen Potenzen von $\mathrm{Re}(\lambda)^{-1}$ abschätzen. Setzen wir zu $0 \leq \delta \leq 1$, $s, \tilde{s} > 0$

$$q := \frac{4s-3-\delta-2|\alpha|\tilde{s}}{2s} \qquad \text{für } 0 \leq \delta \leq 1$$

Mit obiger Rechnung (*) haben wir

$$\mathrm{Re}(\lambda)^{qs} \int\limits_{|\xi|\leq 2} \frac{|\xi|^{|\alpha|2\tilde{s}}}{|q(\xi)|^{2s}}\, d\xi$$

$$\overset{(*)}{\leq} C \begin{cases} \int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{\mathrm{Re}(\lambda)^{qs} r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{\left(r^2+\mathrm{Re}(\lambda)+rt^{\frac{1}{\delta}}|v_\infty|\right)^{2s}}\, dtdr & \text{für } 0 < \delta \leq 1 \\ \int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{\mathrm{Re}(\lambda)^{qs} r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{(r^2+\mathrm{Re}(\lambda)+0)^{2s}}\, dtdr & \text{für } 0 = \delta \end{cases}$$

Substitution $r = \sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}\tilde{r}$, $t^{1/\delta} = \sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}\tilde{t}^{1/\delta}$ bei $0 < \delta \leq 1$ und Substitution von $r = \sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}\tilde{r}$ bei $\delta = 0$

$$= C \begin{cases} \int\limits_{\tilde{r}=0}^{2/\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}} \int\limits_{\tilde{t}=0}^{1/\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}} \frac{\mathrm{Re}(\lambda)^{qs+1/2+\delta/2-2s+1+|\alpha|\tilde{s}} \tilde{r}^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{\left(\tilde{r}^2+1+\tilde{r}\tilde{t}^{\frac{1}{\delta}}|v_\infty|\right)^{2s}}\, d\tilde{t}d\tilde{r} & \text{für } 0 < \delta \leq 1 \\ \int\limits_{\tilde{r}=0}^{2/\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}} \int\limits_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{Re}(\lambda)^{qs+1/2-2s+1+|\alpha|\tilde{s}} \tilde{r}^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{(\tilde{r}^2+1)^{2s}}\, dtd\tilde{r} & \text{für } 0 = \delta \end{cases}$$

Nach Definition von q verschwinden die Exponeneten von $\mathrm{Re}(\lambda)$ gerade und mit einer weiteren Substitution mit $x = t^{\frac{1}{\delta}}|v_\infty|$, d.h. $dt = \delta x^{\delta-1}/|v_\infty|^\delta$ und $x_1 = 0$, $x_2 = |v_\infty|$ gilt

$$\leq \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \begin{cases} \delta \int\limits_{r=0}^{\infty} \int\limits_{x=0}^{\infty} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{x^{1-\delta}(r^2+1+rx)^{2s}}\, dxdr & \text{für } 0 < \delta \leq 1 \\ \int\limits_{r=0}^{\infty} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{(r^2+1)^{2s}}\, dr & \text{für } \delta = 0 \end{cases}$$

$$\leq \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \begin{cases} \int\limits_{r=0}^{\infty} \int\limits_{x=0}^{\infty} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{x^{1-\delta}(r^2+1)^{2s}\left(1+\frac{xr}{r^2+1}\right)^{2s}}\, dxdr & \text{für } 0 < \delta \leq 1 \\ \int\limits_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)^{2+|\alpha|2\tilde{s}}}{(r+1)^{4s}}\, dr & \text{für } \delta = 0 \end{cases}$$

Sei $y := rx/(r^2+1)$. Dann

$$= \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \begin{cases} \int\limits_{r=0}^{\infty}\int\limits_{y=0}^{\infty} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}+(1-\delta)-1}}{y^{1-\delta}(r^2+1)^{2s+(1-\delta)-1}(1+y)^{2s}}\, dxdr & \text{für } 0<\delta\le 1 \\ (r+1)^{3+|\alpha|2\tilde{s}-4s}\Big|_0^\infty & \text{für } \delta = 0 \end{cases}$$

Für $\delta = 0$ folgt also $\le C$, falls $3+|\alpha|2\tilde{s}-4s<0$ ist. Betrachten wir jetzt nur noch den Fall $0<\delta\le 1$

$$= \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \int\limits_{r=0}^{\infty} \frac{r^{2+|\alpha|2\tilde{s}-\delta}}{(r^2+1)^{2s-\delta}}\, dr \int\limits_{y=0}^{\infty} \frac{1}{y^{1-\delta}\,(1+y)^{2s}}\, dy$$

Das rechte Integral haben wir schon bei der Herleitung zu Formel (4.1.13) abgeschätzt. Es existiert für $0<\delta<2s$. Das linke schätzen wir vermöge $(a+b)^2 \ge a^2+b^2$, falls $a,b\ge 0$ ab zu

$$\begin{aligned} &\le \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \int\limits_{r=0}^{\infty} (r+1)^{2+|\alpha|2\tilde{s}-\delta-2(2s-\delta)}\, dr \\ &\le \frac{C}{|v_\infty|^\delta}\, (r+1)^{3+|\alpha|2\tilde{s}+\delta-4s}\Big|_{r=0}^{\infty} \\ &\le \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \qquad \text{für } 3+|\alpha|2\tilde{s}+\delta-4s<0 \end{aligned}$$

Also haben wir

$$\text{(4.1.14)} \quad \mathrm{Re}(\lambda)^{-(3+|\alpha|2\tilde{s}+\delta-4s)/2} \int\limits_{|\xi|\le 2} \frac{|\xi|^{|\alpha|2\tilde{s}}}{|q(\xi)|^{2s}}\, d\xi \;\le\; \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \qquad \text{für} \quad \begin{matrix} 3+|\alpha|2\tilde{s}+\delta-4s<0 \\ \text{und } 0\le\delta\le 1 \end{matrix}$$

Nun können wir die Aussagen des Hilfssatzes zeigen

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \chi_{jk}(\lambda)\right)\right\|_{p'}^{\frac{p}{p-1}} &= \left\|\mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(\delta_{jk}-\xi_j\xi_k|\xi|^{-2})\varphi^0(\xi)}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)}\right)\right)\right\|_{p'}^{\frac{p}{p-1}} \\ &= \left\| i^{|\alpha|}\xi^\alpha \frac{(\delta_{jk}-\xi_j\xi_k|\xi|^{-2})\varphi^0(\xi)}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)}\right\|_{\frac{p}{p-1}}^{\frac{p}{p-1}} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(|\xi|^{|\alpha|} \underbrace{|\delta_{jk}-\xi_j\xi_k|\xi|^{-2}|}_{\le 2} \frac{|\varphi^0(\xi)|}{|q(\xi)|} \right)^{\frac{p}{p-1}} d\xi \\ &\le C \int\limits_{|\xi|\le 2} \left(\frac{|\xi|^{|\alpha|}}{|q(\xi)|}\right)^{\frac{p}{p-1}} d\xi \\ &\le C \int\limits_{|\xi|\le 2} \frac{|\xi|^{\frac{|\alpha|p}{p-1}}}{|q(\xi)|^{\frac{p}{p-1}}}\, d\xi \end{aligned}$$

Mit (4.1.13) für $2s = p/(p-1) > 1 \geq \delta$ und $2|\alpha|\tilde{s} = |\alpha|p/(p-1)$ folgt

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \quad \text{falls } 3 - 2\frac{p}{p-1} + \frac{p}{p-1}|\alpha| + \delta > 0 \text{ für } 0 \leq \delta \leq 1 \\ &\leq \frac{C}{|v_\infty|^\delta} \quad \text{falls } p > \frac{3+\delta}{1+|\alpha|+\delta} \text{ für } 0 \leq \delta \leq 1 \end{aligned}$$

Das zeigt (4.1.9). Für (4.1.11) führen wir eine ganz ähnliche Rechnung durch:

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \partial_\lambda \chi_{jk}(\lambda)\right)\right\|_{p'}^{\frac{p}{p-1}} &= \left\|\mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \partial_\lambda \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(\delta_{jk} - \xi_j\xi_k|\xi|^{-2})\varphi^0(\xi)}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)}\right)\right)\right\|_{p'}^{\frac{p}{p-1}} \\ &= \left\| i^{|\alpha|}\xi^\alpha \partial_\lambda \frac{(\delta_{jk} - \xi_j\xi_k|\xi|^{-2})\varphi^0(\xi)}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)}\right\|_{\frac{p}{p-1}}^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\xi|^{|\alpha|} \underbrace{\left|\delta_{jk} - \xi_j\xi_k|\xi|^{-2}\right|}_{\leq 2} \frac{|\varphi^0(\xi)|}{|q(\xi)|^2}\right)^{\frac{p}{p-1}} d\xi \\ &\leq C \int_{|\xi|\leq 2} \left(\frac{|\xi|^{|\alpha|}}{|q(\xi)|^2}\right)^{\frac{p}{p-1}} d\xi \\ &\leq C \int_{|\xi|\leq 2} \frac{|\xi|^{\frac{|\alpha|p}{p-1}}}{|q(\xi)|^{\frac{2p}{p-1}}}\, d\xi \end{aligned}$$

Schließlich folgt für $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \partial_\lambda \chi_{jk}(\lambda)\right)\right\|_{p'} &\leq C \left(\int_{|\xi|\leq 2} \frac{|\xi|^{\frac{|\alpha|p}{p-1}}}{|q(\xi)|^{\frac{2p}{p-1}}}\, d\xi\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C \left(\int_{|\xi|\leq 2} \frac{|\xi|^{t\frac{|\alpha|p}{p-1}} 2^{(t-1)\frac{|\alpha|p}{p-1}}}{|q(\xi)|^{\frac{2p}{p-1}}}\, d\xi\right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ &\leq C \frac{1}{|v_\infty|^{\delta\frac{p-1}{p}}} \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)^q} \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} &p > \frac{3+\delta}{-1+|\alpha|+\delta} \quad q = 0 && \text{falls } 0 \leq \delta \leq 1,\ |\alpha| \geq 1 \quad \text{nach (4.1.13)} \\ &\frac{1}{p} > \frac{-1+t|\alpha|+\delta}{3+\delta} \quad q = -\frac{-1+t|\alpha|+\delta}{2} + \frac{3+\delta}{2p} && \text{falls } 0 \leq t, \delta \leq 1 \quad \text{nach (4.1.14)} \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Das Ergebnis ist vor allem dadurch verblüffend, als das $|v_\infty|$ im Nenner vorkommen kann ($\delta \neq 0$), während in allen anderen Abschätzungen $|v_\infty|$ stets durch σ_0 nach oben abgeschätzt werden konnte (jedoch nicht immer direkt linear). Ohne diesen Faktor müssen entweder höhere Ableitungen ($|\alpha|$ größer) oder kleinere Bereiche in p in Kauf genommen werden.

Die Abschätzungen sind in dem Sinn optimal, als daß sich in einigen Fällen von $(|\alpha|, \delta, q)$ alle Abschätzungsschritte im Wesentlichen auch nach unten mit einer entsprechend kleineren Konstanten ϵ statt C durchführen lassen (ohne Beweis).

In der Arbeit von [ShiKo] berechnen die Autoren nicht die p-Normen von χ_{jk} bzw. $\partial_\lambda \chi_{jk}$ sondern die Beträge $|\chi_{jk}(\xi)|$ bzw. $|\partial_\lambda \chi_{jk}(\xi)|$ mit Hilfe von Fouriertheorie, jedoch nur für $\lambda = 0$ (siehe [ShiKo, Lemma 3.8]).

Im folgenden Hilfssatz untersuchen wir das Verhalten von $\chi_{jk}(\lambda)$ für rein imaginäres $\lambda = is$. Ein Blick in Kapitel 5.2 verrät warum: Der Integrationsweg des Integrals zur Darstellung der Oseenhalbgruppe soll auf die imaginäre Achse verschoben werden. Dazu sind natürlich Aussagen über die Integrierbarkeit über die Singularität $\lambda = 0$ hinweg notwendig.

Hilfssatz 4.1.6 *Sei $\chi_{jk}(\lambda)$ wie in Definition 4.1.4 und $1 = 1/p + 1/p'$. Dann gilt mit $v_\infty \neq 0$, falls $\delta \neq 0$, $q \geq 1$ und $\epsilon \geq 0$*

$$\left\|\mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \left(\chi_{jk}(is+ih) - \chi_{jk}(is)\right)\right)\right\|_{p'} \leq \frac{\sqrt{|h|}}{|v_\infty|^{\delta\frac{p-1}{p}}} C_p \quad \forall\, 0 \leq \delta \leq 1,\ p \geq \frac{3+\delta}{|\alpha|+\delta} \tag{4.1.15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\|\mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \chi_{jk}(is)\right)\right\|_{p'}^{p'q} ds \leq C_p < \infty \quad \forall\, p > \frac{5}{5-2q+q|\alpha|},\ p'q > 1 \tag{4.1.16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\|\mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \partial_s \chi_{jk}(is)\right)\right\|_{p'}^{p'q} ds \leq C_p < \infty \quad \forall\, p > \frac{5}{5-4q+q|\alpha|} \tag{4.1.17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\|\mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \left(\chi_{jk}(is+ih) - \chi_{jk}(is)\right)\right)\right\|_{p'}^{p'q} ds \leq \sqrt{|h|}^{p'q} C_p \qquad \forall\, p \geq \frac{5}{5-3q+q|\alpha|},\ p'q > 1 \tag{4.1.18}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\|\mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \partial_s \left(\chi_{jk}(is+ih) - \chi_{jk}(is)\right)\right)\right\|_{p'}^{p'q} ds \leq \sqrt{|h|}^{p'q(1-\epsilon)} C_p \qquad \forall\, p \geq \frac{5}{5-5q+q|\alpha|+q\epsilon},\ \epsilon \geq 0 \tag{4.1.19}$$

wobei $p = 1/0$ als $p = \infty$ zu verstehen ist.

Bemerkung: Die Formulierung des Hilfssatzes durch $\|\ldots\|_p$ anstatt $\|\mathcal{F}(\ldots)\|_{p'}$ würde die Bereiche von p wegen der *Hausdorff-Young* Ungleichung ohne Weiteres auf $p \geq 2$ beschränken. Siehe auch Bemerkung zu Hilfssatz 4.1.5.

Beweis:

Zu (4.1.15): Die wesentliche Idee, insbesondere die Abschätzungen der Integrale stammt aus Hilfssatz 4.1.5.

$$\begin{aligned} p \geq \frac{3+\delta}{|\alpha|+\delta} \quad &\Longleftrightarrow \quad |\alpha|p + \delta p - 3 - \delta \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3(p-1) - 2p + |\alpha|p + \delta(p-1) - p \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3 - 2p' + |\alpha|p' + \delta \geq p' \\ &\Longleftrightarrow \quad 3 + 2p' + |\alpha|p' - 4p' + \delta \geq p' \end{aligned}$$

Sei o. B. $|h| \leq 4$.

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha\left(\chi_{jk}(is+ih) - \chi_{jk}(is)\right)\right)\right\|_{p'}^{p'} \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\varphi^0|^{p'} |\xi|^{|\alpha|p'} \left|\delta_{jk} - \xi_j\xi_k|\xi|^{-2}\right|^{p'} \left| \frac{1}{q(is+ih)(\xi)} - \frac{1}{q(is)(\xi)} \right|^{p'} d\xi \\ &\leq C_p \int\limits_{|\xi|\leq 2} |\xi|^{|\alpha|p'} \left| \frac{1}{q(is+ih)(\xi)} - \frac{1}{q(is)(\xi)} \right|^{p'} d\xi \\ &\leq C_p \int\limits_{|\xi|\leq\sqrt{|h|}} |\xi|^{|\alpha|p'} \left| \frac{1}{q(is+ih)(\xi)} - \frac{1}{q(is)(\xi)} \right|^{p'} d\xi \\ &\quad + C_p \int\limits_{\sqrt{|h|}<|\xi|\leq 2} |\xi|^{|\alpha|p'} \left| \frac{1}{q(is+ih)(\xi)} - \frac{1}{q(is)(\xi)} \right|^{p'} d\xi \end{aligned}$$

Es ist $|q(is+ih)(\xi)q(is)(\xi)| = |q(is+ih)(\xi)||q(is)(\xi)|$. Nach Definition von $q(\lambda)(\xi) = \lambda + |\xi|^2 + iv_\infty \cdot \xi$ ist $|q(is+ih)(\xi) - q(is)(\xi)| = |h|$.

$$\begin{aligned} &\leq C_p \int\limits_{|\xi|\leq\sqrt{|h|}} |\xi|^{|\alpha|p'} \left| \frac{1}{q(is+ih)(\xi)} \right|^{p'} + |\xi|^{|\alpha|p'} \left| \frac{1}{q(is)(\xi)} \right|^{p'} d\xi \\ &\quad + |h|^{p'} C_p \int\limits_{\sqrt{|h|}<|\xi|\leq 2} |\xi|^{|\alpha|p'} \left| \frac{1}{|q(is+ih)(\xi)||q(is)(\xi)|} \right|^{p'} d\xi \end{aligned}$$

Gleichung (4.1.12) angewendet

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C_p}{|v_\infty|^\delta} \int\limits_0^{\sqrt{|h|}} r^{2-2p'+|\alpha|p'+\delta}\, dr \\ &\quad + |h|^{p'} C_p \int\limits_{\substack{\sqrt{|h|}<|\xi|\leq 2 \\ |q(is+ih)(\xi)|\geq|q(is)(\xi)|}} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'}}{|q(is)(\xi)|^{2p'}}\, d\xi \end{aligned}$$

$$+ |h|^{p'} C_p \int\limits_{\substack{\sqrt{|h|}<|\xi|\leq 2 \\ |q(is+ih)(\xi)|<|q(is)(\xi)|}} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'}}{|q(is+ih)(\xi)|^{2p'}} \, d\xi$$

$$\leq \frac{C_p}{|v_\infty|^\delta} \sqrt{|h|}^{3-2p'+|\alpha|p'+\delta}$$

$$+ \frac{C_p}{|v_\infty|^\delta} |h|^{p'} \begin{cases} 2^{3-4p'+|\alpha|p'+\delta} & \text{falls } 3-4p'+|\alpha|p'+\delta > 0 \\ \log 2 - \log \sqrt{|h|} & \text{falls } 3-4p'+|\alpha|p'+\delta = 0 \\ \sqrt{|h|}^{3-4p'+|\alpha|p'+\delta} & \text{falls } 3-4p'+|\alpha|p'+\delta < 0 \end{cases}$$

Es ist $\log 2 - \log \sqrt{|h|} = \log \frac{2}{\sqrt{|h|}} \leq C|h|^{p'/2}$. Mit der obigen Abschätzung für p gilt

$$\leq \frac{C_p}{|v_\infty|^\delta} \sqrt{|h|}^{p'} + \frac{C_p}{|v_\infty|^\delta} \begin{cases} \sqrt{|h|}^{p'} & \text{falls } 3-4p'+|\alpha|p'+\delta \geq 0 \\ \sqrt{|h|}^{2p'+3-4p'+|\alpha|p'+\delta} & \text{falls } 3-4p'+|\alpha|p'+\delta < 0 \end{cases}$$

Wieder mit obigen Abschätzung für p in beiden Fällen

$$\leq \frac{C_p}{|v_\infty|^\delta} \sqrt{|h|}^{p'}$$

Zu (4.1.16):

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\| \mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \chi_{jk}(is)\right)\right\|_{p'}^{p'q} \, ds &\leq C_{p,q} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{|\xi|\leq 2} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q}}{|q(is)(\xi)|^{p'q}} \, d\xi \, ds \\
&\leq C_{p,q} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{|\xi|\leq 2} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q}}{(|\xi|^4 + (v_\infty \cdot \xi + s)^2)^{p'q/2}} \, d\xi \, ds \\
&\leq C_{p,q} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{|\xi|\leq 2} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q-2p'q}}{\left(1 + \frac{(v_\infty\cdot\xi+s)^2}{|\xi|^4}\right)^{p'q/2}} \, d\xi \, ds
\end{aligned}$$

Substitution $t = (v_\infty \cdot \xi + s)/|\xi|^2$. D.h. $ds = |\xi|^2 dt$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{p,q} \int\limits_{|\xi|\leq 2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q-2p'q+2}}{(1+t^2)^{p'q/2}} \, dt d\xi \\
&\leq C_{p,q} \int\limits_{|\xi|\leq 2} |\xi|^{|\alpha|p'q-2p'q+2} \, d\xi \underbrace{\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^{p'q/2}} \, dt}_{<\infty,\ \forall\ p'q>1} \\
&= C_{p,q} \int\limits_0^2 r^{|\alpha|p'q-2p'q+4} \, dr \\
&< \infty
\end{aligned}$$

falls $|\alpha|p'q - 2p'q + 5 > 0 \iff p > 5/(5 + |\alpha|q - 2q)$ und $p'q > 1$.

Zu (4.1.17): Fast wortwörtlich wie (4.1.16)

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left\| \mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \partial_s \chi_{jk}(is)\right) \right\|_{p'}^{p'q} \, ds &\leq C_{p,q} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|\xi|\leq 2} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q}}{|q(is)(\xi)|^{2p'q}} \, d\xi \, ds \\
&\leq C_{p,q} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|\xi|\leq 2} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q}}{(|\xi|^4 + (v_\infty \cdot \xi + s)^2)^{p'q}} \, d\xi \, ds \\
&\leq C_{p,q} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|\xi|\leq 2} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q - 4p'q}}{\left(1 + \frac{(v_\infty \cdot \xi + s)^2}{|\xi|^4}\right)^{p'q}} \, d\xi \, ds
\end{aligned}
$$

Substitution $t = (v_\infty \cdot \xi + s)/|\xi|^2$. D.h. $ds = |\xi|^2 dt$

$$
\begin{aligned}
&\leq C_{p,q} \int_{|\xi|\leq 2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q - 4p'q + 2}}{(1+t^2)^{p'q}} \, dt d\xi \\
&\leq C_{p,q} \int_{|\xi|\leq 2} |\xi|^{|\alpha|p'q - 4p'q + 2} \, d\xi \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{p'q}} \, dt}_{<\infty, \ \forall \ p'q \geq 1} \\
&= C_{p,q} \int_0^2 r^{|\alpha|p'q - 4p'q + 4} \, dr \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

falls $|\alpha|p'q - 4p'q + 5 > 0 \iff p > 5/(5 + |\alpha|q - 4q)$.

Zu (4.1.18): Ähnlich wie (4.1.15):

$$
\begin{aligned}
p \geq \frac{5}{5 - 3q + |\alpha|q} &\iff 5p - 3pq + |\alpha|pq - 5 \geq 0 \\
&\iff 5(p-1) - 3pq + |\alpha|pq \geq 0 \\
&\iff 5 - 3p'q + |\alpha|p'q \geq 0 \\
&\iff 5 - 2p'q + |\alpha|p'q \geq p'q
\end{aligned}
$$

Das Integral wird wie folgt abgeschätzt: Sei wider o.B.d.A. $|h| \leq 4$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left\| \mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \left(\chi_{jk}(is + ih) - \chi_{jk}(is)\right)\right) \right\|_{p'}^{p'q} \\
&\quad \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi^0|^{p'q} |\xi|^{|\alpha|p'q} \left|\delta_{jk} - \xi_j \xi_k |\xi|^{-2}\right|^{p'q} \left| \frac{1}{q(is+ih)(\xi)} - \frac{1}{q(is)(\xi)} \right|^{p'q} \, d\xi \, ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le\ C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|\xi|\le 2} |\xi|^{|\alpha|p'q} \left| \frac{1}{q(is+ih)(\xi)} - \frac{1}{q(is)(\xi)} \right|^{p'q} d\xi\ ds \\
&\le\ C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|\xi|\le\sqrt{|h|}} |\xi|^{|\alpha|p'q} \left| \frac{1}{q(is+ih)(\xi)} - \frac{1}{q(is)(\xi)} \right|^{p'q} d\xi\ ds \\
&\quad + C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sqrt{|h|}<|\xi|\le 2} |\xi|^{|\alpha|p'q} \left| \frac{1}{q(is+ih)(\xi)} - \frac{1}{q(is)(\xi)} \right|^{p'q} d\xi\ ds \\
&\le\ C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|\xi|\le\sqrt{|h|}} |\xi|^{|\alpha|p'q} \left| \frac{1}{q(is+ih)(\xi)} \right|^{p'q} + |\xi|^{|\alpha|p'q} \left| \frac{1}{q(is)(\xi)} \right|^{p'q} d\xi\ ds \\
&\quad + |h|^{p'q} C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sqrt{|h|}<|\xi|\le 2} |\xi|^{|\alpha|p'q} \left| \frac{1}{|q(is+ih)(\xi)||q(is)(\xi)|} \right|^{p'q} d\xi\ ds \\
&\le\ C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|\xi|\le\sqrt{|h|}} |\xi|^{|\alpha|p'q} \left| \frac{1}{q(is+ih)(\xi)} \right|^{p'q} + |\xi|^{|\alpha|p'q} \left| \frac{1}{q(is)(\xi)} \right|^{p'q} d\xi\ ds \\
&\quad + |h|^{p'q} C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\substack{\sqrt{|h|}<|\xi|\le 2 \\ |q(is+ih)(\xi)|\ge|q(is)(\xi)|}} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q}}{|q(is)(\xi)|^{2p'q}}\, d\xi\ ds \\
&\quad + |h|^{p'q} C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\substack{\sqrt{|h|}<|\xi|\le 2 \\ |q(is+ih)(\xi)|<|q(is)(\xi)|}} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q}}{|q(is+ih)(\xi)|^{2p'q}}\, d\xi\ ds \\
&\le\ C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|\xi|\le\sqrt{|h|}} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q}}{(|\xi|^4 + (v_\infty\cdot\xi+s+h)^2)^{\frac{p'q}{2}}} + \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q}}{(|\xi|^4 + (v_\infty\cdot\xi+s)^2)^{\frac{p'q}{2}}}\, d\xi\ ds \\
&\quad + |h|^{p'q} C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sqrt{|h|}<|\xi|\le 2} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q}}{||\xi|^4 + (v_\infty\cdot\xi+s)^2|^{p'q}}\, d\xi\ ds \\
&\quad + |h|^{p'q} C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sqrt{|h|}<|\xi|\le 2} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q}}{||\xi|^4 + (v_\infty\cdot\xi+s+h)^2|^{p'q}}\, d\xi\ ds
\end{aligned}
$$

Weiter gehts wie in (4.1.16) und (4.1.17). Substitution mit $t = (v_\infty\cdot\xi+s)/|\xi|^2$ bzw. $t = (v_\infty\cdot\xi+s+h)/|\xi|^2$ ergibt

$$
\le\ C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|\xi|\le\sqrt{|h|}} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q-2p'q+2}}{(1+t^2)^{\frac{p'q}{2}}}\, d\xi\ ds + |h|^{p'q} C_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sqrt{|h|}<|\xi|\le 2} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q-4p'q+2}}{(1+t^2)^{p'q}}\, d\xi\ ds
$$

$$\leq C_p \int\limits_{|\xi|\leq\sqrt{|h|}} |\xi|^{|\alpha|p'q-2p'q+2}\, d\xi \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{p'q}{2}}}\, ds}_{<\infty,\ \forall p'q>1}$$

$$+ |h|^{p'q} C_p \int\limits_{\sqrt{|h|}<|\xi|\leq 2} |\xi|^{|\alpha|p'q-4p'q+2} d\xi \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{p'q}}\, ds}_{<\infty,\ \forall p'q\geq 1}$$

$$\leq C_p \int\limits_{r=0}^{\sqrt{|h|}} r^{|\alpha|p'q-2p'q+4}\, dr + |h|^{p'q} C_p \int\limits_{r=\sqrt{|h|}}^{2} r^{|\alpha|p'q-4p'q+4} dr$$

$$\leq C_p \sqrt{|h|}^{|\alpha|p'q-2p'q+5} + |h|^{p'q} C_p \begin{cases} 2^{|\alpha|p'q-4p'q+5} & \text{falls } |\alpha|p'q-4p'q+5>0 \\ \log 2 - \log\sqrt{|h|} & \text{falls } |\alpha|p'q-4p'q+5=0 \\ \sqrt{|h|}^{|\alpha|p'q-4p'q+5} & \text{falls } |\alpha|p'q-4p'q+5<0 \end{cases}$$

Analog zu den Abschätzungen zu (4.1.15) folgt

$$\leq C_p \sqrt{|h|}^{p'q} + C_p \begin{cases} \sqrt{|h|}^{p'q} & \text{falls } |\alpha|p'q-4p'q+5\geq 0 \\ \sqrt{|h|}^{|\alpha|p'q-2p'q+5} & \text{falls } |\alpha|p'q-4p'q+5<0 \end{cases}$$

und mit der obigen Umformung der Parametergrenze für p bzw. p' gilt

$$\leq C_p \sqrt{|h|}^{p'q}$$

in den angegebenen Bereichen von p und q.

Zu (4.1.19): Die Idee, insbesondere die Unterteilung des Integrals die 5 Bereiche stammt von [ShiKo, Lemma 3.6, S.: 19]. Zunächst ein paar Umformungen: Sei $t := s + v_\infty \cdot \xi$ und o.B.d.A $|h| \leq 4$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q^2(is+ih)} - \frac{1}{q^2(is)} \\
&\quad= \frac{1}{\left(|\xi|^2+i(t+h)\right)^2} - \frac{1}{\left(|\xi|^2+it\right)^2} \\
&\quad= \frac{\left(|\xi|^2-i(t+h)\right)^2}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^2} - \frac{\left(|\xi|^2-it\right)^2}{\left(|\xi|^4+t^2\right)^2} \\
&\quad= \frac{\left(|\xi|^2-i(t+h)\right)^2\left(|\xi|^4+t^2\right)^2 - \left(|\xi|^2-it\right)^2\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^2}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^2\left(|\xi|^4+t^2\right)^2} \\
&\quad= \frac{\left(|\xi|^4+t^2\right)\left(|\xi|^2-i(t+h)\right)^2\left(|\xi|^4+(t+h)^2-2th-h^2\right)}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^2\left(|\xi|^4+t^2\right)^2} \\
&\qquad- \frac{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)\left(|\xi|^2-it\right)^2\left(|\xi|^4+t^2+2th+h^2\right)}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^2\left(|\xi|^4+t^2\right)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)\left(|\xi|^4+t^2\right)\overbrace{\left(\left(|\xi|^2-i(t+h)\right)^2-\left(|\xi|^2-it\right)^2\right)}^{=h\left(-t-h+2i|\xi|^2\right)}}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^2\left(|\xi|^4+t^2\right)^2} \\
&\quad - \frac{h(2t+h)\left(\left(|\xi|^4+t^2\right)\left(|\xi|^2-i(t+h)\right)^2+\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)\left(|\xi|^2-it\right)^2\right)}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^2\left(|\xi|^4+t^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{q^2(is+ih)}-\frac{1}{q^2(is)}\right| &\leq |h| \frac{|t+h-2i|\xi|^2|+|2t+h|\left(\overbrace{\frac{\left||\xi|^2-i(t+h)\right|^2}{|\xi|^4+(t+h)^2}}^{=1}+\overbrace{\frac{\left||\xi|^2-it\right|^2}{|\xi|^4+t^2}}^{=1}\right)}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)\left(|\xi|^4+t^2\right)} \\
&\leq |h| \frac{|t+h-2i|\xi|^2|+2|2t+h|}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)\left(|\xi|^4+t^2\right)} \\
&\leq |h| \frac{5|t|+3|h|+2|\xi|^2}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)\left(|\xi|^4+t^2\right)} \\
&\leq C \frac{|h|\left(|t|+|h|+|\xi|^2\right)}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)\left(|\xi|^4+t^2\right)}
\end{aligned}
$$

Aus der Definition von χ_{jk} folgt

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left\|\mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \partial_s\left(\chi_{jk}(is+ih)-\chi_{jk}(is)\right)\right)\right\|_{p'}^{p'q}\, ds \\
&\quad\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{|\xi|\leq 2} |\xi|^{|\alpha|p'q}\left|\frac{1}{q^2(is+ih)}-\frac{1}{q^2(is)}\right|^{p'q} d\xi\, ds \\
&\quad\leq C \int_{|\xi|\leq 2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|h|^{p'q}\left(|t|+|h|+|\xi|^2\right)^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q}}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^{p'q}\left(|\xi|^4+t^2\right)^{p'q}}\, dt\, d\xi \\
&\quad=: C \sum_{j=1,\dots,5}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\omega_j} \frac{|h|^{p'q}\left(|t|+|h|+|\xi|^2\right)^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q}}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^{p'q}\left(|\xi|^4+t^2\right)^{p'q}}\, d\xi\, dt
\end{aligned}
$$

wobei $\cup_{j=1,\dots,5}\omega_j = \{|\xi|\leq 2\}$ und

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &:= \left\{|\xi|\leq\sqrt{|h|},\ |t|\leq |h|/2\right\} & \omega_2 &:= \left\{|\xi|\leq\sqrt{|h|},\ |h|/2\leq |t|\leq 2|h|\right\} \\
\omega_3 &:= \left\{|\xi|\leq\sqrt{|h|},\ |t|\geq 2|h|\right\} & \omega_4 &:= \left\{|\xi|\geq\sqrt{|h|},\ |t|\leq 2|h|\right\} \\
\omega_5 &:= \left\{|\xi|\geq\sqrt{|h|},\ |t|\geq 2|h|\right\}
\end{aligned}
$$

Betrachten wir jeden Fall einzeln:

Für ω_1 gilt $|t|+|h|+|\xi|^2 \leq C|h|$, $|t+h| \geq |h|-|t| \geq |h|/2$ und daher $(|\xi|^4+(t+h)^2) \geq \left(|\xi|^4+\frac{|h|^2}{4}\right) \geq |h|^2/4$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\omega_1} \frac{|h|^{p'q}\left(|t|+|h|+|\xi|^2\right)^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q}}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^{p'q}\left(|\xi|^4+t^2\right)^{p'q}}\,d\xi\,dt \leq\ C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{|\xi|\leq\sqrt{|h|}} \frac{|h|^{p'q}|h|^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q}}{|h|^{2p'q}\left(|\xi|^4+t^2\right)^{p'q}}\,d\xi\,dt$$

Substitution $x=t/|\xi|^2$

$$\begin{aligned}
&\leq\ C\int_{|\xi|\leq\sqrt{|h|}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q-4p'q+2}}{(1+x^2)^{p'q}}\,dx\,d\xi\\
&\leq\ C_p\int_{r=0}^{\sqrt{|h|}} r^{|\alpha|p'q-4p'q+4}\,dr\\
&\leq\ C_p\sqrt{|h|}^{p'q(1-\epsilon)}
\end{aligned}$$

falls

$$|\alpha|p'q-4p'q+5 \geq p'q(1-\epsilon) \iff p \geq \frac{5}{5-5q+q|\alpha|+q\epsilon}$$

Für ω_2 gilt $|t|+|h|+|\xi|^2 \leq C|h|$, $|t| \geq |h|/2$ und daher $(|\xi|^4+t^2) \geq \left(|\xi|^4+\frac{|h|^2}{4}\right) \geq |h|^2/4$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\omega_2} \frac{|h|^{p'q}\left(|t|+|h|+|\xi|^2\right)^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q}}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^{p'q}\left(|\xi|^4+t^2\right)^{p'q}}\,d\xi\,dt \leq\ C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{|\xi|\leq\sqrt{|h|}} \frac{|h|^{p'q}|h|^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q}}{|h|^{2p'q}\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^{p'q}}\,d\xi\,dt$$

Substitution $x=(t+h)/|\xi|^2$

$$\begin{aligned}
&\leq\ C\int_{|\xi|\leq\sqrt{|h|}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi|^{|\alpha|p'q-4p'q+2}}{(1+x^2)^{p'q}}\,dx\,d\xi\\
&\leq\ C_p\int_{r=0}^{\sqrt{|h|}} r^{|\alpha|p'q-4p'q+4}\,dr\\
&\leq\ C_p\sqrt{|h|}^{p'q(1-\epsilon)}
\end{aligned}$$

falls

$$|\alpha|p'q-4p'q+5 \geq p'q(1-\epsilon) \iff p \geq \frac{5}{5-5q+q|\alpha|+q\epsilon}$$

Für ω_3 gilt $|t|+|h|+|\xi|^2 \le C|t|$, $(t+h)^2 \ge (|t|-|h|)^2 = (|t|/2+|t|/2-|h|)^2 \ge (|t|/2+|h|-|h|)^2 = |t|^2/4$ und daher $(|\xi|^4+(t+h)^2) \ge \left(|\xi|^4+\frac{|t|^2}{4}\right) \ge (|\xi|^4+t^2)/4$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\omega_3} \frac{|h|^{p'q}\left(|t|+|h|+|\xi|^2\right)^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q}}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^{p'q}\left(|\xi|^4+t^2\right)^{p'q}}\,d\xi\,dt$$
$$\le C\int_{2|h|}^{\infty}\int_{|\xi|\le\sqrt{|h|}} \frac{|h|^{p'q}|t|^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q}}{\left(|\xi|^4+t^2\right)^{2p'q}}\,d\xi\,dt$$

Substitution auf Polarkoordinaten ($r=|\xi|$)

$$\le C\int_{2|h|}^{\infty}\int_{r\le\sqrt{|h|}} \frac{|h|^{p'q}|t|^{p'q}r^{|\alpha|p'q+2}}{\left(r^4+t^2\right)^{2p'q}}\,dr\,dt$$

Substitution $x=r/\sqrt{|t|}$, d.h. $x_1=0$, $x_2=\sqrt{|h|}/\sqrt{|t|}\le\sqrt{|h|}/\sqrt{2|h|}=1/\sqrt{2}$

$$\le C\int_{t=2h}^{\infty}\int_{x=0}^{\sqrt{2}/2} \frac{|h|^{p'q}|t|^{p'q+1/2-4p'q+|\alpha|p'q/2+1}|x|^{|\alpha|p'q+2}}{\left(x^4+1\right)^{2p'q}}\,dx\,dt$$
$$\le C_{p,q}\int_{x=0}^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{\left(x^4+1\right)^{2p'q}}\,dx\int_{t=2h}^{\infty}|h|^{p'q}|t|^{3/2-3p'q+|\alpha|p'q/2}\,dt$$
$$\le C_p\sqrt{|h|}^{p'q(1-\epsilon)}$$

falls

$$5/2-3p'q+|\alpha|p'q/2\ge -p'q(1+\epsilon)/2 \iff p\ge\frac{5}{5-5q+q|\alpha|+q\epsilon}$$

Für ω_4 gilt $|t|+|h|+|\xi|^2\le C|\xi|^2$, $(t+h)\ge 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\omega_4} \frac{|h|^{p'q}\left(|t|+|h|+|\xi|^2\right)^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q}}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^{p'q}\left(|\xi|^4+t^2\right)^{p'q}}\,d\xi\,dt \le C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{2\ge|\xi|\ge\sqrt{|h|}} \frac{|h|^{p'q}|\xi|^{2p'q+|\alpha|p'q}}{|\xi|^{4p'q}\left(|\xi|^4+t^2\right)^{p'q}}\,d\xi\,dt$$

Substitution $x=t/|\xi|^2$

$$\le C\int_{\sqrt{|h|}\le|\xi|\le 2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|h|^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q-6p'q+2}}{\left(1+x^2\right)^{p'q}}\,dx\,d\xi$$

Substitution auf Polarkoordinaten und Integration über x

$$\le C|h|^{p'q}\int_{r=\sqrt{|h|}}^{2} r^{|\alpha|p'q-6p'q+4}\,dr$$
$$\le C_p\sqrt{|h|}^{p'q(1-\epsilon)}$$

falls

$$|\alpha|p'q - 6p'q + 5 \geq -p'q(1+\epsilon) \iff p \geq \frac{5}{5-5q+q|\alpha|+q\epsilon}$$

Für ω_5 gilt $|t|+|h|+|\xi|^2 \leq C\left(|\xi|^2+|t|\right)$, $(t+h)^2 \geq (|t|-|h|)^2 = (|t|/2+|t|/2-|h|)^2 \geq (|t|/2+|h|-|h|)^2 = |t|^2/4$ und daher $\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right) \geq \left(|\xi|^4+\frac{|t|^2}{4}\right) \geq \left(|\xi|^4+t^2\right)/4$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\omega_5} \frac{|h|^{p'q}\left(|t|+|h|+|\xi|^2\right)^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q}}{\left(|\xi|^4+(t+h)^2\right)^{p'q}\left(|\xi|^4+t^2\right)^{p'q}}\,d\xi\,dt$$

$$\leq C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{2\geq|\xi|\geq\sqrt{|h|}} \frac{|h|^{p'q}\left(|\xi|^2+|t|\right)^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q}}{\left(|\xi|^4+t^2\right)^{2p'q}}\,d\xi\,dt$$

Substitution $x = t/|\xi|^2$

$$\leq C\int\limits_{\sqrt{|h|}\leq|\xi|\leq 2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|h|^{p'q}|\xi|^{|\alpha|p'q-6p'q+2}\left(1+|x|\right)}{\left(1+x^2\right)^{p'q}}\,dx\,d\xi$$

Substitution auf Polarkoordinaten und Integration über x

$$\leq C|h|^{p'q}\int\limits_{r=\sqrt{|h|}}^{2} r^{|\alpha|p'q-6p'q+4}\,dr$$

$$\leq C_p\sqrt{|h|}^{p'q(1-\epsilon)}$$

falls

$$|\alpha|p'q - 6p'q + 5 \geq -p'q(1+\epsilon) \iff p \geq \frac{5}{5-5q+q|\alpha|+q\epsilon}$$

$\square$

4.2 Existenz und Eindeutigkeit

Zu einer stationären Lösung von Navier-Stokes, d.h. einer Lösung von (1.0.1) sollen Lösungen des vollen Oseen-Operators mit Hilfe der Fouriertransformation und den Aussagen von [ShiKo] zu dem „einfachen“ Oseen-Operator im Ganzraum berechnet werden. Sei wieder $\mathcal{B}(u) = \nabla\big(u \otimes v + v \otimes u\big)$, $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$; $v \in \mathcal{C}^\infty \cap W_0^{1,r} \cap \hat{W}^{2,s}$, $r > 2$, $s > 4/3$ und $\frac{6}{5} \leq p \leq 2$. Für die genau Definition von v siehe Kapitel 2, insbesondere die Aussagen von Satz 2.0.1 und [Galdi2, Definition 1.1, S. 63]. Zu $0 \neq v_\infty \in \mathbb{R}^3$ sind Lösungen von

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_e(\lambda)u + \mathcal{B}u + \nabla p &= f \\ \nabla \cdot u &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{Q}_e(\lambda)u = \lambda - \Delta + (v_\infty \cdot \nabla)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ ist, gesucht. Natürlich ist $\mathcal{Q}_\lambda = \mathcal{Q}_e(\lambda) + \mathcal{B}$. Daß wir in diesem Kapitel die Abhängigkeit von λ in der Notation von der Parameterschreibweise zu der Variablenschreibweise ändern, soll verdeutlichen, daß es im Ganzraum stark darauf ankommt, wie sich der Operator in der Umgebung von 0 verhällt.

Zu $\mathcal{Q}_e(\lambda)$ ist $q(\lambda) := \lambda + |\xi|^2 + iv_\infty \cdot \xi$ das charakteristische Polynom (d.h. $\mathcal{F}(\mathcal{Q}_e(u)) = q \cdot \mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}$ die Fouriertransformierte).

Sei

$$\sum\nolimits_{v_\infty} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |v_\infty|^2 \operatorname{Re}(\lambda) + (\operatorname{Im}(\lambda))^2 > 0\}$$

Für $\lambda \in \sum_{v_\infty}$ und $\xi \in \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$|q(\lambda)(\xi)| > 0$$

Denn wäre für $\lambda \in \sum_{v_\infty}$ und $\xi \in \mathbb{R}^3$ $q = 0$, so auch $|q|^2 = 0$ also $0 = |q|^2 = (\operatorname{Re}(\lambda) + |\xi|^2)^2 + (\operatorname{Im}(\lambda) + \xi \cdot v_\infty)^2$

$$\Leftrightarrow \qquad \operatorname{Re}(\lambda) = -|\xi|^2; \quad \operatorname{Im}(\lambda) = -\xi \cdot v_\infty$$

Wegen $\lambda \in \sum_{v_\infty}$ muß aber gelten

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda) &> -\frac{\operatorname{Im}^2(\lambda)}{|v_\infty|^2} \\ \Longleftrightarrow \quad -|\xi|^2 &> -\frac{|\xi \cdot v_\infty|^2}{|v_\infty|^2} \\ \Longleftrightarrow \quad |\xi|^2 &< \frac{|\xi \cdot v_\infty|^2}{|v_\infty|^2} \leq \frac{|\xi|^2 \cdot |v_\infty|^2}{|v_\infty|^2} = |\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Widerspruch. Da $|q(1)(0)| = 1 > 0$; $1 \in \sum_{v_\infty}$ ist $|q| > 0$.

Es gilt der folgende

Hilfssatz 4.2.1 *Sei zu $\epsilon > 0$, $v_\infty \neq 0$*

$$M_\epsilon := \left\{ \operatorname{Re}(\lambda) \geq -\frac{(\operatorname{Im}(\lambda))^2}{3|v_\infty|^2} + \epsilon \cdot \exp(-(\operatorname{Im}(\lambda))^2) \right\}$$

Dann gibt es ein $c = c(\epsilon) \in \mathbb{R}_+$*, so daß*

$$|q(\lambda)(\xi)| > c \qquad \forall \lambda \in M_\epsilon, \xi \in \mathbb{R}^3$$

Beweis: Statt $|q|$ genügt es $|q|^2(\lambda)(\xi) = (\mathrm{Re}(\lambda) + |\xi|^2)^2 + (\mathrm{Im}(\lambda) + \xi \cdot v_\infty)^2$ zu untersuchen.

Zunächst sei festgestellt, daß $|q|$ im Inneren von $M_\epsilon \times \mathbb{R}^3$, d.h. in $\overset{\circ}{M_\epsilon} \times \mathbb{R}^3$ wegen $M_\epsilon \subset \sum_{v_\infty}$ kein lokales Minimum annehmen kann:

Hätte $|q(\lambda)(\xi)|$ in $\sum_{v_\infty} \times \mathbb{R}^3$ ein lokales Minimum, so

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\lambda |q|^2 \\ &= \left(\mathrm{Re}(\lambda) + |\xi|^2, \mathrm{Im}(\lambda) + \xi \cdot v_\infty\right)^T \end{aligned}$$

Wie oben für $|q| > 0$ argumentiert ist das schon hinreichend für $\lambda = \xi = 0$, im Widerspruch zu $0 \notin \sum_{v_\infty}$.

Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times [-|v_\infty|, |v_\infty|] \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) &\longmapsto (x + t^2)^2 + (y + t \cdot z)^2 \end{aligned}$$

Sei $y := \mathrm{Im}(\lambda)$, $x := \mathrm{Re}(\lambda)$, dann ist

$$|q|^2(\lambda)(\xi) = |q|^2(x, y, \xi) = f \circ \varphi(x, y, \xi) = f(x, y, \frac{\xi \cdot v_\infty}{|\xi|}, |\xi|)$$

wobei

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^5 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times [-|v_\infty|, |v_\infty|] \times \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^4 \\ (x, y, \xi) &\longmapsto (x, y, \frac{\xi \cdot v_\infty}{|\xi|}, |\xi|) \end{aligned}$$

surjektiv ist. Daher ist

$$(\inf(|q|)^2 = \inf |q|^2 = \inf(f \circ \varphi) = \inf f$$

und es genügt das Minimum bzw. eine untere Schranke für f zu finden. Dabei bleibt die Nebenbedingung aus der Definition von M_ϵ

$$x + \frac{y^2}{3|v_\infty|^2} - \epsilon \exp(-y^2) \geq 0$$

im wesentlichen erhalten. Eliminiert man $x = \mathrm{Re}(\lambda)$, ergibt sich

$$f(y, z, t) \geq \left(-\frac{y^2}{3|v_\infty|^2} + \epsilon \exp(-y^2) + t^2\right)^2 + (y + tz)^2$$

Sei o.B. $\epsilon < \frac{1}{|v_\infty|^2}$

Ist $(y+tz)^2 \geq \epsilon\frac{|v_\infty|^2}{25}$, so hat man $f(y,z,t) \geq \epsilon\frac{|v_\infty|^2}{25}$ und die Schranke $c := \epsilon\frac{|v_\infty|^2}{25}$ ist gefunden.

Im folgenden können wir uns also auf den Fall $(y+tz)^2 < \epsilon\frac{|v_\infty|^2}{25}$ beschränken.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad |y+tz| =: \mu < \sqrt{\epsilon}\,\frac{|v_\infty|}{5}\\
&\Rightarrow \quad \frac{y}{t} = \pm\frac{\mu}{t} + z\\
&\Rightarrow \quad \left(\frac{y}{t}\right)^2 = \left(z \pm \frac{\mu}{t}\right)^2; \qquad 0 \leq \mu < \sqrt{\epsilon}\,\frac{|v_\infty|}{5} < \sqrt{\epsilon}\,\frac{|v_\infty|}{4}
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Sei zunächst $t \geq \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$. Wegen (4.2.1)

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu}{t} \leq \frac{2\mu}{\sqrt{\epsilon}} < \frac{|v_\infty|}{2}$$

Nach Voraussetzung ist $|z| \leq |v_\infty|$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad z^2 \leq |v_\infty|^2\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\pm\frac{\mu}{t}+z\right)^2 \leq z^2 + \left(\frac{\mu}{t}\right)^2 \leq |v_\infty|^2 + \frac{|v_\infty|^2}{4} = \frac{5}{4}|v_\infty|^2\\
&\Rightarrow \quad \left(\pm\frac{\mu}{t}+z\right)^2 \leq \frac{5}{2}|v_\infty|^2 \leq \frac{5}{2}|v_\infty|^2(1+r) \qquad \forall r \geq 0
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
&f(y,z,t)\\
\geq\ & \left(\frac{-y^2}{3|v_\infty|^2} + \epsilon\exp(-y^2) + t^2\right)^2 = \frac{t^4}{9|v_\infty|^4}\left(\frac{-y^2}{t^2} + 3|v_\infty|^2\left(1 + \frac{\epsilon}{t^2}\exp(-y^2)\right)\right)^2\\
\overset{(4.2.1)}{=}\ & \frac{t^4}{9|v_\infty|^4}\left(\underbrace{-\left(z \pm \frac{\mu}{t}\right)^2 + \frac{5}{2}|v_\infty|^2\underbrace{\left(1 + \frac{\epsilon}{t^2}\exp(-y^2)\right)}_{\geq 1}}_{\geq 0} + \frac{1}{2}|v_\infty|^2\underbrace{\left(1 + \frac{\epsilon}{t^2}\exp(-y^2)\right)}_{\geq 1}\right)^2\\
\geq\ & \frac{t^4}{9\cdot 4}\\
\geq\ & \frac{\epsilon^2}{36\cdot 2^4} = \frac{\epsilon^2}{576}
\end{aligned}$$

Ist im anderen Fall $t < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad |zt| < \sqrt{\epsilon}\frac{|v_\infty|}{2}\\
&\Rightarrow \quad |y| < \tfrac{7}{10}|v_\infty|\sqrt{\epsilon} \qquad \text{wegen } |y+tz| < \sqrt{\epsilon}\frac{|v_\infty|}{5}\\
&\Leftrightarrow \quad |y|^2 < \tfrac{49}{100}|v_\infty|^2\epsilon < \tfrac{\epsilon}{2}|v_\infty|^2\\
&\Rightarrow \quad |y|^2 < \tfrac{\epsilon}{2}|v_\infty|^2 = \tfrac{\epsilon|v_\infty|^2}{1+1} \leq \tfrac{\epsilon|v_\infty|^2}{1+\epsilon|v_\infty|^2} \quad \text{da o.B. } \epsilon < \frac{1}{|v_\infty|^2}
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
0 &< -y^2(1+\epsilon|v_\infty|^2)+\epsilon|v_\infty|^2\\
&\le -y^2(1+\epsilon|v_\infty|^2)+\epsilon|v_\infty|^2+\epsilon|v_\infty|^2\underbrace{(\exp(-y^2)-1+y^2)}_{\ge 0}\\
&= -y^2+\epsilon|v_\infty|^2\exp(-y^2)
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
&f(y,z,t)\\
&\ge \left(\frac{-y^2}{3|v_\infty|^2}+\epsilon\exp(-y^2)+t^2\right)^2\\
&= \frac{1}{9|v_\infty|^4}\left(\underbrace{-y^2+|v_\infty|^2\epsilon\exp(-y^2)}_{\ge 0}+\underbrace{2|v_\infty|^2\epsilon\exp(-y^2)}_{\ge 2|v_\infty|^2\epsilon\exp(-\frac{\epsilon}{2}|v_\infty|^2)}+\underbrace{3|v_\infty|^2t^2}_{\ge 0}\right)^2\\
&\ge \frac{4}{9}\frac{|v_\infty|^4}{|v_\infty|^4}\epsilon^2\exp(-\epsilon|v_\infty|^2)\\
&= \left(\frac{2\epsilon}{3}\right)^2\exp(-\epsilon|v_\infty|^2)\\
&> 0
\end{aligned}$$

Insgesamt also bildet

$$|q|^2(\lambda)(\xi)\ge\min\left\{\frac{\epsilon|v_\infty|^2}{25},\frac{\epsilon^2}{576},\left(\frac{2\epsilon}{3}\right)^2\exp(-\epsilon|v_\infty|^2)\right\}=:c$$

$\forall\lambda\in M_\epsilon,\xi\in\mathbb{R}^3$ eine untere Schranke. $\square$

Die wesentlichen Aussagen zu dem einfachen Oseen-Operator in $\mathbb{R}^3$ sind

Satz 4.2.2 *Sei $1<p<\infty$ und sei zu $\xi\in\mathbb{R}^3$ $\tilde{\xi}:=\xi/|\xi|$. Weiter sei*

$$\begin{aligned}
E_{v_\infty}(\lambda)f &:= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}(\xi)-\tilde{\xi}(\tilde{\xi}\cdot\hat{f})}{q(\lambda)(\xi)}\right) &&; f\in L^p(\mathbb{R}^3)\\
\Pi f &:= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\tilde{\xi}\cdot\hat{f}}{i|\xi|}\right) &&; f\in L^p(\mathbb{R}^3)
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{F}$ die Fouriertransformierte ($\hat{f}=\mathcal{F}(f)$) ist.

Dann ist $E_{v_\infty}f$ und Πf wohldefiniert und es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_e(\lambda)E_{v_\infty}(\lambda)f+\nabla\Pi f &= f\\
\nabla\cdot E_{v_\infty}(\lambda)f &= 0
\end{aligned}$$

Darüberhinaus ist $E_{v_\infty}(\lambda)f$ *holomoroh in* λ*. Ist* $|v_\infty| \leq \sigma_0$ *und* $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$*, so gilt*

$$\|(E_{v_\infty}(\lambda)f - \kappa E_{v_\infty'}(\lambda'))\, f\|_{p,2} \quad \leq \quad c_{p,\epsilon,\sigma_0}\,(1-\kappa+\kappa(|\lambda-\lambda'|+|v_\infty - v_\infty{}'|))\,\|f\|_p \tag{4.2.2}$$

für alle $(v_\infty,\lambda),(v_\infty{}',\lambda') \in \overline{\mathcal{U}_{\sigma_0}(0)} \times M_\epsilon$*, wobei* $\kappa \in \{0,1\}$*.*

M.a.W. $u = E_{v_\infty}f$ *und* $p = \Pi f$ *lösen die Oseen-Gleichung* $\mathcal{Q}_e u + \nabla p = f$*. Geht aus dem Zusammenhang eindeutig hervor um welches* v_∞ *und welches* λ *es sich handelt, unterdrücken wir gelegentlich die Abhängigkeit von diesen Parametern in der Notation.*

Beweis und *Bemerkung*: Beachte, daß $\| \,.\, \|_{p,2}$ die Norm im Sobolevraum $W^{2,p}$ ist. Ohne weiteres läßt sich die Fouriertransformierte nicht auf $f \in L^p$; $p > 2$ anwenden. Jedoch kann man $\mathcal{F}$ auf den gemäßigten Distributionen S' betrachten. Mit $\mathcal{F}^{-1}$ kommt man dann wieder zu L^p zurück. Ein weiteres Hilfsmittel alle Werte von $1 < p < \infty$ zu erhalten ist [ShiKo, Proposition 3.2] oder [Hörmander, Theorem 7.9.5, S. 243]. Für $\frac{6}{5} \leq p \leq 2$ ist jedoch die Fouriertransformierte auf jeden Fall im klassischen Sinn definiert und es gilt $\hat{f} \in L^q$ wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Die Aussagen des Satzes entsprechen wortwörtlich denen von Lemma 3.1 und Lemma 3.11 aus [ShiKo]. Lediglich M_ϵ ist dort durch ein beliebiges Kompaktuum $K \subset \sum_{v_\infty}$ ersetzt. Der Beweis geht jedoch wörtlich durch, wenn man K durch M_ϵ ersetzt und beachtet, daß $|q(\lambda)(\xi)|$ auf M_ϵ global (in λ und ξ) nach unten beschränkt ist, was aber gerade die Aussage von Hilssatz 4.2.1 ist.

Zunächst wird Satz 4.2.2 auf den vollen Oseen-Operator erweitert, jedoch unter der Voraussetzung, daß v und ∇v in geeigneten Räumen hinreichend klein sind. Diese Kleinheitsbedingung ist zudem noch abhängig von ϵ ($\lambda \in M_\epsilon$). Von dieser Abhängigkeit soll der darauffolgende Satz befreien. Auch die explizite Kleinheitsbedingungen an v und ∇v sollen durch die energetische Reynoldzahl ersetzt werden.

Aber zunächst:

Hilfssatz 4.2.3 *Sei* $1 < p < \infty$*;* $\epsilon > 0$*;* $\nu_{p,\epsilon,\sigma_0} > 0$ *derart, daß*

$$\nu_{p,\epsilon,\sigma_0} \cdot c_{p,\epsilon,\sigma_0} c_p = 1$$

ist, wobei c_{p,ϵ,σ_0} *die Konstante aus Satz 4.2.2 und* c_p *die Konstante aus Satz 2.0.5 (2.0.11) sind. Sei für* $\mu > 0$ $\mathcal{B}_\mu(g) := \mu\,\mathcal{B}g$

Dann ist

$$\|\mathcal{B}_\mu E\|_{\mathcal{L}(L^p)} \quad = \quad \mu\|\mathcal{B}E\|_{\mathcal{L}(L^p)} < 1 \qquad \forall 0 \leq \mu < \nu_{p,\epsilon,\sigma_0}$$

Insbesondere besitzt $\mu\mathcal{B}E + \mathbb{I} : L^p(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ *eine in ganz* $L^p(\mathbb{R}^3)$ *erklärte, beschränkte Inverse* $\forall 0 \leq \mu < \nu_{p,\epsilon,\sigma_0}$.

Beweis: Für $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$ gilt nach Satz 2.0.5 (2.0.11) für $j = 0$

$$\|\mathcal{B}g\|_p \quad \leq \quad c_p\|g\|_{p,1} \quad \forall p \geq 1$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mu\|\mathcal{B}Eg\|_p &\leq \mu c_p\|Eg\|_{p,1} \\
&\overset{\text{Satz 4.2.2}}{\leq} \mu c_p c_{p,\epsilon,\sigma_0}\|g\|_p \\
&< \nu_{p,\epsilon,\sigma_0} c_p c_{p,\epsilon,\sigma_0}\|g\|_p \\
&\overset{\text{Vor.}}{=} \|g\|_p
\end{aligned}$$

und somit

$$\|\mathcal{B}_\mu E\|_{\mathcal{L}(L^p)} = \mu\|\mathcal{B}E\|_{\mathcal{L}(L^p)} < 1$$

$\mu\mathcal{B}E.{+}\mathbb{I}. : L^p(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$ ist ein stetiger Operator, dessen Resolventenmenge, also diejenige Menge der $\tilde{\mu}$, für die $\tilde{\mu}\mathcal{B}E. + \mathbb{I}.$ isomorph bleibt, wegen $\mu\|\mathcal{B}E\|_p < 1$ und der Resolventenreihe eine offene Umgebung der 0 enthält, die $[0, \nu_{p,\epsilon,\sigma_0})$ umfaßt. $\square$

Bemerkung:

1) Statt die Kleinheitsbedingung an v und an ∇v zu stellen, wurde sie aus technischen Gründen von μ gefordert.

2) Die Voraussetzungen von Hilfssatz 4.2.3 können sämtlich durch die Forderung $\mu\|\mathcal{B}E\| < 1$ ersetzt werden. Insofern hängt die beschränkte Invertierbarkeit von $\varphi_\mu = \mu\mathcal{B}E + \mathbb{I}$ kritisch von μ ab, daß die Resolventenmenge eines beschränkten Operators stets offen ist, d.h. es existiert ein $\mu^0 > 0$ und ein $f \in L^p$ mit $\|f\|_p = 1$, so daß $\mu^0\|\mathcal{B}Ef\| = 1$ aber $\forall\mu < \mu^0$ gilt $\mu\|\mathcal{B}E\| < 1$.

Wir erinnern hier noch einmal an die Definition der Reynoldszahl für den Operator $\mathcal{B}$

$$\mathrm{Re_E} := \sup_{w\in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\setminus\{0\}} \frac{< -\mathcal{B}w, w >}{\|\nabla w\|_2^2}$$

Als Generalvoraussetzung nehmen wir im folgenden stets

$$\mathrm{Re_E} < 1$$

an.

Hilfssatz 4.2.4 *Sei* $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, $6/5 \leq p \leq 2$ *und zusätzlich* $\lambda \neq 0$ *für* $6/5 < p \leq 2$. *Sei*

$$\varphi_\mu := \mu\mathcal{B}E + \mathbb{I} : L^p(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$$

und $X_\mu := \varphi_\mu(L^p(\mathbb{R}^3)) \subset L^p(\mathbb{R}^3)$. *Sei* φ_μ *für alle* $\mu \leq 1$ *injektiv, d.h. es existiere*

$$\varphi_\mu^{-1} : X_\mu \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$$

Dann gibt es ein $\mu_{\mathit{kritisch}} > 0$, *so daß*

$$\varphi_\mu : L^p(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$$

nur isomorph für alle μ mit $\mu < \mu_{kritisch}$ (d.h. linear, stetig und φ_μ^{-1} stetig), ist, nicht aber für $\mu = \mu_{kritisch}$. Es ist schon

$$\mu_{kritisch} > 1$$

Beweis: Zunächst: Ef ist divergenzfrei, denn

$$\nabla \cdot (Ef) = 0 \iff \mathcal{F}(\nabla \cdot (Ef)) = 0$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\nabla \cdot Ef) &= \mathcal{F}(\partial_i (Ef)_i) \overset{\text{F.P.}}{=} i\xi_i \mathcal{F}((Ef)_i) \overset{\text{Def.}}{=} i\xi_i \left(\frac{\hat{f} - \tilde{\xi}(\tilde{\xi} \cdot \hat{f})}{q} \right)_i \\
&= \frac{i\xi_i}{q} \left(\hat{f}_i - \frac{\tilde{\xi}_i}{|\xi|} (-i\mathcal{F}(\nabla \cdot f)) \right) \\
&= \frac{1}{q} (\underbrace{i\xi_i \hat{f}_i}_{=\mathcal{F}(\nabla \cdot f)} - \underbrace{\tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_i}_{=1} \mathcal{F}(\nabla \cdot f)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Resolventenmenge $\mathrm{Res} := \{\mu \geq 0 : \varphi_\mu$ ist Isomorphismus $\}$ enthält nach Hilfssatz 4.2.3 eine Umgebung der 0 und ist wegen der Resolventenreihe offen in $\mathbb{R}_+$. Ist $\mathrm{Res} \neq \mathbb{R}_+$, so existiert ein $\mu_{\text{kritisch}} > 0$, so daß $[0, \mu_{\text{kritisch}}) \subset \mathrm{Res}$, aber $\mu_{\text{kritisch}} \notin \mathrm{Res}$. Angenommen φ_μ ist injektiv $\forall \mu \leq 1$, aber $\mu^0 := \mu_{\text{kritisch}} \leq 1$, dann ist φ_{μ^0} nicht surjektiv, d.h. $X_{\mu^0} \neq L^p(\mathbb{R}^3)$ oder $\varphi_{\mu^0}^{-1} : X_\mu \to L^p(\mathbb{R}^3)$ ist nicht stetig.

Zunächst der Fall, daß $\varphi_{\mu^0}^{-1}$ nicht stetig ist:
Es ist dann φ_{μ^0} nicht nach unten beschränkt, d.h.

$$\exists\, \epsilon > 0\, \exists\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p(\mathbb{R}^3) : \|x_n\|_p \geq \epsilon$$

aber

$$\varphi(n) := \varphi_{\mu^0}(x_n) = \mu^0 \mathcal{B} E x_n + x_n \to 0 \qquad (n \to \infty) \text{ in } L^p$$

O.B. sei (x_n) ebenfalls nach oben beschränkt, etwa durch $\|x_n\|_p \leq 1$. Sonst betrachte $\tilde{x}_n := x_n / \|x_n\|_p$. Es ist dann $\|\tilde{x}_n\|_p = 1 > \epsilon$ und

$$\|\mu^0 \mathcal{B} E \tilde{x}_n + \tilde{x}_n\|_p = \frac{1}{\|\tilde{x}_n\|_p} \|\mu^0 \mathcal{B} E x_n + x_n\|_p \leq \frac{1}{\epsilon} \|\mu^0 \mathcal{B} E x_n + x_n\|_p \to 0$$

Weiter sei nach Auswahl einer Teilfolge $\|\varphi(n)\|_p \leq 1/n$

Es ist mit $y := Ex$, $\mathcal{Q}_e y + \nabla p = \mathcal{Q}_e E x + \nabla p = x$ und wegen der Orthogonalität der *Helmholtz* Zerlegung ist $< y, \nabla p >= 0$, da y divergenzfrei ist.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re} < Ex, x > + i\, \mathrm{Im} < Ex, x > &= < Ex, x > = < y, \mathcal{Q}_e y > + < y, \nabla p > \\
&= < y, -\Delta y + \lambda y + (v_\infty \cdot \nabla) y > \\
&= \|\nabla y\|_2^2 + \bar{\lambda} \|y\|_2^2 + < y, (v_\infty \cdot \nabla) y > \\
&= \|\nabla E x\|_2^2 + \bar{\lambda} \|Ex\|_2^2 + i\, \mathrm{Im} < y, (v_\infty \cdot \nabla) y >
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} < Ex, x > &= \|\nabla Ex\|_2^2 + \operatorname{Re}(\lambda)\|Ex\|_2^2 \\
\operatorname{Im} < Ex, x > &= -\operatorname{Im}(\lambda)\|Ex\|_2^2 + \operatorname{Im} < y, (v_\infty \cdot \nabla)y >
\end{aligned}$$

Andererseits ist nach Definition der Reynoldszahl $\mathrm{Re_E}$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} < Ex_n, x_n > \\
&= \operatorname{Re} < Ex_n, -\mu^0 \mathcal{B} Ex_n + \varphi(n) > \\
&= -\operatorname{Re} < Ex_n, \mu^0 \mathcal{B} Ex_n > + \operatorname{Re} < Ex_n, \varphi(n) > \\
&= - < \operatorname{Re} Ex_n, \mu^0 \mathcal{B} \operatorname{Re} Ex_n > - < \operatorname{Im} Ex_n, \mu^0 \mathcal{B} \operatorname{Im} Ex_n > \\
&\quad + \operatorname{Re} < Ex_n, \varphi(n) > \\
&\leq \mu^0 \mathrm{Re_E} \|\nabla \operatorname{Re} Ex_n\|_2^2 + \mu^0 \mathrm{Re_E} \|\nabla \operatorname{Im} Ex_n\|_2^2 + \operatorname{Re} < Ex_n, \varphi(n) > \\
&= \mu^0 \mathrm{Re_E} \|\nabla Ex_n\|_2^2 + \operatorname{Re} < Ex_n, \varphi(n) >
\end{aligned}$$

und somit

$$\|\nabla Ex_n\|_2^2 + \operatorname{Re}(\lambda)\|Ex_n\|_2^2 \leq \mu^0 \mathrm{Re_E} \|\nabla Ex_n\|_2^2 + \operatorname{Re} < Ex_n, \varphi(n) >$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{(1 - \mu^0 \mathrm{Re_E})}_{>0} \|\nabla Ex_n\|_2^2 + \operatorname{Re}(\lambda)\|Ex_n\|_2^2 &\leq \operatorname{Re} < Ex_n, \varphi(n) > \\
&\leq \|Ex_n\|_{p'} \cdot \|\varphi(n)\|_p \\
(1 - \mu^0 \mathrm{Re_E})\|\nabla Ex_n\|_2^2 + \operatorname{Re}(\lambda)\|Ex_n\|_2^2 &\leq \frac{1}{n}\|Ex_n\|_{p'} \\
&\leq \frac{c}{n}\|\nabla Ex_n\|_2^a \cdot \|Ex_n\|_2^{1-a} \\
&\leq \frac{c}{n}\big(a\|\nabla Ex_n\|_2 + (1-a)\|Ex_n\|_2\big)
\end{aligned}$$

wobei $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ und $a = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}\right)$ nach Theorem 9.3 [Friedmann], S. 24 ist. Zum Beispiel ist

p	$\frac{6}{5}$	2
p'	6	2
a	1	0

Ist nun $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, so gilt:

$$\|\nabla Ex_n\|_2^2 + \frac{\operatorname{Re}(\lambda)}{(1 - \mu^0 \mathrm{Re_E})}\|Ex_n\|_2^2 \leq \frac{c}{n}\|\nabla Ex_n\|_2^a \cdot \|Ex_n\|_2^{1-a}$$

Sei n hinreichend groß, aber fest. Da $1 - \mu^0 \mathrm{Re_E} > 0$ folgt

$$\|\nabla Ex_n\|_2^2 + \frac{\operatorname{Re}(\lambda)}{(1 - \mu^0 \mathrm{Re_E})}\|Ex_n\|_2^2 \leq \frac{c}{n}\big(a\|\nabla Ex_n\|_2 + (1-a)\|Ex_n\|_2\big)$$

$$\left(\|\nabla Ex_n\|_2 - \frac{ca}{2n}\right)^2 + \frac{\mathrm{Re}(\lambda)}{(1-\mu^0\,\mathrm{Re_E})}\left(\|Ex_n\|_2 - \frac{c(1-a)(1-\mu^0\,\mathrm{Re_E})}{2\,\mathrm{Re}(\lambda)n}\right)^2 \leq \frac{c^2a^2}{4n^2} + \frac{c^2(1-a)^2(1-\mu^0\,\mathrm{Re_E})}{4\,\mathrm{Re}(\lambda)n^2} = \frac{c^2}{n^2}$$

mit einem geeigneten $c = c(\mu^0, \mathrm{Re_E}, \mathrm{Re}(\lambda)) > 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|Ex_n\|_2 &\leq \frac{c(1-\mu^0\,\mathrm{Re_E})}{n\,\mathrm{Re}(\lambda)} + \frac{c(1-a)(1-\mu^0\,\mathrm{Re_E})}{2\,\mathrm{Re}(\lambda)n} = \frac{C}{n}\text{und} \\ \|\nabla Ex_n\|_2 &\leq \frac{c}{n} + \frac{ca}{n} = \frac{C}{n} \end{aligned}$$

Also folgt

$$\|Ex_n\|_2,\ \|\nabla Ex_n\|_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Ist $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, aber $p = 6/5$, so ist $a = 1$ und es folgt $(1-\mu^0\,\mathrm{Re_E})\|\nabla Ex_n\|_2 \leq c/n \to 0$

Ist dagegen $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ und $6/5 < p \leq 2$, so ist nach Voraussetzung $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, und wir haben

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{Im}(\lambda)|\|Ex\|_2^2 &= |\,\mathrm{Im} < Ex, x > + \mathrm{Im} < Ex, (v_\infty \cdot \nabla)Ex > | \\ &= | < Ex, x > | + | < Ex, (v_\infty \cdot \nabla)Ex > | \\ &\overset{C.S.U.}{\leq} \|Ex\|_{p'}\|x\|_p + |v_\infty|\|Ex\|_2\|\nabla Ex\|_2 \quad \text{wobei} \quad 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |\,\mathrm{Im}(\lambda)|\|Ex\|_2^2 &\leq c\|\nabla Ex\|_2^a\|Ex\|_2^{1-a}\|x\|_p + |v_\infty|\|Ex\|_2\|\nabla Ex\|_2 \\ \Rightarrow \quad \|Ex\|_2^2 &\leq c\left(\|\nabla Ex\|_2^a\|Ex\|_2^{1-a}\|x\|_p + \|Ex\|_2\|\nabla Ex\|_2\right) \end{aligned}$$

nach Theorem 9.3, [Friedmann] mit $a = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}\right)$, wobei die Konstante von λ und von v_∞ abhängt. Ohne Einschränkung konnten wir $\|x\|_p \leq 1$ annehmen. Zwei Möglichkeiten gibt es:

Entweder es ist $\|Ex\|_2\|\nabla Ex\|_2 \leq \|Ex\|_2^{1-a}\|\nabla Ex\|_2^a$, dann ist

$$\begin{aligned} \|Ex\|_2^2 &\leq c\|\nabla Ex\|_2^a \cdot \|Ex\|_2^{1-a} \\ \|Ex\|_2^{1+a} &\leq c\|\nabla Ex\|_2^a \\ \|Ex\|_2^{1-a} &\leq c\|\nabla Ex\|_2^{a\frac{1-a}{1+a}} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} (1-\mu^0\,\mathrm{Re_E})\|\nabla Ex_n\|_2^2 &\leq \frac{c}{n}\|\nabla Ex_n\|_2^a \cdot \|Ex_n\|_2^{1-a} \\ &\leq \frac{c}{n}\|\nabla Ex_n\|_2^a \cdot \|\nabla Ex_n\|_2^{a\frac{1-a}{1+a}} \\ &= \frac{c}{n}\|\nabla Ex_n\|_2^{\frac{2a}{1+a}} \end{aligned}$$

wobei $0 \leq \frac{2a}{1+a} \in [0, 1]$, so daß $\|\nabla Ex_n\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty)$ folgt.

Oder es ist $\|Ex\|_2\|\nabla Ex\|_2 > \|Ex\|_2^{1-a}\|\nabla Ex\|_2^a$, dann ist

$$\begin{aligned}\|Ex\|_2^2 &\leq c\|\nabla Ex\|_2 \cdot \|Ex\|_2 \\ \|Ex\|_2 &\leq c\|\nabla Ex\|_2\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}(1-\mu^0 \operatorname{Re}_{\mathrm{E}})\|\nabla Ex_n\|_2^2 &\leq \frac{c}{n}\|\nabla Ex_n\|_2^a \cdot \|Ex_n\|_2^{1-a} \\ &\leq \frac{c}{n}\|\nabla Ex_n\|_2^a \cdot \|\nabla Ex_n\|_2^{1-a} \\ &= \frac{c}{n}\|\nabla Ex_n\|_2\end{aligned}$$

so daß auch in diesem Fall und somit für alle λ

$$\|\nabla Ex_n\|_2 \to 0 \quad (n\to\infty) \quad \forall\lambda \,:\, \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$$

folgt.

Für $6/5 \leq p \leq 2$ gilt wieder nach Theorem 9.3, [Friedmann]

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}x\|_p &\leq c\|v\|_{\frac{2p}{2-p}} \cdot \|\nabla x\|_2 + c\|\nabla v\|_{\frac{6p}{6-p}} \cdot \|x\|_6 \\ &\leq c\left(\|v\|_{\frac{2p}{2-p}} + \|\nabla v\|_{\frac{6p}{6-p}}\right)\|\nabla x\|_2\end{aligned}$$

Beachte, daß $\frac{6p}{6-p} \in [\frac{3}{2},3]$ für $6/5 \leq p \leq 2$ und $\frac{2p}{2-p} \in (2,\infty]$ für $1 < p \leq 2$. Diese Werte sind somit zulässig, da $v \in L^{\tilde{p}+\epsilon} \quad \forall\tilde{p} \geq 2$ und $\nabla v \in L^{\tilde{p}+\epsilon} \quad \forall\tilde{p} \geq 4/3$ nach Satz 2.0.1. Insbesondere also

$$\|\mathcal{B}Ex_n\|_p \leq c \cdot \|\nabla Ex_n\|_2 \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

Nach Voraussetzung gilt schließlich für hinreichend großes n

$$\frac{\epsilon}{4} \geq \|\mu^0\mathcal{B}Ex_n - (-x_n)\|_p \geq \left|\|x_n\|_p - \|\mu^0\mathcal{B}Ex_n\|_p\right| \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}$$

Widerspruch!

Nun zum Fall, daß φ_{μ^0} nicht surjektiv ist, d.h. $X_{\mu^0} \neq L^p(\mathbb{R}^3)$, wobei

$$X_{\mu^0} = \varphi_{\mu^0}(L^p(\mathbb{R}^3)) = (\mu^0\mathcal{B}E + \mathbb{I})(L^p(\mathbb{R}^3))$$

Da natürlich $L^p(\mathbb{R}^3) \supset X_{\mu^0}$

$$\exists\, y \in L^p(\mathbb{R}^3) : (\mu^0\mathcal{B}E + \mathbb{I})x \neq y \quad \forall x \in L^p(\mathbb{R}^3)$$

Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $0 < \mu_n$, die monoton von unten gegen μ^0 konvergiert. Da $\varphi_{\mu};$

$\forall \mu < \mu^0$ surjektiv ist, also insbesondere φ_{μ_n} surjektiv ist, gilt

$$\begin{aligned}
\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^3): &\quad \mu_n \mathcal{B}Ex_n + x_n = y \\
\Longleftrightarrow &\quad \mathcal{B}E(\mu^0 x_n) + \frac{\mu^0}{\mu_n}x_n = \frac{\mu^0}{\mu_n}y \\
\Longleftrightarrow &\quad X_{\mu^0} \ni \mu^0\mathcal{B}Ex_n + x_n = \frac{\mu^0}{\mu_n}y + \left(1 - \frac{\mu^0}{\mu_n}\right)x_n \\
\overset{\varphi_{\mu^0}\text{ injektiv}}{\Longleftrightarrow} &\quad x_n = \varphi_{\mu^0}^{-1}\left(\frac{\mu^0}{\mu_n}y + \left(1 - \frac{\mu^0}{\mu_n}\right)x_n\right) \qquad \text{und} \\
&\quad \frac{\mu^0}{\mu_n}y + \left(1 - \frac{\mu^0}{\mu_n}\right)x_n \in X_{\mu^0} \\
\Rightarrow &\quad \|x_n\|_p = \left\|\varphi_{\mu^0}^{-1}\left(\tfrac{\mu^0}{\mu_n}y + \left(1 - \tfrac{\mu^0}{\mu_n}\right)x_n\right)\right\|_p \\
&\quad \overset{\varphi_{\mu^0}^{-1}\text{ stetig}}{\leq} c\tfrac{\mu^0}{\mu_n}\|y\|_p + \epsilon_n \cdot \|x_n\|_p
\end{aligned}$$

wobei $\epsilon_n := 1 - \frac{\mu^0}{\mu_n}$ und somit

$$\begin{aligned}
(1-\epsilon_n)\|x_n\|_p &\leq c\frac{\mu^0}{\mu_n}\|y\|_p \\
\|x_n\|_p &\leq c\frac{\mu^0}{\mu_n(1-\epsilon_n)}\|y\|_p \\
&\leq c \cdot \|y\|_p
\end{aligned}$$

für n hinreichend groß. Sei

$$\begin{aligned}
y_n &:= \frac{\mu^0}{\mu_n}y + \left(1 - \frac{\mu^0}{\mu_n}\right)x_n \in X_{\mu^0} \\
&= \frac{\mu^0}{\mu_n}y + \epsilon_n x_n
\end{aligned}$$

(y_n) ist eine Cauchy-Folge, da für vorgegebenes $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|_p &= \left\|\left(\frac{\mu^0}{\mu_n} - \frac{\mu^0}{\mu_m}\right)y + \epsilon_n x_n - \epsilon_m x_m\right\|_p \\
&\leq \left\|\left(\frac{\mu^0 - \mu_n}{\mu_n} - \frac{\mu^0 - \mu_m}{\mu_m}\right)y\right\|_p + \epsilon_n\|x_n\|_p + \epsilon_m\|x_m\|_p \\
&\leq \epsilon_n\|y\|_p + \epsilon_m\|y\|_p + c\,\epsilon_n\|y\|_p + c\,\epsilon_m\|y\|_p \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

für n, m hinreichend groß. Der erste Teil des Beweises hat gezeigt, daß $\varphi_{\mu^0}^{-1}$ stetig ist. Daher ist

X_{μ^0} abgeschlossen (in $L^p(\mathbb{R}^3)$) und somit

$$\begin{array}{rccccc}
 & \multicolumn{5}{l}{\exists\, y^* \in X_{\mu^0} : y_n \to y^*} \\
\iff & \multicolumn{5}{l}{x_n = \varphi_{\mu^0}^{-1}(y_n) \to \varphi_{\mu^0}^{-1}(y*)} \\
\Rightarrow & \mu_n \mathcal{B} E x_n & + & x_n & = y \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \mu^0 \mathcal{B} E \varphi_{\mu^0}^{-1}(y^*) & + & \varphi_{\mu^0}^{-1}(y^*) & = y \\
\iff & \multicolumn{5}{l}{\varphi_{\mu^0}\big(\varphi_{\mu^0}^{-1}(y^*)\big) = y}
\end{array}$$

Da φ_{μ^0} injektiv ist, gilt mit $x := \varphi_{\mu^0}^{-1}$

$$\varphi_{\mu^0} x = (\mu^0 \mathcal{B} E. + \mathbb{I}.)x = y \ \in X_{\mu^0}$$

Widerspruch! Also ist auch φ_{μ^0} surjektiv.

Damit ist φ_{μ^0} ebenfalls ein Isomorphismus im Widerspruch zur Annahme und es folgt wie gewünscht

$$\mu^0 > 1$$

$\square$

Beachte, daß die Surjektivität zwar mit Hilfe der Stetigkeit und der Injektivität gezeigt wurde, ansonsten aber keine Bedingungen an p stellt. M.a.W. φ_{μ^0} ist mindestens für diese p surjektiv, für die φ_{μ^0} injektiv und stetig ist.

Hilfssatz 4.2.5 *Sei $1 < p < \infty$ und f eine auf $\mathbb{R}^3$ meßbare Funktion. Sei $E^0 = E^0_{v_\infty,\lambda}$ der in Definition 4.1.1 bzw. Definition 4.1.4 eingeführte Operator und wieder $\mathcal{B}$ der Operator aus Definition 2.0.4. Dann gelten folgende Aussagen:*

$$\|\mathcal{B}E^0 f\|_p \le \ C_p \|f\|_{1+\epsilon} \qquad \forall \begin{array}{l} 0 \le \epsilon \le \min\left\{1, \frac{1+7\tilde{\delta}}{5-\tilde{\delta}}, \frac{1+13\tilde{\delta}}{11-\tilde{\delta}}\right\} \\ 0 \le \tilde{\delta} < \min\{1/3, p-1\} \end{array} \tag{4.2.3}$$

$$\|\mathcal{B}E^0 f\|_{\frac{4}{3}-\tilde{\epsilon}} \le \ C_{v,\epsilon,\sigma_0} |v_\infty|^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{2-\epsilon} \qquad \forall 0 < \tilde{\epsilon} \le 6\epsilon << 1, \ v_\infty \ne 0 \tag{4.2.4}$$

$$\|\mathcal{B}E^0 f\|_{2-\epsilon} \le \ C_{v,\epsilon} \|f\|_{2-\epsilon} \qquad \forall 0 < \epsilon << 1 \tag{4.2.5}$$

wobei die Konstanten auf den rechten Seiten unabhängig von λ sind.

Beweis: Sei $1 \ge \delta > 0$. Wir werden im Laufe des Beweises δ bzw. $\tilde{\delta}$ weiter einschränken. Sei χ die Matrix $\chi := (\chi_{jk})_{j,k=1,2,3}$, dann ist $E^0 f = \chi * f := \left(\sum_{k=1}^3 \chi_{jk} * f_k\right)_{j=1,2,3}$. Nach Definition von $\mathcal{B} = \nabla\big(\mathcal{E}(v) \otimes . + . \otimes \mathcal{E}(v)\big)$ ist

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}E^0 f\|_{1+\delta} \le \ & \|v\|_{\frac{(1+\delta)q}{q-1-\delta}} \|\nabla E^0 f\|_q + \|\nabla v\|_{\frac{(1+\delta)r}{r-1-\delta}} \|E^0 f\|_r \\
= \ & \|v\|_{\frac{(1+\delta)q}{q-1-\delta}} \|(\nabla\chi) * f\|_q + \|\nabla v\|_{\frac{(1+\delta)r}{r-1-\delta}} \|\chi * f\|_r \\
= \ & \|v\|_{\frac{(1+\delta)q}{q-1-\delta}} \|\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\nabla\chi) \cdot \mathcal{F}(f)\right)\|_q + \|\nabla v\|_{\frac{(1+\delta)r}{r-1-\delta}} \|\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\chi) \cdot \mathcal{F}(f)\right)\|_r
\end{aligned}$$

mit *Hausdorff-Young*-Ungleichung für $q, r \geq 2$

$$\leq\ C\|v\|_{\frac{(1+\delta)q}{q-1-\delta}}\|\mathcal{F}(\nabla\chi)\cdot\mathcal{F}(f)\|_{q'} + \|\nabla v\|_{\frac{(1+\delta)r}{r-1-\delta}}\|\mathcal{F}(\chi)\cdot\mathcal{F}(f)\|_{r'}$$

mit *Hölder*-Ungleichung

$$\leq\ C\|v\|_{\frac{(1+\delta)q}{q-1-\delta}}\|\mathcal{F}(\nabla\chi)\|_{x'}\|\mathcal{F}(f)\|_{(1+\epsilon)'} + \|\nabla v\|_{\frac{(1+\delta)r}{r-1-\delta}}\|\mathcal{F}(\chi)\|_{y'}\|\mathcal{F}(f)\|_{(1+\epsilon)'}$$

mit *Hausdorff-Young*-Ungleichung für $\epsilon \leq 1$

$$\leq\ C\|v\|_{\frac{(1+\delta)q}{q-1-\delta}}\|\mathcal{F}(\nabla\chi)\|_{x'}\|f\|_{1+\epsilon} + \|\nabla v\|_{\frac{(1+\delta)r}{r-1-\delta}}\|\mathcal{F}(\chi)\|_{y'}\|f\|_{1+\epsilon}$$

und mit Satz 2.0.1 und Hilfssatz 4.1.5 folgt mit einer von v_∞ unabhängigen Konstanten C

$$\leq\ C\|f\|_{1+\epsilon}$$

wobei $q := \frac{2(1+\tilde{\delta})}{1-\tilde{\delta}}$, $x := \frac{3}{2-\frac{1}{2}+\frac{3}{1+\tilde{\delta}}-\frac{3}{1+\epsilon}}$ und $r := \frac{4(1+\tilde{\delta})}{1-3\tilde{\delta}}$, $y := \frac{3}{1-\frac{1}{4}+\frac{3}{1+\tilde{\delta}}-\frac{3}{1+\epsilon}}$ mit einem $0 \leq \tilde{\delta} < \delta$
Die Ungleichungskette ist erlaubt, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind

$1+\frac{1}{q} = \frac{1}{x}+\frac{1}{1+\epsilon}$	$1+\frac{1}{r} = \frac{1}{y}+\frac{1}{1+\epsilon}$	Young
$\frac{(1+\delta)q}{q-1-\delta} > 2$	$\frac{(1+\delta)r}{r-1-\delta} > \frac{4}{3}$	Satz 2.0.1
$q \geq 2$	$r \geq 2$	*Hausdorff-Young*
$x > \frac{3}{2}$	$y > 3$	Satz 4.1.5
$0 \leq \epsilon < \frac{1+7\delta}{5-\delta},\ \epsilon \leq 1$	$0 \leq \epsilon < \frac{1+13\delta}{11-\delta},\ \epsilon \leq 1$	gefordert

Beweis dazu: Zuerst der linke Teil:

$$\frac{(1+\delta)q}{q-1-\delta} > 2 \iff q < \frac{2(1+\delta)}{1-\delta}$$

Offensichtlich ist aber $q \geq 2$ und es folgt

$$\begin{aligned}
& 1+\frac{1}{q} = \frac{1}{x}+\frac{1}{1+\epsilon} \\
\iff\quad & 1+\frac{1-\tilde{\delta}}{2(1+\tilde{\delta})} = \frac{1}{x}+\frac{1}{1+\epsilon} \\
\iff\quad & \frac{1}{x} = \frac{2(1+\tilde{\delta})(1+\epsilon)+(1-\tilde{\delta})(1+\epsilon)-2(1+\tilde{\delta})}{2(1+\tilde{\delta})(1+\epsilon)} \\
& \phantom{\frac{1}{x}} = \frac{(1+\tilde{\delta})(1+\epsilon)+2(1+\epsilon)-2(1+\tilde{\delta})}{2(1+\tilde{\delta})(1+\epsilon)} \\
\iff\quad & x = \frac{2}{1+\frac{2}{1+\tilde{\delta}}-\frac{2}{1+\epsilon}} \\
& = \frac{3}{2-\frac{1}{2}+\frac{3}{1+\tilde{\delta}}-\frac{3}{1+\epsilon}}
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist unabhängig von $\epsilon > 0$ größer als 0, falls $\delta \leq 4/3$ ist, was nach Voraussetzung stets erfüllt ist. Andererseits ist

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{1+\tilde{\delta}} - \frac{3}{1+\epsilon} \; < \; 0 \iff \epsilon \; < \; \frac{1+7\tilde{\delta}}{5-\tilde{\delta}}$$

und somit

$$x > \frac{3}{2}$$

Nun zum rechten Teil:

$$\frac{(1+\delta)r}{r-1-\delta} \; > \; \frac{4}{3} \iff r \; < \; \frac{4(1+\delta)}{1-3\delta}$$

Also ist $r \geq 4 > 3$ und

$$\begin{aligned}
& & 1+\frac{1}{r} &= \frac{1}{y} + \frac{1}{1+\epsilon} \\
&\iff & 1+\frac{1-3\tilde{\delta}}{4(1+\tilde{\delta})} &= \frac{1}{y} + \frac{1}{1+\epsilon} \\
&\iff & \frac{1}{y} &= \frac{4(1+\tilde{\delta})(1+\epsilon)+(1-3\tilde{\delta})(1+\epsilon)-4(1+\tilde{\delta})}{4(1+\tilde{\delta})(1+\epsilon)} \\
&\iff & &= \frac{(1+\tilde{\delta})(1+\epsilon)+4(1+\epsilon)-4(1+\tilde{\delta})}{4(1+\tilde{\delta})(1+\epsilon)} \\
&\iff & y &= \frac{4}{1+\frac{4}{1+\tilde{\delta}}-\frac{4}{1+\epsilon}} \\
& & &= \frac{3}{1-\frac{1}{4}+\frac{3}{1+\tilde{\delta}}-\frac{3}{1+\epsilon}}
\end{aligned}$$

und da

$$-\frac{1}{4} + \frac{3}{1+\tilde{\delta}} - \frac{3}{1+\epsilon} \; < \; 0 \iff \epsilon \; < \; \frac{1+13\tilde{\delta}}{11-\tilde{\delta}}$$

folgt

$$y > \; 3$$

Somit hat man

$$\|\mathcal{B}E^0 f\|_{1+\delta} \leq \; C\|f\|_{1+\epsilon} \qquad \forall\, 0 < \delta \leq \frac{1}{3},\; 0 \leq \epsilon \leq \frac{1+7\tilde{\delta}}{11-\tilde{\delta}},\; 0 \leq \tilde{\delta} < \delta,\; \epsilon \leq 1$$

Für großes p, etwa $p \geq 3$ folgt

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}E^0 f\|_p \leq C_p \,\|E^0 f\|_{\infty,1} & & \text{nach (2.0.10)}\\
= \; C_p\|\chi * f\|_{\infty,1} & & \\
= \; C_p\|\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\chi)\cdot\mathcal{F}(f)\right)\|_{\infty,1} & & \\
\leq \; C_p\|\mathcal{F}(\chi)\cdot\mathcal{F}(f)\|_{1,1} & & \textit{Hausdorff-Young}\\
\leq \; C_p\,\|\mathcal{F}\left(\chi\right)\|_{\left(\frac{1+\epsilon}{\epsilon}\right)',1}\,\|\hat{f}\|_{(1+\epsilon)'} & & \textit{Hölder}\\
\leq \; C_p\,\|\mathcal{F}\left(\chi\right)\|_{\left(\frac{1+\epsilon}{\epsilon}\right)',1}\,\|f\|_{1+\epsilon} & & \textit{Hausdorff-Young} \text{ für } 0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Für $\epsilon < \frac{1}{2}$ ist $\frac{1+\epsilon}{\epsilon} > 3$, also nach (4.1.9)

$$\leq \; C_p\|f\|_{1+\epsilon}$$

Kombiniert man beide Ungleichungen erhält man für die noch nicht untersuchten Werte $1+\delta < p < t$, wobei $t \geq 3$ gewählt ist

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}E^0 f\|_p &\leq \|\mathcal{B}E^0 f\|_s^{1-a}\|\mathcal{B}E^0 f\|_t^a \qquad \text{wobei } 1 \leq s \leq p \leq t \text{ und } a = \frac{t(p-s)}{p(t-s)}\\
&\leq C\|f\|_{1+\epsilon}^{1-a}\|f\|_{1+\epsilon}^a\\
&\leq C\|f\|_{1+\epsilon}
\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\|\mathcal{B}E^0 f\|_p \leq \; C_p\|f\|_{1+\epsilon} \qquad \forall \quad \begin{array}{l} 1 < p < \infty \\ 0 \leq \epsilon \leq \min\left\{1, \frac{1+7\tilde{\delta}}{5-\tilde{\delta}}, \frac{1+13\tilde{\delta}}{11-\tilde{\delta}}\right\} \\ 0 \leq \tilde{\delta} < \min\{1/3, p-1\} \end{array}$$

Sei $0 < \tilde{\epsilon} \leq \epsilon/6$. Nach Definition von $\mathcal{B}. = \nabla\big(\mathcal{E}(v)\otimes . + . \otimes \mathcal{E}(v)\big)$ ist

$$\|\mathcal{B}E^0 f\|_{\frac{4}{3}-\tilde{\epsilon}} \leq \; \|v\|_{\frac{(4/3-\tilde{\epsilon})q}{q-(4/3-\tilde{\epsilon})}}\|\nabla E^0 f\|_q + \|\nabla v\|_{\frac{(4/3-\tilde{\epsilon})r}{r-(4/3-\tilde{\epsilon})}}\|E^0 f\|_r$$

wobei $q := \frac{4-3\tilde{\epsilon}}{1+2\tilde{\epsilon}}$ und $r := \frac{1}{\tilde{\epsilon}}$ sind. Mit so gewählten q, r ist $(4/3-\tilde{\epsilon})q/(q-(4/3-\tilde{\epsilon})) > 2$ bzw. $(4/3-\tilde{\epsilon})r/(r-(4/3-\tilde{\epsilon})) > 4/3$. Also

$$\begin{aligned}
&= \; C_{v,\tilde{\epsilon}}\|(\nabla\chi) * f\|_q + C_{v,\tilde{\epsilon}}\|\chi * f\|_r\\
&= \; C_{v,\tilde{\epsilon}}\|\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\nabla\chi)\cdot\mathcal{F}(f)\right)\|_q + C_{v,\tilde{\epsilon}}\|\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\chi)\cdot\mathcal{F}(f)\right)\|_r
\end{aligned}$$

mit *Hausdorff-Young*-Ungleichung da $q, r \geq 2$

$$\leq \; C_{v,\tilde{\epsilon}}\|\mathcal{F}(\nabla\chi)\cdot\mathcal{F}(f)\|_{q'} + C_{v,\tilde{\epsilon}}\|\mathcal{F}(\chi)\cdot\mathcal{F}(f)\|_{r'}$$

mit *Hölder*-Ungleichung, wobei $1 + 1/q = 1/x + 1/(2-\epsilon)$, $1 + 1/r = 1/y + 1/(2-\epsilon)$

$$\leq\ C_{v,\tilde{\epsilon}} \|\mathcal{F}(\nabla\chi)\|_{x'} \|\mathcal{F}(f)\|_{(2-\epsilon)'} + C_{v,\tilde{\epsilon}} \|\mathcal{F}(\chi)\|_{y'} \|\mathcal{F}(f)\|_{(2-\epsilon)'}$$

mit *Hausdorff-Young*-Ungleichung

$$\leq\ C_{v,\tilde{\epsilon}} \|\mathcal{F}(\nabla\chi)\|_{x'} \|f\|_{2-\epsilon} + C_{v,\tilde{\epsilon}} \|\mathcal{F}(\chi)\|_{y'} \|f\|_{2-\epsilon}$$

Wegen $\tilde{\epsilon} \leq \epsilon/6$ ist $x = (8 - 4\epsilon - 6\tilde{\epsilon} + 3\tilde{\epsilon}\epsilon)/(6 - 5\epsilon + \tilde{\epsilon} + \tilde{\epsilon}\epsilon) \geq (8 - 5\epsilon)/(6 - 29\epsilon/6) > 4/3$ und $y = (2-\epsilon)/(1 - \epsilon + 3\tilde{\epsilon} - \epsilon\tilde{\epsilon}) \geq (2-\epsilon)/(1 - 3\epsilon/2) > 2$ für hinreichend kleines $\epsilon > 0$. Sei $\delta := y/(2(y-1)) \iff \delta(y-1)/y = 1/2$. Dann ist $\delta < 1$, da $y > 2$ und mit dem so gewählten δ ist außerdem $y > (3+\delta)/(1+\delta)$. Nach Hilfssatz 4.1.5 (4.1.9) folgt mit diesem δ

$$\begin{aligned}
&\leq\ C_{v,\epsilon} |v_\infty|^{-1\frac{x-1}{x}} \|f\|_{2-\epsilon} + C_{v,\epsilon} |v_\infty|^{-\delta\frac{y-1}{y}} \|f\|_{2-\epsilon} \\
&\leq\ C_{v,\epsilon,\sigma_0} |v_\infty|^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{2-\epsilon}
\end{aligned}$$

Also (4.2.4).

Analog berechnet man

$$\|\mathcal{B}E^0 f\|_{2-\epsilon} \leq\ \|v\|_{\frac{12-6\epsilon}{4+\epsilon}} \|\nabla E^0 f\|_6 + \|\nabla v\|_{2-\epsilon} \|E^0 f\|_\infty$$

wobei $(12 - 6\epsilon)/(4+\epsilon) \geq 5/2 > 2$ für hinreichend kleines ϵ

$$\begin{aligned}
&=\ C_v \|(\nabla\chi) * f\|_6 + C_v \|\chi * f\|_\infty \\
&=\ C_v \|\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\nabla\chi) \cdot \mathcal{F}(f)\right)\|_6 + C_v \|\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\chi) \cdot \mathcal{F}(f)\right)\|_r
\end{aligned}$$

mit *Hausdorff-Young*-Ungleichung da $q, r \geq 2$

$$\leq\ C_v \|\mathcal{F}(\nabla\chi) \cdot \mathcal{F}(f)\|_{6'} + C_v \|\mathcal{F}(\chi) \cdot \mathcal{F}(f)\|_1$$

mit *Hölder*-Ungleichung, wobei $1 + 1/6 = (8 - 7\epsilon)/(12 - 6\epsilon) + 1/(2-\epsilon)$, $1 + 1/\infty = (1 - \epsilon)/(2-\epsilon) + 1/(2-\epsilon)$

$$\leq\ C_v \|\mathcal{F}(\nabla\chi)\|_{\left(\frac{12-6\epsilon}{8-7\epsilon}\right)'} \|\mathcal{F}(f)\|_{(2-\epsilon)'} + C_v \|\mathcal{F}(\chi)\|_{\left(\frac{2-\epsilon}{1-\epsilon}\right)'} \|\mathcal{F}(f)\|_{(2-\epsilon)'}$$

mit *Hausdorff-Young*-Ungleichung

$$\leq\ C_v \|\mathcal{F}(\nabla\chi)\|_{\left(\frac{12-6\epsilon}{8-7\epsilon}\right)'} \|f\|_{2-\epsilon} + C_v \|\mathcal{F}(\chi)\|_{\left(\frac{2-\epsilon}{1-\epsilon}\right)'} \|f\|_{2-\epsilon}$$

Wegen $\frac{12-6\epsilon}{8-7\epsilon} > 3/2$ für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ und $\frac{2-\epsilon}{1-\epsilon} \geq 3/2 > 4/3$ folgt nach Hilfssatz 4.1.5 (4.1.9) mit $\delta = 0$

$$\begin{aligned}
&\leq\ C_{v,\epsilon} \|f\|_{2-\epsilon} + C_v \|f\|_{2-\epsilon} \\
&\leq\ C_{v,\epsilon} \|f\|_{2-\epsilon}
\end{aligned}$$

Das zeigt (4.2.5).

□

Hilfssatz 4.2.6 (Injektivität) *Sei* $0 < \epsilon < \epsilon_0$ *mit* $\epsilon_0 < p-1$ *hinreichend klein,* $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, $v_\infty \neq 0$, $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$ *mit* $1 < p < 2$ *oder* $g \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < \infty$ *oder* $\lambda \neq 0$. *Sei*

$$\varphi_\mu(g) \quad := \quad g + \mu \mathcal{B} E_\lambda g$$

der in Hilfssatz 4.2.4 eingeführte Operator. Dann ist φ_μ *injektiv für alle* $0 \leq \mu \leq 1$.

Beweis: Angenommen es gäbe ein $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\varphi_\mu(g) = 0 \iff g = -\mu \mathcal{B} E_\lambda g$$

dann wäre $g \in L^q(\mathbb{R}^3), \forall 1 \leq q \leq 2$ im Fall $1 < p < 2$, denn wegen $E_\lambda = E_\lambda^0 + E_\lambda^\infty$, $E_\lambda^0(g) = \chi * g$ und Definition von $\mathcal{B}$ ist:

$$\begin{aligned}
\|g\|_{1+\epsilon} &\leq C \|\mathcal{B} E_\lambda(g)\|_{1+\epsilon} \\
&\leq C \left(\|\mathcal{B} E_\lambda^0(g)\|_{1+\epsilon} + \|\mathcal{B} E_\lambda^\infty(g)\|_{1+\epsilon} \right) \\
&\leq C \left(\|g\|_{1+\frac{k_1}{11}} + \|E_\lambda^\infty(g)\|_{p,1} \right) && \text{nach (4.2.3) für } k_1 = 1 \text{ und } p < 2 \\
&\leq C \left(\|\mathcal{B} E^0(g)\|_{1+\frac{k_1}{11}} + \|\mathcal{B} E^\infty(g)\|_{1+\frac{k_1}{11}} + \|g\|_p \right) && \text{nach Voraussetzung } g = -\mu \mathcal{B} E(g) \\
&\leq C \left(\|\mathcal{B} E^0(g)\|_{1+\frac{k_1}{11}} + \|g\|_p \right)
\end{aligned}$$

Nach (4.2.3) lassen sich die obigen Schritte iterativ mit $k_i = i$ wiederholen, bis die Grenze $k_i/11 \leq \min\{4/3 - \epsilon, p\} \leq k_{i+1}/11$ mit einem hinreichend kleinem ϵ erreicht ist. In einem letzten Schritt, wieder mit (4.2.3) ist dann

$$\begin{aligned}
&\leq C \left(\|g\|_{\min\left\{\frac{4}{3} - \epsilon, p\right\}} + \|g\|_p \right) \\
&\leq C_{v_\infty} \|g\|_p && \text{nach (4.2.4) und } v_\infty \neq 0
\end{aligned}$$

Also $g \in L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{aligned}
\|g\|_2 &= C_\mu \|\mathcal{B} E_\lambda(g)\|_2 \\
&\leq C_{\mu,\epsilon} \left(\|E_\lambda^0(g)\|_{\frac{1}{\epsilon},1} + \|E_\lambda^\infty(g)\|_{2,1} \right) \\
&\leq C_{\mu,\epsilon} \|\chi\|_{\frac{p'}{1+\epsilon p'},1} \|g\|_p + \|E_\lambda^\infty(g)\|_{p,2} && \forall \frac{6}{5} \leq p < 2 \\
&\leq C_{\mu,\epsilon} \|g\|_p
\end{aligned}$$

für $6/5 \leq p < 2$ nach *Sobolev* Einbettung und [ShiKo, Lemma 3.3] bzw. Satz 4.2.10. Falls $1 < p < 6/5$, ist

$$\begin{aligned}
\|g\|_2 &\leq C_{\mu,\epsilon} \|g\|_{\frac{3}{2}} \\
&= C_{\mu,\epsilon} \|\mathcal{B} E_\lambda(g)\|_{\frac{3}{2}} \\
&\leq C_{\mu,\epsilon} \left(\|E_\lambda^0(g)\|_{6,1} + \|E_\lambda^\infty(g)\|_{\frac{3}{2},1} \right) \\
&\leq C_{\mu,\epsilon} \|\chi\|_{r,1} \|g\|_p + \|E_\lambda^\infty(g)\|_{p,2} && \text{mit einem } r = r(p) \geq 3 \\
&\leq C_{\mu,\epsilon} \|g\|_p
\end{aligned}$$

Damit ist mit einem beliebigen $\delta > 0$ und einer Funktion $\mathrm{o}_\delta(1)$ mit $\mathrm{o}_\delta(1) \to 0$, falls $\delta \to 0$, $\mathrm{o}_\delta(1) \geq 0$ und $\mathrm{o}_\delta(1) = 0 \iff \delta = 0$

$$\begin{aligned}\|E_\lambda(g)\|_{2+\delta} &\leq C_\delta \left(\|\chi\|_{2+\mathrm{o}_\delta(1)}\|g\|_{1+\mathrm{o}_\delta(1)} + \|E_\lambda^\infty(g)\|_{2+\delta}\right) \leq C_\delta \left(\|g\|_{1+\mathrm{o}_\delta(1)} + \|g\|_2\right) < \infty\\ \|\nabla E_\lambda(g)\|_2 &\leq C \left(\|\nabla\chi\|_{2-\mathrm{o}_\delta(1)}\|g\|_{1+\mathrm{o}_\delta(1)} + \|E_\lambda^\infty(g)\|_2\right) \leq C \left(\|g\|_{1+\mathrm{o}_\delta(1)} + \|g\|_2\right) < \infty\end{aligned}$$

also $\nabla E_\lambda(g) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $E_\lambda(g) \in L^q(\mathbb{R}^3)$, $\forall q > 2$.

Der Fall $g \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3)$ ist ein Spezialfall von $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$ mit $p < 2$.

Ist $\lambda \neq 0$ und o.B. $p \geq 2$ (sonst betrachte den ersten Fall), so ist nach Satz 4.2.2 (4.2.2)

$$\begin{aligned}\|g\|_2 &\leq C\|\mathcal{B}E_\lambda(g)\|_2 \leq C_p\|E_\lambda(g)\|_{p,1} \leq C\|g\|_p\\ \|g\|_{1+\epsilon} &= C\|\mathcal{B}E_\lambda(g)\|_{1+\epsilon} \leq C\|E_\lambda(g)\|_{\frac{3}{2},1} \leq C\|g\|_{\frac{3}{2}} = C\|\mathcal{B}E_\lambda(g)\|_{\frac{3}{2}} \leq C\|E_\lambda(g)\|_{2,1}\\ &\leq C\|g\|_2\end{aligned}$$

also $g \in L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$, damit nach Satz 4.2.2 $E_\lambda(g) \in W^{2,1}(\mathbb{R}^3) \cap W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$ und analog wie im ersten Fall $E_\lambda(g) \in L^q(\mathbb{R}^3)$ für $q > 2$.

In jedem Fall ist $g \in L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$, $\nabla E_\lambda(g) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $E_\lambda(g) \in L^q(\mathbb{R}^3)$, für $q > 2$ und $E_\lambda(g) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, für $\lambda \neq 0$.

Nach Definition der Reynoldszahl ergibt sich deshalb:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re} < E_\lambda g, g > &= \mathrm{Re} < E_\lambda g, -\mu\mathcal{B}E_\lambda g >\\ &= -\mathrm{Re} < E_\lambda g, \mu\mathcal{B}E_\lambda g >\\ &= - < \mathrm{Re}\, E_\lambda g, \mu\mathcal{B}\,\mathrm{Re}\, E_\lambda g > - < \mathrm{Im}\, E_\lambda g, \mu\mathcal{B}\,\mathrm{Im}\, E_\lambda g >\\ &\leq \mu\,\mathrm{Re}_\mathrm{E}\, \|\nabla\,\mathrm{Re}\, E_\lambda g\|_2^2 + \mu\,\mathrm{Re}_\mathrm{E}\, \|\nabla\,\mathrm{Im}\, E_\lambda g\|_2^2\\ &= \mu\,\mathrm{Re}_\mathrm{E}\, \|\nabla E_\lambda g\|_2^2\end{aligned}$$

Andererseits ist mit $y = E_\lambda g$, also $\mathcal{Q}_e y + \nabla p = \mathcal{Q}_e E_\lambda g + \nabla p = g$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re} < E_\lambda g, g > &= \mathrm{Re} < y, \mathcal{Q}_e y > + \mathrm{Re} \underbrace{< y, \nabla p >}_{=0}\\ &= \mathrm{Re} < y, -\Delta y + \lambda y + (v_\infty \cdot \nabla) y >\\ &= \|\nabla E_\lambda g\|_2^2 + \mathrm{Re}(\lambda)\|E_\lambda g\|_2^2\\ &\geq 0\end{aligned}$$

da $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}\|\nabla E_\lambda g\|_2^2 &\leq \mu\,\mathrm{Re}_\mathrm{E}\, \|\nabla E_\lambda g\|_2^2 - \mathrm{Re}(\lambda)\|E_\lambda g\|_2^2\\ (1 - \mu\,\mathrm{Re}_\mathrm{E})\|\nabla E_\lambda g\|_2^2 &\leq 0\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\mu \leq 1$, $\mathrm{Re}_\mathrm{E} < 1$, also $1 - \mu\,\mathrm{Re}_\mathrm{E} > 0$ und somit

$$\|\nabla E_\lambda g\|_2 = 0$$

Also muß $E_\lambda g$ konstant sein.Und wegen $E_\lambda g \in L^q(\mathbb{R}^3)$ für ein $q > 2$ muß die Konstante schon 0 gewesen sein und es folgt $g = -\mu\mathcal{B}E_\lambda g = 0$.

$\square$

Satz 4.2.7 (Existenz von g_λ) *Sei $1 < p < \infty$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ und $\lambda = 0$ nur dann, wenn $p = 6/5$. Sei außerdem $0 \leq \mu \leq 1$ und die Reynoldszahl Re_E der stationären Lösung $\mathring{v}$ von Navier-Stokes echt kleiner 1.*
Dann existiert zu jedem $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ genau ein $g = g_\lambda(f) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, daß der Darstellung

$$g_{\lambda,\mu}(f) = -\mu(\mu\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f) \tag{4.2.6}$$

$$g_{\lambda,\mu}(f) = -\mu\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}\big(f + g_{\lambda,\mu}(f)\big) \tag{4.2.7}$$

genügt und daß mit

$$u_0 \ := \ E_{v_\infty,v,\lambda,\mu}(f) \ := \ E(f+g) \qquad\qquad p_0 \ := \ \Pi_v(f) \ := \ \Pi(f+g(f))$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} \big(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \lambda + \mu\mathcal{B}\big)u_0 + \nabla p_0 &= f \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

in ganz $\mathbb{R}^3$ löst. $g = g_\lambda(f)$ ist a priori stetig in f für $6/5 \leq p \leq 2$ und holomorph in λ für alle $0 \leq \mu \leq 1$. Meinen wir den Fall $\mu = 1$, lassen wir den Index μ auch weg.

Beweis: Für $\lambda \neq 0$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ ist $\varphi_\mu = \mathbb{I} + \mu\mathcal{B}E$ injektiv $\forall \mu \leq 1$ und $6/5 \leq p \leq 2$ nach Satz 4.2.6. Zusammen mit Hilfssatz 4.2.3 sind nun die Voraussetzungen an Hilfssatz 4.2.4 erfüllt und es folgt

$$\varphi_\mu \ \text{ ist ein Isomorphismus } \ \forall \mu \leq 1, \ \frac{6}{5} \leq p \leq 2$$

Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $p > 2$, so ist

$$\|\mathcal{B}E(f)\|_2 \leq C_v \|E(f)\|_{p,1} \leq C_{v,\lambda}\|f\|_p$$

Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < 6/5$, so ist mit *Sobolev* Ungleichung für jedes beliebige $q \in (6/5, 3/2)$ nach Satz 4.2.2

$$\|\mathcal{B}E(f)\|_q \leq C_v \|E(f)\|_{q,1} \leq C_q \|E(f)\|_{p,2} \leq C_{q,p,\lambda}\|f\|_p$$

und für $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $6/5 \leq p \leq 2$ haben wir wegen (4.2.3)

$$\|\mathcal{B}E(f)\|_p \leq C_v \|E(f)\|_{p,1} \leq C_{v,\lambda}\|f\|_p$$

Für $\lambda = 0$ fordern wir $p = 6/5$ und in dem Fall ist

$$\|\mathcal{B}E_0(f)\|_{\frac{6}{5}} \leq C_v \left(\|\mathcal{B}E_0^0(f)\|_{\frac{6}{5}} + \|\mathcal{B}E_0^\infty(f)\|_{\frac{6}{5}}\right) \leq C_v \left(\|f\|_{\frac{6}{5}} + \|E_0^\infty(f)\|_{\frac{6}{5},1}\right) \leq C_v\|f\|_{\frac{6}{5}}$$

wobei der unten stehende Index die Abhängigkeit des Operators E_λ in λ bedeutet. Also insgesamt für $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$

$$\begin{aligned} \forall\, f \in L^p(\mathbb{R}^3), 1 < p < \infty, \lambda \neq 0 \,\exists\, q \in \left(\frac{6}{5}, 2\right] :\ \mathcal{B}E(f) \in L^q(\mathbb{R}^3) \\ f \in L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3), \lambda = 0 :\ \mathcal{B}E(f) \in L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Nach Hilfssatz 4.2.4 ist für $0 \leq \mu \leq 1$ daher

$$g = g_{\lambda,\mu}(f) := (\mu\mathcal{B}E. + \mathbb{I}.)^{-1} \circ (-\mu\mathcal{B}Ef) \in L^q(\mathbb{R}^3)$$

wohldefiniert $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < \infty$ und löst die Gleichung

$$g = -\mu\mathcal{B}Ef - \mu\mathcal{B}Eg$$

eindeutig (unter Berücksichtigung der jeweiligen Fälle in p und λ). Offensichtlich ist g nach Hilfssatz 4.2.4 und Satz 4.2.2 stetig für $6/5 \leq p \leq 2$.

Die holomorphe Struktur bezüglich λ erbt $\mu\mathcal{B}Ef$ von E und E erbt sie aufgrund der Definition von der Fouriertransformierten. Bleibt zu zeigen, daß $(\mu\mathcal{B}E. + \mathbb{I}.)^{-1}$ holomorph ist:

Betrachten wir für einen Moment nur die Abhängigkeit in λ, etwa $\Gamma(\lambda) = (\mu\mathcal{B}E(\lambda). + \mathbb{I}.)^{-1}$. Da E holomorph in λ ist, gibt es eine in λ stetige Funktion $\delta(\lambda', \lambda)$, so daß $\delta(\lambda', \lambda) \to 0$ für $\lambda' \to \lambda$ und

$$E(\lambda') \;=\; E(\lambda) + (\lambda' - \lambda)\delta(\lambda', \lambda)$$

Mit Hilfe der Neumannschen Reihe erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda)^{-1}\Gamma(\lambda') &= \left(\Gamma(\lambda')^{-1}\Gamma(\lambda)\right)^{-1} \\ &= ((\mathbb{I} + \mu\mathcal{B}E(\lambda'))\Gamma(\lambda))^{-1} \\ &= ((\mathbb{I} + \mu\mathcal{B}E(\lambda) + \mu\mathcal{B}E(\lambda') - \mu\mathcal{B}E(\lambda))\Gamma(\lambda))^{-1} \\ &= (\mathbb{I} + (\mu\mathcal{B}E(\lambda') - \mu\mathcal{B}E(\lambda))\,\Gamma(\lambda))^{-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\,(\mu\mathcal{B}(E(\lambda') - E(\lambda))\Gamma(\lambda))^j \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda') &= \Gamma(\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\lambda' - \lambda)^j\,(\mu\mathcal{B}\delta(\lambda', \lambda)\Gamma(\lambda))^j \\ &= \Gamma(\lambda) + (\lambda' - \lambda)\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j(\lambda' - \lambda)^{j-1}\,(\mu\mathcal{B}\delta(\lambda', \lambda)\Gamma(\lambda))^j \\ &=: \Gamma(\lambda) + (\lambda' - \lambda)\tilde{\delta}(\lambda', \lambda) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\tilde{\delta}(\lambda', \lambda)$ stetig in λ mit $\tilde{\delta}(\lambda', \lambda) \to 0$ für $\lambda' \to \lambda$, was zeigt, daß $\Gamma(\lambda) = (\mu\mathcal{B}E(\lambda). + \mathbb{I}.)^{-1}$ und somit schon $g = g(\lambda)$ holomorph in λ ist.

Sei

$$u_0 := E(f + g(f)) \quad ; \quad p_0 := \Pi(f + g(f)) \quad ; f \in L^p(\mathbb{R}^3)$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_e u_0 + \mu \mathcal{B} u_0 + \nabla p_0 &= \mathcal{Q}_e E(f+g) + \mu \mathcal{B} E(f+g) + \nabla \Pi(f + g(f)) \\
&= \mathcal{Q}_e E f + \nabla \Pi f + \mathcal{Q}_e E g + \nabla \Pi(g(f)) + \mu \mathcal{B} E(f+g) \\
&\overset{\text{Satz 4.2.2}}{=} f + g + \mu \mathcal{B} E(f+g) \\
&= f
\end{aligned}$$

Daß u_0 divergenzfrei ist, folgt wie im Hilfssatz 4.2.4 aus der Tatsache, daß $\nabla \cdot E(f) = 0 \;\forall f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ ist. □

In Definition 4.1.1 haben wir

$$E^N_{v_\infty}(\lambda) f := \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi^N(\xi) \frac{\hat{f}(\xi) - \tilde{\xi}(\tilde{\xi} \cdot \hat{f}(\xi))}{q_{v_\infty}(\lambda)(\xi)} \right) \tag{4.1.1}$$

für jeweils $N = 0$ oder $N = \infty$, wobei $\tilde{\xi} := \xi/|\xi|$ definiert. Analog dazu formulieren wir

Definition 4.2.8 *Sei $\varphi^0(\xi) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ eine Abschneidefunktion mit*

$$\varphi^0(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| < 1 \\ 0 & |\xi| \geq 2 \end{cases}$$

und $\varphi^\infty(\xi) := 1 - \varphi^0(\xi)$. Dann definieren wir

$$E^N_{v_\infty, v}(\lambda) f := E^N_{v_\infty}(\lambda)(f + g(f))$$

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned}
E_{v_\infty}(\lambda) &= E^0_{v_\infty}(\lambda) + E^\infty_{v_\infty}(\lambda) \\
E_{v_\infty, v}(\lambda) &= E^0_{v_\infty, v}(\lambda) + E^\infty_{v_\infty, v}(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Gelegentlich lassen wir den untenstehenden Index oder die Abhängigkeit in λ unberücksichtigt, wenn es darauf nicht ankommt.

Zum Schluß dieses Kapitels noch ein Satz zum Druck und anschließend ein Satz falls $\lambda \neq 0$:

Satz 4.2.9 (Druck) *Sei $\epsilon \geq 0$ hinreichend klein, $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $\varphi^0 \in \mathcal{C}_0^\infty$ eine Abschneidefunktion mit $\varphi^0(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $\varphi^0(x) = 0$ für $|x| \geq 2$ und sei $\varphi^\infty := 1 - \varphi^0$. Sei $\Pi(f) := -\mathcal{F}^{-1}\big(i\varphi^N(\xi)\xi \cdot \hat{f}|\xi|^{-2}\big)$, $N \in \{0, \infty\}$. Dann gilt*

$$\left\| \nabla^m \Pi^0(f) \right\|_p + \|\Pi^\infty(f)\|_{p,1} \leq C_{m,p} \|f\|_p \qquad \forall\, m \geq 1,\ 1 < p < \infty \tag{4.2.10}$$

$$\left\| \nabla^m \Pi^0(f) \right\|_p \leq C_p \|f\|_{1+\epsilon} \qquad \forall\, m \geq 0,\ p \geq 2 + \mathrm{o}(1) \tag{4.2.11}$$

$$\left\| \nabla^m \Pi^0(f) \right\|_{p, B_r(0)} \leq C_{p,r} \|f\|_{1+\epsilon} \qquad \forall\, m \geq 0,\ p \geq 1 \tag{4.2.12}$$

$$\left\| \nabla^m \Pi^0(f) \right\|_{p, B_r(0)} \leq C_{p,r} \|f\|_p \qquad \forall\, m \geq 0,\ p \leq 2 \tag{4.2.13}$$

Insbesondere ist $\Pi(f) = \Pi^0(f) + \Pi^\infty(f) \in \hat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$.

Beweis: Sei p' definiert durch $1 = 1/p + 1/p'$ und $\alpha \in \mathbb{N}^3$ ein Multiindex. Es ist $\Pi^0(f) = \sum_{j=1}^3 \Pi_j * f_j$, wobei $\Pi_j = -\mathcal{F}^{-1}\big(i\varphi^0\xi_j|\xi|^{-2}\big)$. Daher ist $\partial_\xi^\alpha \Pi^0(f) = \sum_{j=1}^3 \big(\partial_\xi^\alpha \Pi_j\big) * f_j$, wobei $\partial_\xi^\alpha \Pi_j = -\mathcal{F}^{-1}\big(i\varphi^0\xi_j\xi^\alpha|\xi|^{-2}\big)$ und

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \Pi_j\right)\right\|_{p'}^{p'} &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\varphi^0(\xi)\xi_j\xi^\alpha}{i|\xi|^2}\right|^{p'} d\xi \;\leq\; C_\varphi \int\limits_{|\xi|\leq 2} |\xi|^{(|\alpha|-1)p'}\, d\xi \\ &\leq\; C_\varphi \int\limits_{r=0}^{2} r^{2+(|\alpha|-1)p'}\, dr \;\leq\; C_\varphi r^{3+(|\alpha|-1)p'}\Big|_0^2 \\ &<\; \infty\end{aligned}$$

falls $3 + (|\alpha| - 1)p' > 0 \iff p > 3/(2 + |\alpha|)$. Damit folgt mit *Hölder*, *Young* und *Hausdorff-Young* Ungleichung

$$\begin{aligned}\left\|\partial_\xi^\alpha \Pi^0(f)\right\|_p &\leq \sum_{j=1}^3 \|\partial_\xi^\alpha \Pi_j\|_{p-\mathrm{o}(1)}\|f_j\|_{1+\epsilon} \leq \sum_{j=1}^3 \|\mathcal{F}(\partial_\xi^\alpha \Pi_j)\|_{(p-\mathrm{o}(1))'}\|f_j\|_{1+\epsilon} \\ \left\|\partial_\xi^\alpha \Pi^0(f)\right\|_{p,B_r(0)} &\leq C_{p,r}\sum_{j=1}^3 \|\partial_\xi^\alpha \Pi_j * f_j\|_\infty \leq \sum_{j=1}^3 \|\partial_\xi^\alpha \Pi_j\|_{\frac{1}{\mathrm{o}(1)}}\|f_j\|_{1+\epsilon} \\ \left\|\partial_\xi^\alpha \Pi^0(f)\right\|_{p,B_r(0)} &\leq C_{p,r}\sum_{j=1}^3 \|\partial_\xi^\alpha \Pi_j * f_j\|_\infty \leq \sum_{j=1}^3 \|\partial_\xi^\alpha \Pi_j\|_{p'}\|f_j\|_p\end{aligned}$$

Beachte, daß die *Hausdorff-Young* Ungleichung $\|\hat{f}\|_{p'} \leq C_{n,p}\|f\|_p$ nur für $p \leq 2$ gilt (siehe z.B. [ReSi, Table IX.1, S.: 32]). Das zeigt (4.2.11) - (4.2.13).

Für (4.2.10) benutzen wir [Hörmander, Theorem 7.9.5; S.: 243] in der Version von Satz 4.1.2 von Seite 30: Sei $k_\beta^0(x) := \varphi^0 x^\beta/|x|^2$ mit $|\beta| \geq 2$ und $k_\beta^\infty(x) := \varphi^\infty x^\beta/|x|^2$ mit $|\beta| \leq 2$. Dann genügt es offensichtlich $|x|^{|\alpha|}\big|\partial_x^\alpha k_\beta^0(x)\big| < C_{k,\beta}$ für alle $x \neq 0$, $|\alpha| \leq 2$, $|\beta| \geq 2$ und $|x|^{|\alpha|}\big|\partial_x^\alpha k_\beta^\infty(x)\big| < C_{k,\beta}$ für alle $x \neq 0$, $|\alpha| \leq 2$, $1 \leq |\beta| \leq 2$ für eine von x unabhängige Konstante $C_{k,\beta}$ zu zeigen.

Sei $|\alpha| \leq 2$, $|\beta| \geq 2$ und sei $e_i \in \mathbb{N}^3$ der i-te Einheitsvektor, dann ist $\big|k_\beta^0(x)\big| < C_k$ und

$$\begin{aligned}\partial_i k_\beta^0(x) &= \frac{\varphi_i^0 x^\beta}{|x|^2} + \beta_i\frac{\varphi^0 x^{\beta-e_i}}{|x|^2} + 2\frac{\varphi^0 x^{\beta+e_i}}{|x|^4} \\ \partial_i\partial_j k_\beta^0(x) &= \partial_j\left(\frac{\varphi_i^0 x^\beta}{|x|^2}\right) + \beta_i\frac{\varphi_i^0 x^{\beta-e_i}}{|x|^2} + \beta_i(\beta-e_i)_j\frac{\varphi^0 x^{\beta-e_i-e_j}}{|x|^2} + 2\beta_i\frac{\varphi^0 x^{\beta-e_i+e_j}}{|x|^4} \\ &\quad + 2\frac{\varphi_i^0 x^{\beta+e_i}}{|x|^4} + 2(\beta+e_i)_j\frac{\varphi^0 x^{\beta+e_i-e_j}}{|x|^4} + 8\frac{\varphi^0 x^{\beta+e_i+e_j}}{|x|^6}\end{aligned}$$

Nun hat $\varphi_i^0 = \partial_i\varphi^0$ als Abschneidefunktion kompakten Träger in $\{1 \leq |x| \leq 2\}$, d.h. daß alle Summanden mit φ_i^0 in $\mathcal{C}_0^\infty$ liegen. Für die restlichen Summanden gilt: Potenz in x im Zähler plus $|\alpha|$ ist größer gleich der Potenz in $|x|$ im Nenner, woraus wegen dem beschränkten Träger die Behauptung für k_β^0 folgt.

Analoges für k^∞_β: Sei $|\alpha| \le 2$ und $1 \le |\beta| \le 2$, dann ist $\left|k^\infty_\beta(x)\right| < C_k$ und

$$\begin{aligned}
\partial_i k^\infty_\beta(x) &= \frac{\varphi^\infty_i x^\beta}{|x|^2} + \beta_i \frac{\varphi^\infty x^{\beta-e_i}}{|x|^2} + 2\frac{\varphi^\infty x^{\beta+e_i}}{|x|^4} \\
\partial_i\partial_j k^\infty_\beta(x) &= \partial_j\left(\frac{\varphi^\infty_i x^\beta}{|x|^2}\right) + \beta_i \frac{\varphi^\infty_i x^{\beta-e_i}}{|x|^2} + \beta_i(\beta-e_i)_j \frac{\varphi^\infty x^{\beta-e_i-e_j}}{|x|^2} + 2\beta_i \frac{\varphi^\infty x^{\beta-e_i+e_j}}{|x|^4} \\
&\quad + 2\frac{\varphi^\infty_i x^{\beta+e_i}}{|x|^4} + 2(\beta+e_i)_j \frac{\varphi^\infty x^{\beta+e_i-e_j}}{|x|^4} + 8\frac{\varphi^\infty x^{\beta+e_i+e_j}}{|x|^6}
\end{aligned}$$

Wieder hat $\varphi^\infty_i = \partial_i \varphi^\infty$ als Abschneidefunktion kompakten Träger in $\{1 \le |x| \le 2\}$, d.h. alle Summanden mit φ^∞_i liegen in $\mathcal{C}^\infty_0$. Für die restlichen Summanden gilt: Potenz in x im Zähler plus $|\alpha|$ ist kleiner gleich der Potenz in $|x|$ im Nenner, woraus die Behauptung für k^∞_β folgt, da φ^∞ gerade die Singularität in 0 ausschneidet.

$\square$

Satz 4.2.10 *Sei* $1 < p < \infty$, $\mathrm{Re}(\lambda) \ge 0$, $\lambda \in M_\epsilon$, $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ *und bezeichne* $u = E_{v_\infty,v}(\lambda)f := E_{v_\infty}(\lambda)(f + g_\lambda(f))$ *den Lösungsoperator von* $\mathcal{Q}_\lambda u + \nabla p = f$*, so ist* $E_{v_\infty,v}(\lambda)$ *holomorph in* λ *und es gilt*

(4.2.14) $$\left\|\left(E_{v_\infty,v}(\lambda)f - \kappa E_{v_\infty{}',v}(\lambda')\right) f\right\|_{p,2} \le c_{p,\epsilon,\sigma_0}\left(1 - \kappa + \kappa(|\lambda - \lambda'|)\right) \|f + g_\lambda(f)\|_p$$

für alle $\lambda, \lambda' \in M_\epsilon \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \ge 0\}$, *wobei* $\kappa \in \{0, 1\}$.

Bemerkung: Die von [ShiKo, Lemma 3.1] nahegelegte Abhängigkeit in $|v_\infty{}' - v_\infty|$ ließe sich ebenso zeigen wie das Äquivalent in $|v' - v|$ bzw. in $|\nabla v' - \nabla v|$. Jedoch haben wir in verschiedenen Konstanten eine Abhängigkeit in $|v_\infty|^{-1}$ feststellen müßen, so daß eine derartige Untersuchung nicht mehr sinnvoll erscheint.

Beweis: Daß $E_{v_\infty,v}(\lambda)$ holomorph in λ ist, ist Aussage von Satz 4.2.7. Die anderen Eigenschaften erbt $E_{v_\infty,v}(\lambda)$ von $E_{v_\infty}(\lambda)$ vermöge [ShiKo, Lemma 3.1]:

Für $\kappa = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\|E_{v_\infty,v}(\lambda)(f)\|_{p,2} &= \|E_{v_\infty}(\lambda)(f + g_\lambda(f))\|_{p,2} \\
&\le c_{p,\epsilon,\sigma_0}\|f + g_\lambda(f)\|_p
\end{aligned}$$

Nach (4.4.9) und der Darstellung $g(f) = -\mathcal{B}E(f) - \mathcal{B}E(g(f))$, wobei wir kurz $E_\lambda = E_{v_\infty,\lambda}$ bezeichnen, gilt

$$(g_{\lambda'} - g_\lambda)(f) = \begin{cases} -\left(\mathcal{B}E_\lambda + \mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}\left(E_{\lambda'} - E_\lambda\right)\left(g_{\lambda'}(f) + (f)\right) \\ -\mathcal{B}\left(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\right)\left(g_{\lambda'}(f) + (f)\right) - \mathcal{B}E_\lambda\left(g_{\lambda'} - g_\lambda\right)(f) \end{cases}$$

Aus der unteren Darstellung folgt für $2 < q \le p$

$$
\begin{aligned}
&\big\|(g_{\lambda'} - g_\lambda)(f)\big\|_q \\
&\quad \le \big\|\mathcal{B}\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_q + \big\|\mathcal{B}E_\lambda\big(g_{\lambda'} - g_\lambda\big)(f)\big\|_q \\
&\quad \le C_{v,p,q}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|E_\lambda\big(g_{\lambda'} - g_\lambda\big)(f)\big\|_{q,1}\right) \\
&\quad \le C_{v,p,q}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|E_\lambda\big(g_{\lambda'} - g_\lambda\big)(f)\big\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},2\right\},2}\right) \\
&\quad \le C_{v,p,q}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|\big(g_{\lambda'} - g_\lambda\big)(f)\big\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},2\right\}}\right)
\end{aligned}
$$

Ist $\tilde{q} = \max\left\{\frac{3q}{3+q}, 2\right\} > 2$, so wiederhole man obere Schritte nocheinmal mit $\tilde{q}$ statt mit q. O. B. können wir also weiterschreiben

$$
\le C_{v,p,q}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|\big(g_{\lambda'} - g_\lambda\big)(f)\big\|_2\right)
$$

Die obere Darstellung von $(g_{\lambda'} - g_\lambda)(f)$ angewand ergibt

$$
\le C_{v,p,q}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|\big(\mathcal{B}E_\lambda + \mathbb{I}\big)^{-1}\mathcal{B}\big(E_{\lambda'} - E_\lambda\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_2\right)
$$

Da nach Voraussetzung $\lambda \neq 0$ ist, gilt nach (4.3.1)

$$
\begin{aligned}
&\le C_{v,p,q,\epsilon}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|\mathcal{B}\big(E_{\lambda'} - E_\lambda\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_2\right) \\
&\le C_{v,p,q,\epsilon}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|\big(E_{\lambda'} - E_\lambda\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1}\right) \\
&\le C_{v,p,q,\epsilon}\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} \\
&\le C_{v,p,q,\epsilon}|\lambda' - \lambda|\big\|g_{\lambda'}(f) + f\big\|_p
\end{aligned}
$$

Für $1 < p \le 6/5$ gilt

$$
\begin{aligned}
&\big\|(g_{\lambda'} - g_\lambda)(f)\big\|_p \\
&\quad \le \big\|\mathcal{B}\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_p + \big\|\mathcal{B}E_\lambda\big(g_{\lambda'} - g_\lambda\big)(f)\big\|_p \\
&\quad \le C_{v,p}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|E_\lambda\big(g_{\lambda'} - g_\lambda\big)(f)\big\|_{\frac{6}{5},1}\right) \\
&\quad \le C_{v,p}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|\big(g_{\lambda'} - g_\lambda\big)(f)\big\|_{\frac{6}{5}}\right) \\
&\quad \le C_{v,p}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|\big(\mathcal{B}E_\lambda + \mathbb{I}\big)^{-1}\mathcal{B}\big(E_{\lambda'} - E_\lambda\big)\big(g_{\lambda'}(f) + (f)\big)\big\|_{\frac{6}{5}}\right)
\end{aligned}
$$

Nach (4.3.1) da $\lambda \neq 0$

$$
\begin{aligned}
&\le C_{v,p,\epsilon}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|\mathcal{B}\big(E_{\lambda'} - E_\lambda\big)\big(g_{\lambda'}(f) + (f)\big)\big\|_{\frac{6}{5}}\right) \\
&\le C_{v,p,\epsilon}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|\big(E_{\lambda'} - E_\lambda\big)\big(g_{\lambda'}(f) + (f)\big)\big\|_{\frac{6}{5},1}\right) \\
&\le C_{v,p,\epsilon}\left(\big\|\big(E_{\lambda'} - E_{\lambda'}\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} + \big\|\big(E_{\lambda'} - E_\lambda\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,2}\right) \\
&\le C_{v,p,q,\epsilon}|\lambda' - \lambda|\big\|g_{\lambda'}(f) + f\big\|_p
\end{aligned}
$$

und für $6/5 < p < 2$ folgt mit der oberen Darstellung von $(g_{\lambda'} - g_\lambda)(f)$ und (4.3.1)

$$\begin{aligned}
&\big\|(g_{\lambda'} - g_\lambda)(f)\big\|_p \\
&\quad \leq \Big\|\big(\mathcal{B}E_\lambda + \mathbb{I}\big)^{-1}\mathcal{B}\big(E_{\lambda'} - E_\lambda\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\Big\|_p \\
&\quad \leq C_{v,p,\epsilon}\,\big\|\mathcal{B}\big(E_{\lambda'} - E_\lambda\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_p \\
&\quad \leq C_{v,p,\epsilon}\,\big\|\big(E_{\lambda'} - E_\lambda\big)\big(g_{\lambda'}(f) + f\big)\big\|_{p,1} \\
&\quad \leq C_{v,p,\epsilon}|\lambda' - \lambda|\big\|g_{\lambda'}(f) + f\big\|_p
\end{aligned}$$

Also für alle $1 < p < \infty$

$$\big\|(g_{\lambda'} - g_\lambda)(f)\big\|_p \leq C_{v,p,\epsilon}|\lambda' - \lambda|\big\|g_{\lambda'}(f) + f\big\|_p$$

Für $\kappa = 1$ folgt damit

$$\begin{aligned}
&\|(E_{v_\infty,v}(\lambda)f - E_{v_\infty{}',v}(\lambda'))\,f\|_{p,2} \\
&\quad = \|(E_{v_\infty}(\lambda)(f + g(f)) - \kappa E_{v_\infty{}'}(\lambda'))\,(f + g(f))\|_{p,2} \\
&\quad = \big\|\big(E_{\lambda'} - E_\lambda\big)\big(f + g_\lambda(f)\big)\big\|_{p,2} + \big\|E_{\lambda'}\big(g_{\lambda'} - g_\lambda\big)(f)\big\|_{p,2}
\end{aligned}$$

Mit [ShiKo, Lemma 3.1]

$$\begin{aligned}
&\leq C_{p,\epsilon}|\lambda' - \lambda|\,\|f + g_\lambda(f)\|_{p,2} + \big\|\big(g_{\lambda'} - g_\lambda\big)(f)\big\|_p \\
&\leq C_{v,p,\epsilon}|\lambda' - \lambda|\big\|g_{\lambda'}(f) + f\big\|_p
\end{aligned}$$

□

4.3 Weitere Eigenschaften der Oseen-Gleichung

Hilfssatz 4.3.1 *Sei* $6/5 \leq p \leq 2$ *und* $0 \leq \mathrm{Re}(\lambda)$. *Dann gilt für* $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$

$$(4.3.1)\qquad \begin{aligned} \left\|(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I})^{-1} f\right\|_p &\leq C_v\,\mathrm{Re}(\lambda)^{\frac{6-5p}{4p}}\|f\|_p \qquad \forall\, 0<\mathrm{Re}(\lambda)\leq 1 \\ \left\|(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I})^{-1} f\right\|_{\frac{6}{5}} &\leq C_v\|f\|_{\frac{6}{5}} \end{aligned}$$

$$(4.3.2)\qquad \left\|(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I})^{-1} f\right\|_{\frac{4}{3}-\epsilon} \leq C_{v,\epsilon}|v_\infty|^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{\frac{4}{3}-\epsilon} \qquad \forall\, v_\infty \neq 0,\ \forall\, 0<\epsilon<<1$$

mit von λ *unabhängigen Konstanten* C_v *bzw.* $C_{v,\epsilon}$.

Beweis: Nicht die Abhängigkeit in $\mathrm{Re}(\lambda)$, sondern der Fall $6/5 \leq p < 4/3$ ist interessant, da hier die Konstanten unabhängig von λ sind. Das wird uns helfen iterativ diese Unabhängigkeit auf ganz $1 < p < 2$ auszudehnen und darüberhinaus auch den Lösungsoperator der vollen Oseengleichung auch in $\lambda = 0$ definieren zu können.

Für $|\lambda| \geq \epsilon$ haben wir die Aussagen im Wesentlichen, d.h. ohne den zusätzlichen Faktor für den Realteil von λ schon im *Beweis* zu Hilfssatz 4.2.4 gezeigt. Das liegt daran, daß in diesem Fall die Abschätzungen bezüglich $E(\lambda)$ unabhängig von λ sind. Genauer gesagt, daß das charakteristische Polynom $q(\lambda)$ von $\mathcal{Q}_e$ im gesamten Bereich $\{\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0\} \cap \{|\lambda| \geq \tilde{\epsilon}\}$ universell durch $q \geq c_{\tilde{\epsilon}} > 0$ abgeschätzt werden kann. Insbesondere ist von dort her auch die Wohldefiniertheit, d.h. die Invertierbarkeit und die Surjektivität von $(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda) + \mathbb{I})$ bekannt.

Wir folgen im Wesentlichen der Argumentation von Beweis zu Hilfssatz 4.2.4.

Zu (4.3.1): Sei $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ für $6/5 < p \leq 2$ und $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ für $p = 6/5$ und o. B. $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 1$. Angenommen der Operator $\mathrm{Re}(\lambda)^{\frac{6-5p}{4p}}\,(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda).+\mathbb{I}.)$ auf L^p ist nicht gleichmäßig in λ nach unten im Raum $L^p(\mathbb{R}^3)$ beschränkt, dann existiert eine Folge $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ mit $(\lambda_n) \to 0$ für $n \to \infty$, wobei $\mathrm{Re}(\lambda_n) > 0$, falls $2 \geq p > 6/5$ und eine Folge $x_n \in L^p$ mit $\|x_n\|_p = 1$, so daß gilt

$$\varphi(n) \;:=\; \mathrm{Re}(\lambda)^{\frac{6-5p}{4p}}\,(\mathcal{B}E(\lambda_n)x_n + \mathbb{I}x_n) \;\to\; 0 \quad \text{für } n \;\to \infty \text{ in } L^p(\mathbb{R}^3)$$

Ohne Beschränkung $0 \neq |\lambda_n| < \epsilon$. Weiter sei nach Auswahl einer Teilfolge $\|\varphi(n)\|_p \leq 1/n$

Es ist mit $y := Ex$, $\mathcal{Q}_e y + \nabla p = \mathcal{Q}_e Ex + \nabla p = x$ und da y divergenzfrei ist, folgt $< y, \nabla p >= 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} < Ex, x > + i\,\mathrm{Im} < Ex, x > &= \; < Ex, x >=< y, \mathcal{Q}_e y > + < y, \nabla p > \\ &= \; < y, -\Delta y + \lambda y + (v_\infty \cdot \nabla)y > \\ &= \; \|\nabla y\|_2^2 + \bar{\lambda}\|y\|_2^2 + < y, (v_\infty \cdot \nabla)y > \\ &= \; \|\nabla Ex\|_2^2 + \bar{\lambda}\|Ex\|_2^2 + i\,\mathrm{Im} < y, (v_\infty \cdot \nabla)y > \end{aligned}$$

Also

$$(4.3.3)\qquad \begin{aligned} \mathrm{Re} < Ex, x > &= \; \|\nabla Ex\|_2^2 + \mathrm{Re}(\lambda)\|Ex\|_2^2 \\ \mathrm{Im} < Ex, x > &= \; -\mathrm{Im}(\lambda)\|Ex\|_2^2 + \mathrm{Im} < y, (v_\infty \cdot \nabla)y > \end{aligned}$$

Andererseits ist nach Definition der Reynoldszahl Re_E

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, x_n > \\
&\quad= \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, -\mathcal{B}E(\lambda_n)x_n + \varphi(n)\,\mathrm{Re}(\lambda_n)^{\frac{5p-6}{4p}} > \\
&\quad= -\mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \mathcal{B}E(\lambda_n)x_n > + \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \varphi(n)\,\mathrm{Re}(\lambda_n)^{\frac{5p-6}{4p}} > \\
&\quad= - < \mathrm{Re}\,E(\lambda_n)x_n, \mathcal{B}\,\mathrm{Re}\,E(\lambda_n)x_n > - < \mathrm{Im}\,E(\lambda_n)x_n, \mathcal{B}\,\mathrm{Im}\,E(\lambda_n)x_n > \\
&\qquad + \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \varphi(n)\,\mathrm{Re}(\lambda_n)^{\frac{5p-6}{4p}} > \\
&\quad\leq \mathrm{Re}_\mathrm{E}\,\|\nabla\,\mathrm{Re}\,Ex_n\|_2^2 + \mathrm{Re}_\mathrm{E}\,\|\nabla\,\mathrm{Im}\,E(\lambda_n)x_n\|_2^2 + \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \varphi(n)\,\mathrm{Re}(\lambda_n)^{\frac{5p-6}{4p}} > \\
&\quad= \mathrm{Re}_\mathrm{E}\,\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^2 + \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \varphi(n)\,\mathrm{Re}(\lambda_n)^{\frac{5p-6}{4p}} >
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^2 + \mathrm{Re}(\lambda_n)\|E(\lambda_n)x_n\|_2^2 \\
&\qquad\qquad \leq \mathrm{Re}_\mathrm{E}\,\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^2 + \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \varphi(n)\,\mathrm{Re}(\lambda_n)^{\frac{5p-6}{4p}} >
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(1-\mathrm{Re}_\mathrm{E})}_{>0}\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^2 + \mathrm{Re}(\lambda_n)\|E(\lambda_n)x_n\|_2^2 \\
&\quad\leq \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \varphi(n)\,\mathrm{Re}(\lambda_n)^{\frac{5p-6}{4p}} > \\
&\quad\leq \|E(\lambda_n)x_n\|_{p'} \cdot \|\varphi(n)\|_p\,\mathrm{Re}(\lambda_n)^{\frac{5p-6}{4p}} \\
&\quad\leq \frac{\mathrm{Re}(\lambda_n)^{\frac{5p-6}{4p}}}{n}\|E(\lambda_n)x_n\|_{p'} \\
&\quad\leq \frac{c\,\mathrm{Re}(\lambda_n)^{\frac{5p-6}{4p}}}{n}\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^a\|E(\lambda_n)x_n\|_2^{1-a}
\end{aligned}$$

wobei $a = 3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}\right)$ nach [Friedmann, Theorem 9.3, S. 24] ist und $1 = \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$, also $\frac{1}{2}(1-a) = \frac{5p-6}{4p}$. Also

$$\begin{aligned}
\text{(4.3.4)}\quad &\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^2 + \left(\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda_n)}\|E(\lambda_n)x_n\|_2\right)^2 \\
&\qquad\qquad \leq \frac{c}{n}\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^a\left(\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda_n)}\|E(\lambda_n)x_n\|_2\right)^{1-a}
\end{aligned}$$

mit einer von Re_E abhängigen Konstanten c. Im Fall $p = 6/5$ ist $a = 1$ und es folgt direkt

$$\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2 \leq \frac{c}{n}$$

Für jedes n gilt entweder

$$\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^a\left(\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda_n)}\|E(\lambda_n)x_n\|_2\right)^{1-a} \leq \|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^1$$

oder

$$\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^a\left(\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda_n)}\|E(\lambda_n)x_n\|_2\right)^{1-a} \leq \left(\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda_n)}\|E(\lambda_n)x_n\|_2\right)^1$$

Im ersten Fall haben wegen (4.3.4) wir

$$\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^2 + \underbrace{\frac{\mathrm{Re}(\lambda)}{(1-\mathrm{Re}_{\mathrm{E}})}\|E(\lambda_n)x_n\|_2^2}_{\geq 0} \;\leq\; \frac{c}{n}\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2$$

Also wieder

$$\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2 \;\leq\; \frac{c}{n}$$

Im zweiten Fall ist wegen (4.3.4)

$$\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^2 + \underbrace{\left(\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda_n)}\|E(\lambda_n)x_n\|_2 - \frac{c}{2n}\right)^2}_{\geq 0} - \frac{c^2}{4n^2} \;\leq\; 0$$

woraus auch hier wieder und somit in jedem Fall folgt

$$\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2 \;\leq\; \frac{c}{n}$$

Für $6/5 \leq p \leq 2$ gilt wieder nach Theorem 9.3, [Friedmann]

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}x\|_p \;&\leq\; c\|v\|_{\frac{2p}{2-p}} \cdot \|\nabla x\|_2 + c\|\nabla v\|_{\frac{6p}{6-p}} \cdot \|x\|_6 \\ &\leq\; c\left(\|v\|_{\frac{2p}{2-p}} + \|\nabla v\|_{\frac{6p}{6-p}}\right)\|\nabla x\|_2\end{aligned}$$

Beachte, daß $\frac{6p}{6-p} \in [\frac{3}{2}, 3]$ für $6/5 \leq p \leq 2$ und $\frac{2p}{2-p} \in (2, \infty]$ für $1 < p \leq 2$. Diese Werte sind somit zulässig, da $v \in L^{\tilde{p}+\epsilon} \quad \forall \tilde{p} \geq 2$ und $\nabla v \in L^{\tilde{p}+\epsilon} \quad \forall \tilde{p} \geq 4/3$ nach Satz 2.0.1. Insbesondere also

$$\|\mathcal{B}E(\lambda_n)x_n\|_p \leq c \cdot \|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Nach Voraussetzung gilt schließlich für hinreichend großes n und $0 < \mathrm{Re}(\lambda_n) \leq 1$

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{4} \;&\geq\; \mathrm{Re}(\lambda_n)^{\frac{6-5p}{4p}} \|\mathcal{B}E(\lambda_n)x_n - (-x_n)\|_p \\ &\geq\; |\|x_n\|_p - \|\mathcal{B}E(\lambda_n)x_n\|_p| \\ &\geq\; \left(\epsilon - \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &\geq\; \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

Widerspruch!

Zu (4.3.2): Auch hier werden wir nicht müde fast die gleiche Argumentation wie zu (4.3.1) zu verwenden: Sei $p := 4/3 - \epsilon$ mit hinreichend kleinem $\epsilon > 0$. Angenommen der Operator $|v_\infty|^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda). + \mathbb{I}.)$ auf L^p ist nicht gleichmäßig in λ nach unten im Raum $L^p(\mathbb{R}^3)$ beschränkt, dann existiert eine Folge $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ mit $(\lambda_n) \to 0$ für $n \to \infty$ und eine Folge $x_n \in L^p$ mit $\|x_n\|_p = 1$, so daß gilt

$$\varphi(n) \;:=\; |v_\infty|^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{B}E(\lambda_n)x_n + \mathbb{I}x_n) \;\to\; 0 \quad \text{für } n \to \infty \text{ in } L^p(\mathbb{R}^3)$$

Ohne Beschränkung $0 \neq |\lambda_n| < \epsilon$. Weiter sei nach Auswahl einer Teilfolge $\|\varphi(n)\|_p \leq 1/n$

Nach Definition der Reynoldszahl:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, x_n > \\
&\quad = \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, -\mathcal{B}E(\lambda_n)x_n + \varphi(n)|v_\infty|^{\frac{1}{2}} > \\
&\quad = -\mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \mathcal{B}E(\lambda_n)x_n > + \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \varphi(n)|v_\infty|^{\frac{1}{2}} > \\
&\quad = - < \mathrm{Re}\, E(\lambda_n)x_n, \mathcal{B}\,\mathrm{Re}\, E(\lambda_n)x_n > - < \mathrm{Im}\, E(\lambda_n)x_n, \mathcal{B}\,\mathrm{Im}\, E(\lambda_n)x_n > \\
&\qquad + \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \varphi(n)|v_\infty|^{\frac{1}{2}} > \\
&\quad \leq \mathrm{Re}_{\mathrm{E}}\, \|\nabla\, \mathrm{Re}\, Ex_n\|_2^2 + \mathrm{Re}_{\mathrm{E}}\, \|\nabla\, \mathrm{Im}\, E(\lambda_n)x_n\|_2^2 + \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \varphi(n)|v_\infty|^{\frac{1}{2}} > \\
&\quad = \mathrm{Re}_{\mathrm{E}}\, \|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^2 + \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \varphi(n)|v_\infty|^{\frac{1}{2}} >
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
&\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^2 + \underbrace{\mathrm{Re}(\lambda_n)\|E(\lambda_n)x_n\|_2^2}_{\geq 0} \\
&\qquad\qquad \leq \mathrm{Re}_{\mathrm{E}}\, \|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^2 + \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \varphi(n)|v_\infty|^{\frac{1}{2}} >
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\underbrace{(1 - \mathrm{Re}_{\mathrm{E}})}_{>0} \|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2^2 &\leq \mathrm{Re} < E(\lambda_n)x_n, \varphi(n)|v_\infty|^{\frac{1}{2}} > \\
&\leq |v_\infty|^{\frac{1}{2}} \|E(\lambda_n)x_n\|_{p'} \cdot \|\varphi(n)\|_p \\
&\leq \frac{|v_\infty|^{\frac{1}{2}}}{n} \|E(\lambda_n)x_n\|_{p'}
\end{aligned}$$

wobei $1 = 1/p + 1/p'$, also $p' = (4 - 3\epsilon)/(1 - 2\epsilon)$. Verwenden wir nun die Zerlegung (4.2.9), d.h. $E(\lambda_n) = E^0(\lambda_n) + E^\infty(\lambda_n)$ und die Darstellung von $E^0(\lambda_n)$ aus Definition 4.1.4. Damit ist

$$\leq \frac{|v_\infty|^{\frac{1}{2}}}{n} \left(\|E^\infty(\lambda_n)x_n\|_{p'} + \sum_{j=1}^{3} \|\chi_{jk} * (x_n)_k\|_{p'} \right)$$

Linker Summand mit *Sobolev*einbettung ([Adams, Theorem 5.4, S.:97]) und rechter Summand mit *Young* Ungleichung ergibt wegen $1 + 1/p' = (2 - 6\epsilon)/(4 - 3\epsilon) + 1/p$

$$\leq \frac{|v_\infty|^{\frac{1}{2}}}{n} \left(\|E^\infty(\lambda_n)x_n\|_{p,2} + \sum_{j=1}^{3} \|\chi_{jk}\|_{\frac{4-3\epsilon}{2-6\epsilon}} \|x_n\|_p \right)$$

Sei $q := (4-3\epsilon)/(2-6\epsilon)$ und $\delta := q/(2(q-1)) \iff \delta(q-1)/q = 1/2$. Da $q > 2$, ist $\delta < 1$, so daß mit dem so gewählten δ gilt $q > (3+\delta)/(1+\delta)$. Nach Hilfssatz 4.1.5 (4.1.9) und *Hausdorff-Young* ist daher $\|\chi_{jk}\|_{\frac{4-3\epsilon}{2-6\epsilon}} \leq C\|\mathcal{F}\left(\chi_{jk}\right)\|_{\left(\frac{4-3\epsilon}{2-6\epsilon}\right)'} \leq C_\epsilon/|v_\infty|^{\delta(q-1)/q} = C_\epsilon/|v_\infty|^{1/2}$, falls $v_\infty \neq 0$. Außerdem kann der erste Summand vermöge [ShiKo, Lemma 3.3, S.: 15] durch eine Konstante $C = C_{\sigma_0,\lambda_0}$ abgeschätzt werden, falls $|\lambda| \leq \lambda_0$.

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C_{\sigma_0,\lambda_0,\epsilon}|v_\infty|^{\frac{1}{2}}}{|v_\infty|^{\frac{1}{2}}n}\|x_n\|_p \\ &\leq \frac{C_{\sigma_0,\lambda_0,\epsilon}}{n} \end{aligned}$$

Also

$$\|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2 \ \rightarrow \ 0 \qquad\qquad \text{für } n \to \infty$$

Die Forderung von [ShiKo, Lemma 3.3, S.: 15], daß $|\lambda| \leq \lambda_0$ sein soll, ist, wie Eingangs schon erwähnt, keine echte Bedingung, da die Aussagen für $|\lambda| > \lambda_0 \neq 0$ bereits bewiesen sind.

Nach Satz 2.0.1:

$$\|\mathcal{B}E(\lambda_n)x_n\|_p \leq c \cdot \|\nabla E(\lambda_n)x_n\|_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

und nach Voraussetzung gilt schließlich für hinreichend großes n

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\epsilon}}{4} &\geq \|\mathcal{B}E(\lambda_n)x_n - (-x_n)\|_p \\ &\geq |\|x_n\|_p - \|\mathcal{B}E(\lambda_n)x_n\|_p| \\ &\geq \left(\tilde{\epsilon} - \frac{\tilde{\epsilon}}{2}\right) \\ &\geq \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \end{aligned}$$

Widerspruch!

□

Satz 4.3.2 *Sei die Reynolszahl* Re_E *echt kleiner als 1. Sei* g_λ *der in Satz 4.2.7 eindeutig bestimmte Operator für* $\lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. *Dann gilt für* $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ *und einem hinreichend kleinen* $0 < \epsilon_0$

(4.3.5) $$\|g_\lambda(f)\|_p \leq \ C\|f\|_{1+\epsilon} + C\|f\|_{\max\left\{1+\epsilon, \frac{3p}{3+p}\right\}} \qquad \forall\, 1 < p < \infty,\ 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$$

(4.3.6) $$\|g_\lambda(f)\|_p \leq \ \frac{C}{|v_\infty|^{\max\left\{0, \frac{5p-6}{2p}\right\}}}\|f\|_p \qquad \forall\, 1 < p < 2$$

mit einer von λ *unabhängigen Konstanten* $C_{p,v,\epsilon,\sigma_0}$.

Wir sind mit (4.3.6) auf die λ-unabhängige Stetigkeit aus. Die Einschränkung $p \neq 1$ ist hier der Fouriertheorie zuzuschreiben. Um hier auch $p = 1$ zu bekommen, muß man auf gemäßigte Distributionen ausweichen oder die Funktionen χ_{jk} direkt berechnen, d.h. ohne die Hilfe der Fouriertransformierten $\mathcal{F}(\chi_{jk})$.

Beweis: Wir benutzen Hilfssatz 4.2.5. Zeigen wir zunächst die Aussagen des Satzes in dem Spezialfall $p = 6/5$. Dazu verwenden wir die im Satz 4.2.2 ersichtliche Darstellung $g(f) = -(\mathcal{B}E + \mathbb{I})^{-1}\mathcal{B}Ef$ Einerseits ist

$$\begin{aligned}
\|g(f)\|_{\frac{6}{5}} &= \|(\mathcal{B}E + \mathbb{I})^{-1}\mathcal{B}Ef\|_{\frac{6}{5}} \\
&= \|\mathcal{B}Ef\|_{\frac{6}{5}} && \text{nach (4.3.1)} \\
&= \|\mathcal{B}E^0 f\|_{\frac{6}{5}} + \|\mathcal{B}E^\infty f\|_{\frac{6}{5}} && \text{da } E = E^0 + E^\infty \\
&\leq C_p\|f\|_{1+\epsilon} + \|E^\infty f\|_{\frac{3}{2},1} && \text{nach (4.2.3) und (2.0.11)} \\
&\leq C_p\|f\|_{1+\epsilon} + \|E^\infty f\|_{1+\epsilon,2} && \text{mit Sobolev-Einbettung für } 0 < \epsilon \leq \frac{1}{2} \\
&\leq C_p\|f\|_{1+\epsilon} && \text{nach [ShiKo, Lemma 3.3] und Satz 4.2.10}
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\|g(f)\|_{\frac{6}{5}} &= \|(\mathcal{B}E + \mathbb{I})^{-1}\mathcal{B}Ef\|_{\frac{6}{5}} \\
&= \|\mathcal{B}Ef\|_{\frac{6}{5}} && \text{nach (4.3.1)} \\
&= \|\mathcal{B}E^0 f\|_{\frac{6}{5}} + \|\mathcal{B}E^\infty f\|_{\frac{6}{5}} && \text{da } E = E^0 + E^\infty \\
&\leq C_p\|f\|_{\frac{6}{5}} + \|E^\infty f\|_{\frac{6}{5},1} && \text{nach (4.2.3) und (2.0.10)} \\
&\leq C_p\|f\|_{\frac{6}{5}} && \text{nach [ShiKo, Lemma 3.3] und Satz 4.2.10}
\end{aligned}$$

Also

$$\|g(f)\|_{\frac{6}{5}} \leq C_p\|f\|_{\frac{6}{5}} \tag{4.3.7}$$

Kommen wir nun zu (4.3.5). Sei $1 < p < \infty$ und $0 \leq \tilde{\delta} < p - 1$. g besitzt nach Satz 4.2.7 die Darstellung $g = -\mathcal{B}Eg - \mathcal{B}Ef$. Es ist

$$\begin{aligned}
&\|g(f)\|_p \\
&\leq \|\mathcal{B}E^0 f\|_p + \|\mathcal{B}E^\infty f\|_p + \|\mathcal{B}E^0 g(f)\|_p + \|\mathcal{B}E^\infty g(f)\|_p
\end{aligned}$$

Mit (4.2.3) mit möglichst großem $\tilde{\delta}$, (2.0.11) folgt

$$\leq C_p\left(\|f\|_{1+\epsilon} + \|E^\infty f\|_{\max\{p,1+\epsilon\},1} + \|g(f)\|_{\min\left\{\frac{6}{5},1+\frac{1+7\tilde{\delta}}{11-\tilde{\delta}}\right\}} + \|E^\infty g(f)\|_{\max\left\{\frac{6}{5},p\right\},1}\right)$$

Mit Soboleveinbettung. Siehe [Adams]

$$\leq C_p\left(\|f\|_{1+\epsilon} + \|E^\infty f\|_{\max\left\{1+\epsilon,\frac{3p}{3+p}\right\},2} + \|g(f)\|_{\min\left\{\frac{6}{5},1+\frac{1+7\tilde{\delta}}{11-\tilde{\delta}}\right\}} + \|E^\infty g(f)\|_{\max\left\{\frac{6}{5},\frac{3p}{3+p}\right\},2}\right)$$

Nach [ShiKo, Lemma 3.3] und Satz 4.2.10, falls $\epsilon \neq 0$ ist

$$\leq C_p \left(\|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_{\max\left\{1+\epsilon, \frac{3p}{3+p}\right\}} + \|g(f)\|_{\min\left\{\frac{6}{5}, 1+\frac{1+7\tilde{\delta}}{11-\tilde{\delta}}\right\}} + \|g(f)\|_{\max\left\{\frac{6}{5}, \frac{3p}{3+p}\right\}} \right)$$

Iteration: War $1 \leq p \leq 3/2$, so ist $\max\{1+\epsilon, 3p/(3+p)\} = 1+\epsilon$, $\max\{6/5, 3p/(3+p)\} = 6/5$, aber es ist möglicherweise $1 + \frac{1+7\tilde{\delta}}{11-\tilde{\delta}} < 6/5$ In diesem Fall wiederholen wir mit neuem $\tilde{p} = 1+\frac{1+7\tilde{\delta}}{11-\tilde{\delta}}$ die obigen Schritte iterativ so oft, bis wir $6/5$ erreicht haben. Dazu sind höchstens endlich viele Schritte notwendig, da der Normexponent in jedem Schritt um mindesten $1/11$ erhöht wird. War $3/2 < p \leq 2$, so ist $\max\{1+\epsilon, 3p/(3+p)\} = 3p/(3+p)$, $\max\{6/5, 3p/(3+p)\} = 6/5$ und $\tilde{\delta}$ kann so gewählt werden, daß $1 + \frac{1+7\tilde{\delta}}{11-\tilde{\delta}} = 6/5$ ist. Kein weiterer Iterationsschrit nötig. War $2 < p$, so ist $\max\{1+\epsilon, 3p/(3+p)\} = 3p/(3+p)$, $\tilde{\delta}$ kann so gewählt werden, daß $1 + \frac{1+7\tilde{\delta}}{11-\tilde{\delta}} = 6/5$, aber $\max\{6/5, 3p/(3+p)\} = 3p/(3+p) < 3$. In diesem Fall wiederholen wir obige Schritte mit neuem $\tilde{p} := 3p/(3+p)$ genau einmal unter der Beachtung, daß für ein $f \in L^{1+\epsilon} \cap L^{3p/(3+p)}$ gilt $\|f\| \leq \max\{\|f\|_{1+\epsilon}, \|f\|_{3p/(3+p)}\}$. Es liegt dann der zweite Fall $3/2 < p \leq 2$ vor. Wir können also o.B. weiterschreiben:

$$\begin{aligned}
&\leq C_p \left(\|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_{\max\left\{1+\epsilon, \frac{3p}{3+p}\right\}} + \|g(f)\|_{\frac{6}{5}} \right) \\
&\leq C_p \left(\|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_{\max\left\{1+\epsilon, \frac{3p}{3+p}\right\}} \right)
\end{aligned}$$

da wir (4.3.5) für $p = 6/5$ schon gezeigt hatten.

Um (4.3.6) zu zeigen, benutzen wir (4.2.4) und (4.2.5) aus Hilfssatz 4.2.5. Sei ϵ hinreichend klein und $\tilde{\epsilon} \leq 6\epsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\|g(f)\|_{2-\epsilon} \\
&\quad \leq \|\mathcal{B}E^0 f\|_{2-\epsilon} + \|\mathcal{B}E^\infty\|_{2-\epsilon} + \|\mathcal{B}E^0 g(f)\|_{2-\epsilon} + \|\mathcal{B}E^\infty g(f)\|_{2-\epsilon} \\
&\quad \leq C_v \left(\|f\|_{2-\epsilon} + \|E^\infty f\|_{2-\epsilon,1} + \|g(f)\|_{\frac{4}{3}-\tilde{\epsilon}} + \|E^\infty g(f)\|_{2-\epsilon,1} \right) && \text{(4.2.5), (4.2.3), (2.0.11)} \\
&\quad \leq C_v \left(\|f\|_{2-\epsilon} + \|f\|_{2-\epsilon} + \|g(f)\|_{\frac{4}{3}-\tilde{\epsilon}} + \|E^\infty g(f)\|_{\frac{4}{3}-\tilde{\epsilon},2} \right) && \text{Soboleveinbettung}
\end{aligned}$$

[ShiKo, Lemma 3.3], Satz 4.2.10

$$\begin{aligned}
&\quad \leq C_v \left(\|f\|_{2-\epsilon} + \|f\|_{2-\epsilon} + \|g(f)\|_{\frac{4}{3}-\tilde{\epsilon}} + \|g(f)\|_{\frac{4}{3}-\tilde{\epsilon}} \right) \\
&\quad \leq C_v \left(\|f\|_{2-\epsilon} + \|(\mathcal{B}E + \mathbb{I})^{-1} \mathcal{B}Ef\|_{\frac{4}{3}-\tilde{\epsilon}} \right) \\
&\quad \leq C_v \left(\|f\|_{2-\epsilon} + |v_\infty|^{-\frac{1}{2}} \|\mathcal{B}Ef\|_{\frac{4}{3}-\tilde{\epsilon}} \right) && \text{(4.3.2)} \\
&\quad \leq C_v \left(\|f\|_{2-\epsilon} + |v_\infty|^{-\frac{1}{2}} \|\mathcal{B}E^0 f\|_{\frac{4}{3}-\tilde{\epsilon}} + |v_\infty|^{-\frac{1}{2}} \|\mathcal{B}E^\infty f\|_{\frac{4}{3}-\tilde{\epsilon}} \right) \\
&\quad \leq C_{v,\epsilon,\sigma_0} \left(\|f\|_{2-\epsilon} + |v_\infty|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \|f\|_{2-\epsilon} + |v_\infty|^{-\frac{1}{2}} \|E^\infty f\|_{2-\epsilon,1} \right) && \text{(4.2.4), (2.0.11)}
\end{aligned}$$

[ShiKo, Lemma 3.3], Satz 4.2.10

$$\leq C_{v,\epsilon,\sigma_0} |v_\infty|^{-1} \|f\|_{2-\epsilon}$$

Zu einem beliebigen $p \in (1,2)$ existiert ein hinreichend kleines $\epsilon = \epsilon(p)$, so daß $p \in [1+\epsilon, 2-\epsilon]$. Nach (4.3.5) ist $\|g_\lambda(f)\|_{1+\epsilon} \leq C_{p,v}\|f\|_{1+\epsilon}$, nach (4.3.7) ist $\|g_\lambda(f)\|_{\frac{6}{5}} \leq C_v\|f\|_{\frac{6}{5}}$ und da wie eben gezeigt $\|g_\lambda(f)\|_{2-\epsilon} \leq C_{v,\epsilon,\sigma_0}|v_\infty|^{-1}\|f\|_{2-\epsilon}$ folgt (4.3.6) unmittelbar aus (2.0.11) bzw. [Hörmander, Theorem 7.1.14., S. 165] für die beiden Bereiche $p \in [1+\epsilon, 6/5]$ und $p \in [6/5, 2-\epsilon]$.

□

Satz 4.3.3 *Sei $v_\infty \neq 0$ und $r > 0$ eine reelle Zahl. Sei $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ mit einem hinreichend kleinen $\epsilon_0 \leq p-1$. Zu jedem $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ existiert ein in f stetiger und in λ holomorpher Lösungsoperator*

$$g_\lambda : L^p(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^3) \qquad \forall 1 < p < 2 \ \textit{und}\ 1 < p < \infty \ \textit{falls}\ \lambda \neq 0$$
$$g_\lambda : L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3) \quad \forall 1 < p < \infty, 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$$

der die Differentialgleichung

$$g_\lambda(f) = -\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f) - \mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}g_\lambda(f) \tag{4.3.8}$$

für $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < 2$ bzw. $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < \infty$, $\lambda \neq 0$ bzw. für $f \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < \infty$ eindeutig erfüllt. Darüberhinaus existiert zu $1 < p < 2$ der Operator $\Gamma_\lambda(f) := f + g_\lambda(f)$, so daß

$$g_\lambda = -\Gamma_\lambda \mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f) \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^3), 1 < p < 2 \tag{4.3.9}$$

$$\|\Gamma_\lambda(f)\|_p \leq \frac{C_p}{|v_\infty|^{\max\left\{0, \frac{4p-6}{p}+\delta\right\}}}\|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^3), 1 < p < 2 \tag{4.3.10}$$

$$\Gamma_\lambda = (\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1} \qquad \lambda \neq 0 \ \textit{oder}\ p = \frac{6}{5} \tag{4.3.11}$$

mit einer von λ unabhängigen Konstanten C_p für jedes hinreichend kleine $0 < \delta = \delta(p)$. Außerdem gilt (4.3.5) *und* (4.3.6) *für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$.*

Bemerkung:

(i) Für $6/5 \leq p < 2$ und $\lambda \neq 0$ beziehungsweise $p = 6/5$, falls $\lambda = 0$ ist das Ergebnis nicht neu, es ist nämlich Aussage von Satz 4.2.7. In diesem Fall gilt auch $\Gamma_\lambda = (\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}$. Satz 4.3.2 legt nahe, diese Aussagen auf die in Satz 4.3.3 angegebenen Bereiche auszudehnen.

(ii) Vergleicht man (4.3.10) mit (4.3.5) so sieht man, daß hinsichtlich der Größe des Exponenten von $|v_\infty|$ im Nenner der beiden Abschätzungn das letzte Wort noch nicht gesprochen ist. Tatsächlich läßt sich wegen $\|\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}f\|_p \leq C_p\|f\|_p$ und der Verknüpfung (4.3.9) auch Ungleichung (4.3.5) mit dem selben Exponenten für $|v_\infty|$ schreiben. Da aber (4.3.5) bei der Herleitung von (4.3.10) nicht benutzt wurde, kann man nicht iterativ den Exponenten eliminieren. Auch liegt der Grund für das Auftreten von $|v_\infty|$ im Nenner bei den weiteren Theoremen nicht allein in diesen beiden Gleichungen, sondern in den Integralabschätzungen wie sie für Hilfssatz 4.1.10 gemacht wurden. Daher formulieren wir (4.3.5) auch nicht neu.

Beweis: Sei $1 < p < 2$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Definiere

$$g_0(f) := \lim_{\lambda \to 0} g_\lambda(f) \tag{4.3.12}$$

bzw. $g_\lambda(f) := \lim_{n\to\infty} g_\lambda(f_n)$ falls $1 < p < 6/5$ mit geeigneten Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0^\infty$ und $f_n \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^3)$, wobei der Limes in $L^p(\mathbb{R}^3)$ zu verstehen ist. Nach (4.3.6) existiert $g_0(f)$ und ist stetig in $L^p(\mathbb{R}^3)$. Wegen (4.2.3), (4.2.5), Satz 2.0.11 und [ShiKo, Lemma 3.3] bzw. Satz 4.2.10 ist $\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)$ wohldefiniert (in $1 < p < 2$) und stetig in $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ und holomorph, insbesondere stetig in $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. Es folgt für $\lambda \to 0$

$$\begin{array}{ccccc} g_\lambda(f) & = & -\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)- & \mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ g_0(f) & = & -\mathcal{B}E_{v_\infty,0}(f)- & \mathcal{B}E_{v_\infty,0} g_0(f) \end{array}$$

Gäbe es zwei Lösungen $g_i(f)$, $i = 1,2$ von $g_i(f) = -\mathcal{B}E_{v_\infty,0}(f) - \mathcal{B}E_{v_\infty,0} g_i(f)$, so ist mit $g := g_1(f) - g_2(f)$ die Gleichung $g = -\mathcal{B}E_{v_\infty,0} g$ in $L^p(\mathbb{R}^3)$ erfüllt. Satz 4.2.6 besagt dann $g = 0$.

Mit der selben Definition (4.3.12) gilt ganz analog für $f \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < \infty$, daß $g_0(f)$ existiert, da wegen (4.3.5) und *Hölder* Ungleichung $g_\lambda(f)$ stetig in $f \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3)$ und holomorph, insbesondere stetig in λ ist. Das selbe gilt wegen (4.2.3) und [ShiKo, Lemma 3.3] bzw. Satz 4.2.10 für $\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)$. Auch die Eindeutigkeit folgt wie im ersten Fall aus Satz 4.2.6.

Sei nun $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < 2$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ und $\Gamma_\lambda(f) := f + g_\lambda(f)$. Dann ist auch $\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Wegen der Darstellung (4.3.8) ist $g_\lambda(f) = -\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f + g_\lambda(f)) = -\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}\Gamma_\lambda(f)$ und mit $\tilde{f} = \mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)$ folgt:

$$\Gamma_\lambda \mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f) = \mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f) + g_\lambda\big(\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)\big) = \mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f) - \mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}\Gamma_\lambda \mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)$$

Ein Vergleich mit der Gleichung (4.3.8) $g_\lambda(f) = -\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f) - \mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(g_\lambda(f))$ zeigt (4.3.9) wegen der Eindeutigkeit.

Wir zeigen (4.3.10) iterativ: Für $p_0 = 6/5$ oder $\lambda \neq 0$ ist nach Hilfssatz 4.2.4, Satz 4.2.6 und Satz 4.2.2

$$\begin{aligned} f &= (\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}(\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})(f) \\ &= (\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f) + (\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}(f) \\ &= -g_\lambda(f) + (\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}(f) \end{aligned}$$

also (4.3.11) und insbesondere

$$\Gamma_\lambda(f) = f + g_\lambda(f) = (\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}(f) \quad \text{ist Isomorphismus in } L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$$

Für ein $p \in (1, 6/5)$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma_\lambda(f)\|_p \\
&\quad = \|f + g_\lambda(f)\|_p \\
&\quad \leq \|f\|_p + \|g_\lambda(f)\|_p && \text{Definition von } \Gamma_\lambda \\
&\quad \leq \|f\|_p + \|\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_p + \|\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_p && \text{Darstellung (4.3.8)} \\
&\quad \leq \|f\|_p + \|\mathcal{B}E^0_{v_\infty,\lambda}(f)\|_p + \|\mathcal{B}E^\infty_{v_\infty,\lambda}(f)\|_p \\
&\qquad + \|\mathcal{B}E^0_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_p + \|\mathcal{B}E^\infty_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_p \\
&\quad \leq \|f\|_p + \|\mathcal{B}E^0_{v_\infty,\lambda}(f)\|_p + C_p\|E^\infty_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{p,1} \\
&\qquad + \|\mathcal{B}E^0_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_p + C\|E^\infty_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_{\frac{6}{5},1} \\
&\quad \leq C\left(\|f\|_p + \|f\|_p + \|g_\lambda(f)\|_{\frac{6}{5}} + \|g_\lambda(f)\|_{\frac{6}{5}}\right) && \text{(4.2.3), [ShiKo, Lemma 3.3], Satz 4.2.10} \\
&\quad \leq C\left(\|f\|_p + \|(\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{\frac{6}{5}}\right) && \text{Satz 4.2.2} \\
&\quad \leq C\left(\|f\|_p + \|\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{\frac{6}{5}}\right) && \text{Hilfssatz 4.2.4} \\
&\quad \leq C\|f\|_p && \text{(4.2.3), [ShiKo, Lemma 3.3], Satz 4.2.10}
\end{aligned}$$

Damit haben wir (4.3.10) für $p \in (1, 6/5]$ gezeigt.

Angenommen wir hätten (4.3.10) schon für ein $p_{i-1} \geq 6/5$ gezeigt. Dann gilt nach Definition von Γ_λ und Darstellung (4.3.8), (4.3.9) für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ und $p_{i-1} < p < 2$

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma_\lambda(f)\|_p \\
&\quad = \|f + g_\lambda(f)\|_p \\
&\quad \leq \|f\|_p + \|g_\lambda(f)\|_p \\
&\quad \leq \|f\|_p + \|\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_p + \|\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_p \\
&\quad \leq \|f\|_p + \|\mathcal{B}E^0_{v_\infty,\lambda}(f)\|_p + \|\mathcal{B}E^\infty_{v_\infty,\lambda}(f)\|_p + \|\mathcal{B}E^0_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_p + \|\mathcal{B}E^\infty_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_p
\end{aligned}$$

Mit Definition von $\mathcal{B}(f) = \nabla(v \otimes f + f \otimes v)$, zusammen mit *Hölder* und der Tatsache, daß $v \in L^q$, $\forall q > 2$ und $\nabla v \in L^q$, $\forall q > 4/3$ ist

$$\begin{aligned}
&\leq C_{\delta,p}\Big(\|f\|_p + \|\nabla E^0_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{\frac{2p}{2-p}-\delta} + \|E^0_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{\frac{4p}{4-3p}-\delta} + \|E^\infty_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{p,1} \\
&\quad + \|\nabla E^0_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_{\frac{2p}{2-p}-\delta} + \|E^0_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_{\frac{4p}{4-3p}-\delta} + \|E^\infty_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_{p,1}\Big)
\end{aligned}$$

Wegen $p < 2$, $E^0(f) = \chi * f$, *Young* Ungleichung, *Sobolev*, [ShiKo, Lemma 3.3] bzw. Satz 4.2.10 folgt mit geeigneten $x \geq 2 - \mathrm{o}_\delta(1)$ und $y \geq \min\{4, p'\} - \mathrm{o}_\delta(1)$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{\delta,p}\Big(\|f\|_p + \|\mathcal{F}(\nabla\chi)\|_{(2-\mathrm{o}_\delta(1))'}\|f\|_p + \|\mathcal{F}(\chi)\|_{(\min\{4,p'\}-\mathrm{o}_\delta(1))'}\|f\|_p + \|f\|_p \\
&\quad + \|\mathcal{F}(\nabla\chi)\|_{x'}\|g_\lambda(f)\|_{p_{i-1}} + \|\mathcal{F}(\chi)\|_{y'}\|g_\lambda(f)\|_{p_{i-1}} + \|E^\infty_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_{p_{i-1},2}\Big)
\end{aligned}$$

Da $p_{i-1} < p < 2$ gilt für hinreichend kleines δ nach (4.1.9)

$$\le \frac{C_{\delta,p}}{|v_\infty|^{\max\left\{0,\frac{2p-3}{p}+o_\delta(1)\right\}}}\Big(\|f\|_p + \|g_\lambda(f)\|_{p_{i-1}}\Big)$$

Darstellung (4.3.9)

$$= \frac{C_{\delta,p}}{|v_\infty|^{\max\left\{0,\frac{2p-3}{p}+o_\delta(1)\right\}}}\Big(\|f\|_p + \|\Gamma_\lambda \mathcal{B} E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{p_{i-1}}\Big)$$

Nach Voraussetzung ist Γ_λ unabhängig von λ stetig in $L^{p_{i-1}}$

$$\le \frac{C_{\delta,p}}{|v_\infty|^{\max\left\{0,\frac{2p-3}{p}+o_\delta(1)\right\}}}\Big(\|f\|_p + \|\mathcal{B} E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{p_{i-1}}\Big)$$

Wie oben ist

$$\begin{aligned}
&\le \frac{C_{\delta,p}}{|v_\infty|^{\max\left\{0,\frac{2p-3}{p}+o_\delta(1)\right\}}}\Big(\|f\|_p + \|\nabla E^0_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{\frac{2p_{i-1}}{2-p_{i-1}}-\delta} + \|E^0_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{\frac{4p_{i-1}}{4-3p_{i-1}}-\delta} \\
&\quad + \|E^\infty_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{p,1}\Big) \\
&\le \frac{C_{\delta,p}}{|v_\infty|^{\max\left\{0,\frac{2p-3}{p}+o_\delta(1)\right\}}}\Big(\|f\|_p + \|\mathcal{F}(\nabla\chi)\|_{\left(\min\left\{\frac{2pp_{i-1}}{2(p-p_{i-1})+pp_{i-1}},p'\right\}-o_\delta(1)\right)'}\|f\|_p \\
&\quad + \|\mathcal{F}(\chi)\|_{\left(\min\left\{\frac{4pp_{i-1}}{4(p-p_{i-1})+pp_{i-1}},p'\right\}-o_\delta(1)\right)'}\|f\|_p + \|f\|_p\Big) \\
&\le \frac{C_{\delta,p}}{|v_\infty|^{\max\left\{0,\frac{4p-6}{p}+o_\delta(1)\right\}}}\|f\|_p
\end{aligned}$$

falls δ hinreichend klein und

$$\min\left\{\frac{2pp_{i-1}}{2(p-p_{i-1})+pp_{i-1}},p'\right\} > \frac{4}{3} \qquad \min\left\{\frac{4pp_{i-1}}{4(p-p_{i-1})+pp_{i-1}},p'\right\} > 2$$

wegen (4.1.9), wobei die Zahl in Klammer eine Abschätzung unabhängig von $|v_\infty|^{-1}$ zuläßt. Startet man mit $p_1 = 6/5 = 1.2$ und setzt z.B. $p_2 = 1.3$, so sind die Bereiche zulässig und es ist $\|\Gamma_\lambda(f)\|_{p_2} \le C_{p_2}\|f\|_{p_2}$. Indem man in jedem Schritt jeweils um z.B. $1/10$ erhöht bis die Grenze von $2-\delta$ erreicht ist, zeigt man in endlich vielen Schritten (4.3.10), wobei dort noch $o_\delta(1)$ formal durch δ ersetzt wurde.

Bleibt noch die Existenz von $g_\lambda(f)$ mit $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ und $2 \le p < \infty$, wenn $\lambda \ne 0$ ist zu zeigen: Sei $f \in \mathcal{C}_0^\infty \cap L^p(\mathbb{R}^3)$, dann gilt (4.3.8) $g_\lambda(f) = -\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f) - \mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)$ und wir haben für hinreichend kleines $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
\|g_\lambda(f)\|_p &\le \|\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_p + \|\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_p \\
&\le C_p\big(\|E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{p,1} + \|E_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_{p,1}\big) && \text{Satz 2.0.5} \\
&\le C_\lambda\big(\|f\|_p + \|E_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_{p,1}\big) && \text{[ShiKo, Lemma 3.1]} \\
&\le C_{p,\lambda}\big(\|f\|_p + \|E_{v_\infty,\lambda} g_\lambda(f)\|_{\max\left\{2-\delta,\frac{3p}{3+p}\right\},2}\big) && \textit{Sobolev}\text{ Einbettung} \\
&\le C_{p,\delta,\lambda}\big(\|f\|_p + \|g_\lambda(f)\|_{\max\left\{2-\delta,\frac{3p}{3+p}\right\}}\big) && \text{[ShiKo, Lemma 3.1]}
\end{aligned}$$

Ist $q := \max\left\{2-\delta, \frac{3p}{3+p}\right\} > 2-\delta$, so war $p \geq 6$, also $2 \leq q < 3$ und wir wenden die Identität für $g_\lambda(f)$ nocheinmal an, d.h. $\|g_\lambda(f)\|_q \leq \|\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_q + \|\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}g_\lambda(f)\|_q \leq C_p\big(\|E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{p,1} + \|E_{v_\infty,\lambda}g_\lambda(f)\|_{q,1}\big) \leq C_{p,\lambda,\delta}\big(\|f\|_p + \|E_{v_\infty,\lambda}g_\lambda(f)\|_{2-\delta,2}\big) \leq C_{p,\lambda,\delta}\big(\|f\|_p + \|g_\lambda(f)\|_{2-\delta}\big)$. O.B. könne wir also weiterschreiben

$$
\begin{aligned}
&\leq C_{p,\lambda,\delta}\big(\|f\|_p + \|g_\lambda(f)\|_{2-\delta}\big) \\
&= C_{p,\lambda,\delta}\big(\|f\|_p + \|(\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{2-\delta}\big) && \text{(4.3.9),(4.3.11)} \\
&\leq C_{p,\lambda,\delta}\big(\|f\|_p + \|\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{2-\delta}\big) && \text{Satz 4.2.7} \\
&\leq C_{p,\lambda,\delta}\big(\|f\|_p + \|E_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{p,1}\big) && \text{für } \delta = \delta(p) \text{ hinreichend klein} \\
&\leq C_{p,\lambda}\|f\|_p && \text{[ShiKo, Lemma 3.1]}
\end{aligned}
$$

Also $\|g_\lambda(f)\|_p \leq C_{p,\lambda}\|f\|_p$ für $f \in \mathcal{C}_0^\infty \cap L^p(\mathbb{R}^3)$. Zu $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ existiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0^\infty$, so daß $f_n \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^3)$ für $n \to \infty$. Setze

$$
g_\lambda(f) := \lim_{n\to\infty} g_\lambda(f_n) \qquad \text{für } f \in L^p(\mathbb{R}^3)
$$

wobei der Limes in $L^p(\mathbb{R}^3)$ aufzufassen und wegen $\|g_\lambda(f)\|_p \leq C_{p,\lambda}\|f\|_p$ wohldefiniert ist. Offensichtlich erfüllt $g_\lambda(f)$ auch Gleichung (4.3.8), da $\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}$ stetig in $L^p(\mathbb{R}^3)$ ist.

□

Hilfssatz 4.3.4 *Für den Lösungsoperator $E_{v_\infty}(\lambda)$ der einfachen, beziehungsweise $E_{v_\infty,v}(\lambda) = E_{v_\infty}(\lambda)(\mathbb{I}+g_\lambda)$ der vollen Oseengleichung gelten die folgenden Aussagen*

$$
\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1} = -\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{v_\infty}(\lambda)\right)\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1} \tag{4.3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{v_\infty}(\lambda) &= -E^2_{v_\infty}(\lambda)\mathbb{P} = -E^2_{v_\infty}(\lambda) \\
\frac{\partial}{\partial\lambda}E^0_{v_\infty}(\lambda) &= -E^0_{v_\infty}(\lambda)E_{v_\infty}(\lambda) = -E_{v_\infty}(\lambda)E^0_{v_\infty}(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.3.14}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{v_\infty,v}(\lambda) = -E^2_{v_\infty}(\lambda)\left(\mathbb{I}+g_\lambda\right) - E_{v_\infty}(\lambda)g_\lambda E_{v_\infty}(\lambda)\left(\mathbb{I}+g_\lambda\right) \tag{4.3.15}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\lambda}g_\lambda(f) = -g_\lambda E_{v_\infty}\left(g_\lambda(f)+f\right) \tag{4.3.16}
$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda')+\mathbb{I}\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1} \\
&\quad= \left(\mathbb{I} - \left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1}\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda')+\mathbb{I}\right)\right)\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda')+\mathbb{I}\right)^{-1} \\
&\quad= \left(\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1}\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right) - \left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1}\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda')+\mathbb{I}\right)\right) \\
&\qquad\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda')+\mathbb{I}\right)^{-1} \\
&\quad= \left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1}\left(\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right) - \left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda')+\mathbb{I}\right)\right)\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda')+\mathbb{I}\right)^{-1} \\
&\quad= -\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}\left(E_{v_\infty}(\lambda') - E_{v_\infty}(\lambda)\right)\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda')+\mathbb{I}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Dividieren durch $\lambda' - \lambda$ zeigt nach dem Übergang $|\lambda' - \lambda| \to 0$ schon (4.3.13).

Sei $y := E_{v_\infty}(\lambda)\mathbb{P}f$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& & \mathbb{P}f =&\ \mathcal{Q}_e y & \\
\Longleftrightarrow & & f-(f-\mathbb{P}f) =&\ \mathcal{Q}_e y - \mathcal{Q}_e(\underbrace{y-\mathbb{P}y}_{=0}) & \text{da } y \text{ divergenzfrei} \\
\Longleftrightarrow & & \mathcal{F}(f-(f-\mathbb{P}f)) =&\ \mathcal{F}(\mathcal{Q}_e y) - \mathcal{F}(\mathcal{Q}_e(y-\mathbb{P}y)) & \\
\Longleftrightarrow & & \hat{f} - \mathcal{F}(f-\mathbb{P}f) =&\ q_\lambda \hat{y} - q_\lambda \mathcal{F}(y-\mathbb{P}y) & \text{Definition von } q_\lambda \\
\Longleftrightarrow & & \hat{f} - \tilde{\xi}\left(\tilde{\xi}\hat{f}\right) =&\ q_\lambda\left(\hat{y} - \tilde{\xi}\left(\tilde{\xi}\hat{y}\right)\right) & \text{nach (4.1.6)} \\
\Longleftrightarrow & & \frac{\hat{f} - \tilde{\xi}\left(\tilde{\xi}\hat{f}\right)}{q_\lambda^2} =&\ \frac{\hat{y} - \tilde{\xi}\left(\tilde{\xi}\hat{y}\right)}{q_\lambda} & \text{für } \xi \neq 0,\ \lambda \in \sum\nolimits_{v_\infty} \\
\Longleftrightarrow & & \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f} - \tilde{\xi}\left(\tilde{\xi}\hat{f}\right)}{q_\lambda^2}\right) =&\ \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{y} - \tilde{\xi}\left(\tilde{\xi}\hat{y}\right)}{q_\lambda}\right) & \\
\Longleftrightarrow & & -\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{v_\infty}(\lambda) =&\ E_{v_\infty}(\lambda)(y) & \\
\Longleftrightarrow & & -\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{v_\infty}(\lambda) =&\ E_{v_\infty}(\lambda)E_{v_\infty}(\lambda)\mathbb{P}f &
\end{aligned}$$

Nach (4.1.6) folgt außerdem, daß $E_{v_\infty}(\lambda)\mathbb{P}f = E_{v_\infty}(\lambda)f$. Zur zweite Gleichung sei bemerkt, daß $\mathcal{F}^{-1}(\varphi^0)$ wohldefiniert ist und daß daraus mit der bekannten Formel $F^{-1}(fg) = F^{-1}(f) * F^{-1}(g)$ bzw. $F^{-1}(f*g) = F^{-1}(f)F^{-1}(g)$ folgt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}E^0_{v_\infty}(\lambda)\right)(f) =&\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(E^0_{v_\infty}(\lambda)(f)\right) & \\
=&\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(E_{v_\infty}(\lambda)(\mathcal{F}^{-1}(\varphi^0) * f)\right) & \text{nach Definition von } E^0_{v_\infty}(\lambda)(f) \\
=&\ \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{v_\infty}(\lambda)\right)(\mathcal{F}^{-1}(\varphi^0) * f) & \\
=&\ -E_{v_\infty}(\lambda)E_{v_\infty}(\lambda)(\mathcal{F}^{-1}(\varphi^0) * f) & \\
=&\ -E_{v_\infty}(\lambda)E^0_{v_\infty}(\lambda)(f) & \text{zeigt den ersten Teil} \\
=&\ -E_{v_\infty}(\lambda)\left(\mathcal{F}^{-1}(\varphi^0) * E_{v_\infty}(\lambda)(f)\right) & \\
=&\ -E^0_{v_\infty}(\lambda)E_{v_\infty}(\lambda)(f) & \text{zeigt den zweiten Teil}
\end{aligned}$$

also (4.3.14).

Zur vorletzten Gleichung: Aus der Darstellung $g_\lambda(f) = -\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda) + \mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)f$ folgt zusammen mit den beiden anderen Gleichungen (4.3.13) und (4.3.14)

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}g_\lambda(f) = -\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda) + \mathbb{I}\right)^{-1}\right)\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda) - \left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda) + \mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{v_\infty}(\lambda)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{v_\infty}(\lambda)\right)\underbrace{\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)}_{=-g_\lambda(f)}\\
&\quad + \left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)E_{v_\infty}(\lambda)f\\
&= \underbrace{\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)+\mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)}_{=-g_\lambda(f)}E_{v_\infty}(\lambda)\left(f+g_\lambda(f)\right)\\
&= -g_\lambda E_{v_\infty}(\lambda)\left(f+g_\lambda(f)\right)
\end{aligned}
$$

und schließlich

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{v_\infty,v}(\lambda)(f) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(E_{v_\infty}(\lambda)\left(f+g_\lambda(f)\right)\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{v_\infty}(\lambda)\right)\left(f+g_\lambda(f)\right)+E_{v_\infty}(\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}g_\lambda(f)\right)\\
&= -E^2_{v_\infty}(\lambda)\left(f+g_\lambda(f)\right)-E_{v_\infty}(\lambda)g_\lambda E_{v_\infty}(\lambda)\left(f+g_\lambda(f)\right)
\end{aligned}
$$

Wegen der Darstellung $g_\lambda = -(\mathcal{B}E_{v_\infty}+\mathbb{I})^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty}$ gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\lambda}g_\lambda(f)\\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}+\mathbb{I}\right)^{-1}\right)\mathcal{B}E_{v_\infty}(f)-\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}+\mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{v_\infty}(f)
\end{aligned}
$$

Nach (4.3.13) und (4.3.14) ist

$$
\begin{aligned}
&= \left(\mathcal{B}E_{v_\infty}+\mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{v_\infty}\right)\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}+\mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty}(f)+\underbrace{\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}+\mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty}}_{=-g_\lambda}E_{v_\infty}(f)\\
&= -\underbrace{\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}+\mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty}}_{=-g_\lambda}E_{v_\infty}\underbrace{\left(\mathcal{B}E_{v_\infty}+\mathbb{I}\right)^{-1}\mathcal{B}E_{v_\infty}}_{=-g_\lambda}(f)-g_\lambda E_{v_\infty}(f)\\
&= -g_\lambda E_{v_\infty}g_\lambda(f)-g_\lambda E_{v_\infty}(f)\\
&= -g_\lambda E_{v_\infty}\left(g_\lambda(f)+f\right)
\end{aligned}
$$

$\square$

4.4 A priori Abschätzungen

Kommen wir nun zum wichtigsten Satz in diesem Kapitel. Um die Halbgruppe des Oseen-Operators vermöge der Integraldarstellung berechnen zu können und geeignete Zeitabschätzungen zu erhalten, ist es notwendig, Aussagen über das Verhalten des Lösungsoperators der vollen Oseengleichung in $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Resolventenparameter λ zu besitzen.

Satz 4.4.1 *Sei* $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq p$, $\gamma > 0$, $r > 0$ *und* $f \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3)$. *Sei* $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ *eine Abschneidefunktion mit* $\operatorname{supp}\psi \subset B_r(0)$ *und* $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ *eine Abschneidefunktion mit* $\rho(s) = 0$ *für* $|s| > \gamma$. *Sei weiter* $E_{v_\infty,v,\lambda}$ *der Lösungsoperator der vollen Oseengleichung in* $\mathbb{R}^3$. *Dann gilt zu einem hinreichend kleinen* $\epsilon > 0$

(4.4.1)
$$\sup_{0\leq \mathrm{Re}(\lambda)\leq 1} \|\psi(x)E_{v_\infty,v}(\lambda)(f)\|_{q,2} \leq C_{p,\psi,v}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

(4.4.2)
$$\sup_{0\leq \mathrm{Re}(\lambda)\leq 1} \sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}\, \|\psi(x)\partial_\lambda E_{v_\infty,v}(\lambda)(f)\|_{q,2} \leq \frac{C_{p,\psi,v}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

(4.4.3)
$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \|\rho(s)\psi(x)E_{v_\infty,v}(is)(f)\|_{q,2} \leq C_{p,\psi,v,\rho}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

(4.4.4)
$$\sup_{s\in\mathbb{R},\ h\neq 0} |h|^{-\frac{1}{2}} \|\rho(s)\psi(x)\left(E_{v_\infty,v}(is+ih) - E_{v_\infty,v}(is)\right)(f)\|_{q,2} \leq \frac{C_{p,\psi,v,\rho}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

(4.4.5)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\partial_s\rho(s)\psi(x)E_{v_\infty,v}(is)(f)\|_{q,2}\, ds \leq \frac{C_{p,\psi,v,\rho}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

(4.4.6)
$$\sup_{h\neq 0}|h|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \|\partial_s\rho(s)\psi(x)\left(E_{v_\infty,v}(is+ih) - E_{v_\infty,v}(is)\right)(f)\|_{q,2}\, ds$$
$$\leq C_{p,\psi,v,\rho,\epsilon,\sigma_0}|v_\infty|^{-\frac{3}{4}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

Beweis: Da ψ beschränkten Träger hat, können wir wegen *Hölder* o.B. $q = p$ auf den linken Seiten der Ungleichungen annehmen.

Um die Beweisstruktur etwas übersichtlicher zu gestallten, benutzen wir hier intensiv die Notation von $\mathrm{o}(1)$ in dem Sinne, daß $\mathrm{o}(1) \to 0$, falls $\epsilon \to 0$. Zusätzlich fordern wir $\mathrm{o}(1) > 0$.

Mit *hinreichend kleinem* ϵ meinen wir, daß noch weitere, höchstens endlich viele, voneinander unabhängige Bedingungen an ϵ im Beweis unten gelten sollen, die alle gleichzeitig durch eine Minimalforderung an ϵ erfüllt werden können. Die Hauptbedingung an ϵ dürfte $< p - 1$ sein.

Es sei nochmal an die Darstellung $E_{v_\infty,v}(\lambda)(f) = E_{v_\infty}(\lambda)(f + g_\lambda(f))$ mit dem in Kapitel 4.2 definierten Operator g_λ, an die Zerlegung (4.2.9) $E = E^0 + E^\infty$, insbesondere an die Darstellung in Definition 4.1.4 $E^0_{v_\infty}(f) = \chi * f = (\sum_{k=1}^3 \chi_{jk} * f_k)_{j=1,2,3}$ und an die Definition (2.0.4) von $\mathcal{B}(u) = \nabla\big(\mathcal{E}(v) \otimes u + u \otimes \mathcal{E}(v)\big)$ erinnert.

Zu (4.4.1) und (4.4.3) : Sei $\epsilon < p-1$ hinreichend klein

$$\begin{aligned}
&\|\psi E_{v_\infty,v}(\lambda)(f)\|_{p,2}\\
&\quad= \|\psi E_{v_\infty}(\lambda)(f+g_\lambda(f))\|_{p,2}\\
&\quad\le \left\|\psi E^0_{v_\infty}(\lambda)(f+g_\lambda(f))\right\|_{p,2} + \left\|\psi E^\infty_{v_\infty}(\lambda)(f+g_\lambda(f))\right\|_{p,2}\\
&\quad\le \|\psi\|_{p,2}\left\|E^0_{v_\infty}(\lambda)(f+g_\lambda(f))\right\|_{\infty,2} + \|\psi\|_{\infty,2}\left\|E^\infty_{v_\infty}(\lambda)(f+g_\lambda(f))\right\|_{p,2}\\
&\quad\le C_\psi\left\|E^0_{v_\infty}(\lambda)(f)\right\|_{\infty,2} + C_\psi\left\|E^0_{v_\infty}(\lambda)(g_\lambda(f))\right\|_{\infty,2}\\
&\qquad + C_\psi\left\|E^\infty_{v_\infty}(\lambda)(f)\right\|_{p,2} + C_\psi\left\|E^\infty_{v_\infty}(\lambda)(g_\lambda(f))\right\|_{p,2}
\end{aligned}$$

Nach Definition 4.1.4 und [ShiKo, Lemma 3.3] bzw. Satz 4.2.10 ist

$$\le C_\psi\|\chi(\lambda)*(f)\|_{\infty,2} + C_\psi\|\chi(\lambda)*g_\lambda(f)\|_{\infty,2} + C_\psi\|f\|_p + C_\psi\|g_\lambda(f)\|_p$$

Young-Ungleichung und (4.3.5) angwendet

$$\begin{aligned}
&\le C_\psi\|\chi(\lambda)\|_{\frac{1}{o(1)},2}\|(f)\|_{1+\epsilon} + C_\psi\|\chi(\lambda)\|_{6,2}\|g_\lambda(f)\|_{\frac{6}{5}}\\
&\quad + C_\psi\|f\|_p + C_{\psi,p,v,\epsilon}\|f\|_{1+\epsilon} + C_{\psi,p,v,\epsilon}\|f\|_{\max\left\{1+\epsilon,\frac{3p}{3+p}\right\}}
\end{aligned}$$

Da $\max\{1+\epsilon, 3p/(3+p)\} < p$ folgt mit *Hölder*

$$\le C_{\psi,p,v,\epsilon}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

Da die Konstante unabhängig von $\mathrm{Re}(\lambda)$ und $|\mathrm{Im}(\lambda)|$ ist, folgt die Behauptung für (4.4.1). Zu (4.4.3) beachte man noch, daß die Abschneidefunktion ρ endliches Supremum hat.

Zu (4.4.2): Sei $1 < p < \infty$ und o.B. $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Lassen wir einer übersichtlicheren Schreibweise wegen, die Abhängigkeit der Operatoren in λ in der Notation weg.

Zunächst ein allgemeines Resultat: Sei θ eine Zahl mit $0 < \theta < 2$, $s_0 > 2$ und wir nehmen an, daß $p = (4-\theta)/(3-\theta)$, also $4/3 < p < 2$ ist. Aus $1/p = 1/s_0 + 1/s$ folgt

$$s = \frac{s_0(4-\theta)}{s_0(3-\theta) - 4 + \theta}$$

Mit diesen Zahlen, Darstellung (4.3.14) und (4.3.10) haben wir folgende Ungleichung

$$\begin{aligned}
\left\|g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_p &= \left\|\Gamma\mathcal{B}E_{v_\infty}E^0_{v_\infty}(f)\right\|_p\\
&\le \frac{C_p}{|v_\infty|^{\max\{0,\frac{4p-6}{p}\}}}\left\|\mathcal{B}E_{v_\infty}E^0_{v_\infty}(f)\right\|_p\\
&= \frac{C_p}{|v_\infty|^{\max\{0,\frac{4p-6}{p}\}}}\left\|\mathcal{B}\partial_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_p\\
&\le \frac{C_p}{|v_\infty|^{\max\{0,\frac{4p-6}{p}\}}}\Big(\|v\|_{s_0}\|(\nabla\partial_\lambda\chi)*f\|_s + \|\nabla v\|_p\|(\partial_\lambda\chi)*f\|_\infty\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C_{p,v}}{|v_\infty|^{\max\{0,\frac{4p-6}{p}\}}}\left(\|(\nabla\partial_\lambda\chi)\|_{s\frac{1+\epsilon}{1+\epsilon+\epsilon s}}+\|(\partial_\lambda\chi)\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\right)\|f\|_{1+\epsilon}\\
&\leq \frac{C_{p,v}}{|v_\infty|^{\max\{0,\frac{4p-6}{p}\}}}\left(\|(\nabla\partial_\lambda\chi)\|_{s(1-o(1))}+\|(\partial_\lambda\chi)\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\right)\|f\|_{1+\epsilon}
\end{aligned}$$

Also

$$\left\|g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_{\frac{4-\theta}{3-\theta}} \leq \frac{C_{\theta,v}}{|v_\infty|^{\max\{0,\frac{2\theta-2}{4-\theta}\}}}\left(\|\nabla\partial_\lambda\chi\|_{s(1-o(1))}+\|\partial_\lambda\chi\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\right)\|f\|_{1+\epsilon} \tag{4.4.7}$$

$$s=\frac{s_0(4-\theta)}{s_0(3-\theta)-4+\theta},\ s_0>2,\ 0<\theta<2$$

Etwas allgemeiner wollen wir mit Iteration dieses Ergebnis auch für $p\geq 2$ herleiten. Sei θ eine reelle Zahl mit $4/3<\theta<3/2$ und sei $p\geq t>4/3$. Wegen der Gleichung $g_\lambda f=-\mathcal{B}E_{v_\infty}f-\mathcal{B}E_{v_\infty}g_\lambda f$ ist

$$\begin{aligned}
&\left\|g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_p\\
&\quad\leq \left\|\mathcal{B}E_{v_\infty}E^0_{v_\infty}(f)\right\|_p+\left\|\mathcal{B}E_{v_\infty}g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_p
\end{aligned}$$

Nach Definition von $\mathcal{B}$ gibt es ein $s_0>2$ und ein $s>4$, so daß $1/p=1/s_0+1/s$, da $p>4/3$. Zusammen mit der Darstellung (4.3.14) gilt

$$\begin{aligned}
&\leq \|v\|_{s_0}\|(\nabla\partial_\lambda\chi)*f\|_s+\|\nabla v\|_p\|(\partial_\lambda\chi)*f\|_\infty\\
&\quad+\left\|\mathcal{B}E^0_{v_\infty}g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_p+\left\|\mathcal{B}E^\infty_{v_\infty}g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_p\\
&\leq C_{v,p}\left(\|(\nabla\partial_\lambda\chi)*f\|_s+\|(\partial_\lambda\chi)*f\|_\infty\right)\\
&\quad+C_{v,p}\left\|(\nabla\chi)*\left(g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right)\right\|_s+C_{v,p}\left\|\chi*\left(g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right)\right\|_\infty\\
&\quad+C_{v,p}\left\|E^\infty_{v_\infty}g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_{p,1}
\end{aligned}$$

Nach *Young* bzw. *Hausdorff-Young* und *Hölder* gibt es ein $q\in(2,4)$ und ein $l\in(3,4)$, so daß

$$\begin{aligned}
&\leq C_v\left(\|(\nabla\partial_\lambda\chi)*f\|_s+\|(\partial_\lambda\chi)*f\|_\infty\right)\\
&\quad+C_{v,p}\|\mathcal{F}(\nabla\chi)\|_{q'}\left\|g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_\theta+C_{v,p}\|\chi\|_l\left\|g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_\theta\\
&\quad+C_{v,p}\left\|E^\infty_{v_\infty}g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_{\max\left\{\frac{3p}{3+p},t\right\},2}
\end{aligned}$$

Nach (4.1.9) und [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3]

$$\begin{aligned}
&\leq C_v\left(\|(\nabla\partial_\lambda\chi)*f\|_s+\|(\partial_\lambda\chi)*f\|_\infty\right)\\
&\quad+C_{v,p}\left\|g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_\theta+C_{v,p}\left\|g_\lambda E^0_{v_\infty}(f)\right\|_{\max\left\{\frac{3p}{3+p},t\right\}}
\end{aligned}$$

Ist $\max\{3p/(3+p), t\} > t$, so wiederholen wir mit dem letzten Term und neuem $\tilde{p} = 3p/(3+p)$ obige Schritte iterativ so oft, bis wir nach höchstens 2 weiteren Schritten die Grenze t erreicht haben. O. B. gibt es eine endliche Indexmenge I und endlich viele $s_i > 4$, $i \in I$, so daß :

$$
\begin{aligned}
&\leq C_v \sum_{i\in I} \left(\|(\nabla\partial_\lambda\chi) * f\|_{s_i} + \|(\partial_\lambda\chi) * f\|_\infty \right) + C_{v,p} \left\| g_\lambda E^0_{v_\infty}(f) \right\|_\theta \\
&= C_v \sum_{i\in I} \left(\|(\nabla\partial_\lambda\chi) * f\|_{s_i} + \|(\partial_\lambda\chi) * f\|_\infty \right) + C_{v,p} \left\| \Gamma\mathcal{B}E_{v_\infty} E^0_{v_\infty}(f) \right\|_\theta
\end{aligned}
$$

Gleichung (4.3.10) angewendet

$$
\leq C_v \sum_{i\in I} \left(\|(\nabla\partial_\lambda\chi) * f\|_{s_i} + \|(\partial_\lambda\chi) * f\|_\infty \right) + C_{v,p} \left\| \mathcal{B}E_{v_\infty} E^0_{v_\infty}(f) \right\|_\theta
$$

Für ein allgemeines $p \geq t$, insbesondere für $p = t$ hatten wir letzteren Term am Anfang der Ungleichungskette schon einmal abgeschätzt.

$$
\leq C_v \sum_{i\in I} \left(\|(\nabla\partial_\lambda\chi) * f\|_{s_i} + \|(\partial_\lambda\chi) * f\|_\infty \right)
$$

Young

$$
\leq C_v \sum_{i\in I} \left(\|(\nabla\partial_\lambda\chi)\|_{s_i \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon+\epsilon s_i}} \|f\|_{1+\epsilon} + \|(\partial_\lambda\chi)\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} \|f\|_{1+\epsilon} \right)
$$

Da nach Voraussetzung $s_i > 4$, ist $s_i \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon+\epsilon s_i} = 4 - \mathrm{o}(1)$ und es folgt mit (4.1.11) (wähle z.B. $\delta = (3 - tr_i)/(r_i - 1)$ und $t = 3/r_i$)

$$
\begin{aligned}
&\leq C_{v,p} \operatorname{Re}\lambda^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{1+\epsilon} + \frac{C_{v,p}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \operatorname{Re}\lambda^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{1+\epsilon} \\
&\leq \frac{C_{v,p}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \operatorname{Re}\lambda^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{1+\epsilon}
\end{aligned}
$$

Nachdem ϵ hinreichend klein gewählt wurde, sind alle $s_i \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon+\epsilon s_i} > 4$. Nach Neubenennung von s_i und Unterdrückung der Abhängigkeit der Konstante in v haben wir

(4.4.8)

$$
\left\| g_\lambda E^0_{v_\infty}(f) \right\|_p \leq C_p \sum_{\substack{i\in I\\ s_i>4}} \left(\|(\nabla\partial_\lambda\chi)\|_{s_i} + \|(\partial_\lambda\chi)\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} \right) \|f\|_{1+\epsilon} \leq \frac{C_p}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \operatorname{Re}\lambda^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{1+\epsilon} \qquad \forall p > \frac{4}{3}
$$

Nach Hilfssatz 4.3.4 (4.3.15) ist

$$
\begin{aligned}
\psi\partial_\lambda E_{v_\infty,v}(f) &= -\psi\left(\partial_\lambda E_{v_\infty}\right)(f + g_\lambda(f)) - \psi E_{v_\infty} g_\lambda E_{v_\infty}(f + g_\lambda(f)) \\
&=: T_1 + T_2
\end{aligned}
$$

Schätzen wir jeden Term einzeln ab:

$$\begin{aligned}
\|T_1\|_{p,2} &= \|\psi\,(\partial_\lambda E_{v_\infty})\,(f+g_\lambda(f))\|_{p,2}\\
&\leq \|\psi\left(\partial_\lambda E^0_{v_\infty}\right)(f+g_\lambda(f))\|_{p,2} + \|\psi\left(\partial_\lambda E^\infty_{v_\infty}\right)(f+g_\lambda(f))\|_{p,2}\\
&\leq \|\psi\|_{p,2}\|\partial_\lambda(\chi)*(f+g_\lambda(f))\|_{\infty,2} + \|\psi\|_{\infty,2}\|\left(\partial_\lambda E^\infty_{v_\infty}\right)(f+g_\lambda(f))\|_{p,2}
\end{aligned}$$

Mit *Young* und [ShiKo, Lemma 3,1, 3.3]

$$\leq C_\psi\|\partial_\lambda(\chi)\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon},2}\|f+g_\lambda(f)\|_{1+\epsilon} + C_{\psi,p}\|f+g_\lambda(f)\|_p$$

Nach (4.1.11) und (4.3.5)

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C_\psi}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\operatorname{Re}(\lambda)^{-\frac12}\|f+g_\lambda(f)\|_{1+\epsilon} + C_{\psi,p}\|f\|_p\\
&\quad + C_{\psi,p}\|f\|_{1+\epsilon} + C_{\psi,p}\|f\|_{\max\left\{1+\epsilon,\frac{3p}{3+p}\right\}}
\end{aligned}$$

Da $\max\{1+\epsilon, 3p/(3+p)\} < p$ folgt mit *Hölder* und (4.3.5)

$$\leq \frac{C_{\psi,p,v}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\operatorname{Re}(\lambda)^{-\frac12}\left(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\right)$$

Sei wieder θ eine reelle Zahl mit $4/3 < \theta < 3/2$

$$\begin{aligned}
\|T_2\|_{p,2} &= \|\psi E_{v_\infty} g_\lambda E_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\|_{p,2}\\
&\leq \left\|\psi E^0_{v_\infty} g_\lambda E^\infty_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right\|_{p,2} + \left\|\psi E^\infty_{v_\infty} g_\lambda E^0_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right\|_{p,2}\\
&\quad + \left\|\psi E^\infty_{v_\infty} g_\lambda E^\infty_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right\|_{p,2} + \left\|\psi E^0_{v_\infty} g_\lambda E^0_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right\|_{p,2}\\
&\leq C_p\,\|\psi\|_{p,2}\left\|\chi*\left(g_\lambda E^\infty_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right)\right\|_{\infty,2}\\
&\quad + C_p\,\|\psi\|_{r,2}\left\|E^\infty_{v_\infty} g_\lambda E^0_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right\|_{\max\{\theta,p\},2}\\
&\quad + C_p\,\|\psi\|_{\infty,2}\left\|E^\infty_{v_\infty} g_\lambda E^\infty_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right\|_{p,2}\\
&\quad + C_p\,\|\psi\|_{p,2}\left\|\chi*\left(g_\lambda E^0_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right)\right\|_{\infty,2}
\end{aligned}$$

wobei $r = \theta' = \theta/(\theta-1)$ falls $p < \theta$ und $r = \infty$ sonst. Mit (4.1.9), *Young* und [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3]

$$\begin{aligned}
&\leq C_{p,\psi}\left\|g_\lambda E^\infty_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right\|_\theta + C_{p,\psi}\left\|g_\lambda E^0_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right\|_{\max\{\theta,p\}}\\
&\quad + C_{p,\psi}\left\|g_\lambda E^\infty_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right\|_p + C_{p,\psi}\left\|g_\lambda E^0_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right\|_\theta
\end{aligned}$$

Nun noch zweimal (4.3.5) und zweimal (4.4.8) angewendet ergibt

$$\begin{aligned}
&\leq C_{p,\psi}\left\|E^\infty_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right\|_{1+\epsilon} + C_{p,\psi}\left\|E^\infty_{v_\infty}(f+g_\lambda(f))\right\|_{\max\left\{\frac{3p}{3+p},1+\epsilon\right\}}\\
&\quad + C_{p,v,\psi}\operatorname{Re}\lambda^{-\frac12}\,\|f+g_\lambda(f)\|_{1+\epsilon}
\end{aligned}$$

[ShiKo, Lemma 3.1, 3.3] und (4.3.5)

$$\leq C_{p,\psi} \|f\|_{1+\epsilon} + C_{p,\psi} \|f\|_{\max\left\{\frac{3p}{3+p},1+\epsilon\right\}} + C_{p,v,\psi} \operatorname{Re} \lambda^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{1+\epsilon}$$

Da $\max\left\{\frac{3p}{3+p}, 1+\epsilon\right\} < p$ folgt mit *Hölder*

$$\leq C_{p,v,\psi} \operatorname{Re} \lambda^{-\frac{1}{2}} \left(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\right)$$

Zu (4.4.4): Sei wieder $1 < p < \infty$. Zunächst ist wegen $g_\lambda = -\Gamma_\lambda \mathcal{B} E_{v_\infty}(\lambda)$ und $\Gamma_\lambda^{-1} = \mathcal{B} E_{v_\infty}(\lambda) + \mathrm{id}$

$$\begin{aligned}(g_{\lambda'} - g_\lambda)(f) &= \Gamma_\lambda \mathcal{B} E_{v_\infty}(\lambda)(f) - \Gamma_{\lambda'} \mathcal{B} E_{v_\infty}(\lambda')(f) \\ &= -\left(\Gamma_{\lambda'} - \Gamma_\lambda\right) \mathcal{B} E_{v_\infty}(\lambda')(f) + \Gamma_\lambda \mathcal{B}\left(E_{v_\infty}(\lambda) - E_{v_\infty}(\lambda')\right)(f)\end{aligned}$$

Werfen wir einen kurzen Blick zurück auf den Beweis zu Satz 4.3.4 und verwenden die erste Gleichungskette und $\Gamma_\lambda^{-1} = \mathcal{B} E_{v_\infty}(\lambda) + \mathrm{id}$.

$$\begin{aligned}&= \Gamma_\lambda \mathcal{B}\left(E_{v_\infty}(\lambda') - E_{v_\infty}(\lambda)\right) \underbrace{\Gamma_{\lambda'} \mathcal{B} E_{v_\infty}(\lambda')(f)}_{=-g_{\lambda'}(f)} \\ &\quad + \Gamma_\lambda \mathcal{B}\left(E_{v_\infty}(\lambda) - E_{v_\infty}(\lambda')\right)(f)\end{aligned}$$

Also

$$(g_{\lambda'} - g_\lambda)(f) = -\Gamma_\lambda \mathcal{B}\big(E_{v_\infty}(\lambda') - E_{v_\infty}(\lambda)\big)\left(g_{\lambda'}(f) + f\right) \tag{4.4.9}$$

Benutzen wir wieder die Identitätsgleichung für g, nämlich $g(f) = -\mathcal{B} E_{v_\infty}(f) - \mathcal{B} E_{v_\infty}(g(f))$, so ist

$$\begin{aligned}&(g_{is+ih} - g_{is})(f) \\ &\quad = -\mathcal{B} E_{v_\infty}(is+ih)(f) - \mathcal{B} E_{v_\infty}(is+ih) g_{is+ih}(f) + \mathcal{B} E_{v_\infty}(is)(f) + \mathcal{B} E_{v_\infty}(is) g_{is}(f) \\ &\quad = -\mathcal{B}\left(E^0_{v_\infty}(is+ih) - E^0_{v_\infty}(is)\right)\left(f + g_{is}(f)\right) - \mathcal{B} E^\infty_{v_\infty}(is+ih)\left(g_{is+ih} - g_{is}\right)(f) \\ &\qquad - \mathcal{B}\left(E^\infty_{v_\infty}(is+ih) - E^\infty_{v_\infty}(is)\right)\left(f + g_{is}(f)\right) - \mathcal{B} E^0_{v_\infty}(is+ih)\left(g_{is+ih} - g_{is}\right)(f)\end{aligned}$$

Damit ist zu einem $q \geq \theta$ mit $4/3 < \theta < 3/2$

$$\begin{aligned}&\|g_{is+ih} - g_{is}\|_q \\ &\leq \left\|\mathcal{B}\left(E^0_{v_\infty}(is+ih) - E^0_{v_\infty}(is)\right)\left(f + g_{is}(f)\right)\right\|_q + \left\|\mathcal{B} E^\infty_{v_\infty}(is+ih)\left(g_{is+ih} - g_{is}\right)(f)\right\|_q \\ &\quad + \left\|\mathcal{B}\left(E^\infty_{v_\infty}(is+ih) - E^\infty_{v_\infty}(is)\right)\left(f + g_{is}(f)\right)\right\|_q + \left\|\mathcal{B} E^0_{v_\infty}(is+ih)\left(g_{is+ih} - g_{is}\right)(f)\right\|_q\end{aligned}$$

Nach Definition von $\mathcal{B}$ (s. auch 2.0.5) und 4.1.4 gibt es zu $q \geq \theta$ ein $r > 4$ und $t \geq 3 - \mathrm{o}(1)$, so daß

$$\begin{aligned}&\leq C_v \Big(\left\|\nabla\left(\chi(is+ih) - \chi(is)\right) * \left(f + g_{is}(f)\right)\right\|_r + \left\|\left(\chi(is+ih) - \chi(is)\right) * \left(f + g_{is}(f)\right)\right\|_\infty \\ &\quad + \left\|E^\infty_{v_\infty}(is+ih)\left(g_{is+ih} - g_{is}\right)(f)\right\|_{q,1} \\ &\quad + \left\|\left(E^\infty_{v_\infty}(is+ih) - E^\infty_{v_\infty}(is)\right)\left(f + g_{is}(f)\right)\right\|_{q,1} + \left\|\nabla\chi(is+ih) * \left(g_{is+ih} - g_{is}\right)(f)\right\|_t\Big)\end{aligned}$$

Young, (4.1.9), (4.1.15), $\big\|(\chi(is+ih)-\chi(is)) * (f+g_{is}(f))\big\|_\infty \le \big\|(\chi(is+ih)-\chi(is))\big\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}$ $\big\|(f+g_{is}(f))\big\|_{1+\epsilon} \le C_{v,q,\epsilon}\sqrt{h}\big\|f+g_{is}(f)\big\|_{1+\epsilon}/|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}$ und Soboleveinbettung ergibt

$$\begin{aligned}
&\le \frac{C_{v,q,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\sqrt{h}\,\|f+g_{is}(f)\|_{1+\epsilon} \\
&\quad + C_v \left\|E^\infty_{v_\infty}(is+ih)\left(g_{is+ih}-g_{is}\right)(f)\right\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},\theta\right\},2} \\
&\quad + C_v \left\|\left(E^\infty_{v_\infty}(is+ih)-E^\infty_{v_\infty}(is)\right)(f+g_{is}(f))\right\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},1+\epsilon\right\},2} + C_{v,q}\left\|\left(g_{is+ih}-g_{is}\right)(f)\right\|_\theta
\end{aligned}$$

[ShiKo, Lemma 3.1, 3.3] und (4.3.5)

$$\begin{aligned}
&\le \frac{C_{v,q,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\sqrt{h}\big(\|f\|_{1+\epsilon}+\|f\|_{1+\epsilon}\big) + C_{v,q}\left\|\left(g_{is+ih}-g_{is}\right)(f)\right\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},\theta\right\}} \\
&\quad + C_{v,q}|h|\,\|f+g_{is}(f)\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},1+\epsilon\right\}} + C_{v,q}\left\|\left(g_{is+ih}-g_{is}\right)(f)\right\|_\theta
\end{aligned}$$

Wieder (4.3.5) und die Tatsache angewendet, daß $\|f\|_q \le C\|f\|_p + \|f\|_r$ für $p \le q \le r$ ist, ergibt

$$\begin{aligned}
&\le \frac{C_{v,q,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\sqrt{h}\left(\|f\|_{1+\epsilon}+\|f\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},1+\epsilon\right\}}\right) + C_{v,q}\left\|\left(g_{is+ih}-g_{is}\right)(f)\right\|_\theta \\
&\quad + C_{v,q}\left\|\left(g_{is+ih}-g_{is}\right)(f)\right\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},\theta\right\}}
\end{aligned}$$

Ist $\max\left\{\frac{3q}{3+q},\theta\right\} > \theta$, so wiederholen wir die Ungleichungskette mit mit neuem $q' := \frac{3q}{3+q} < q$ bis θ erreicht ist. Dazu sind maximal noch weitere 3 Schritte nötig. O. B. können wir also weiterschreiben:

$$\le \frac{C_{v,q,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\sqrt{h}\left(\|f\|_{1+\epsilon}+\|f\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},1+\epsilon\right\}}\right) + C_{v,q}\left\|\left(g_{is+ih}-g_{is}\right)(f)\right\|_\theta$$

Wenden wir nun (4.4.9) an

$$\begin{aligned}
&\le \frac{C_{v,q,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\sqrt{h}\left(\|f\|_{1+\epsilon}+\|f\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},1+\epsilon\right\}}\right) \\
&\quad + C_{v,q}\left\|\Gamma_{is}\mathcal{B}\left(E_{v_\infty}(is+ih)-E_{v_\infty}(is)\right)\left(g_{is+ih}(f)+f\right)\right\|_\theta
\end{aligned}$$

Mit (4.3.10) folgt

$$\begin{aligned}
&\le \frac{C_{v,q,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\sqrt{h}\left(\|f\|_{1+\epsilon}+\|f\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},1+\epsilon\right\}}\right) \\
&\quad + C_{v,q}\left\|\mathcal{B}\left(E_{v_\infty}(is+ih)-E_{v_\infty}(is)\right)\left(g_{is+ih}(f)+f\right)\right\|_\theta \\
&\le \frac{C_{v,q,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\sqrt{h}\left(\|f\|_{1+\epsilon}+\|f\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},1+\epsilon\right\}}\right) \\
&\quad + C_{v,q}\left\|\mathcal{B}\left(E^0_{v_\infty}(is+ih)-E^0_{v_\infty}(is)\right)\left(g_{is+ih}(f)+f\right)\right\|_\theta \\
&\quad + C_{v,q}\left\|\mathcal{B}\left(E^\infty_{v_\infty}(is+ih)-E^\infty_{v_\infty}(is)\right)\left(g_{is+ih}(f)+f\right)\right\|_\theta
\end{aligned}$$

Letztere beiden Terme werden analog zu den Termen zu Beginn der Ungleichungskette abgeschätz. Es folgt

$$\leq \frac{C_{v,q,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \sqrt{h} \left(\|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},1+\epsilon\right\}} \right)$$

Also

$$\|g_{is+ih} - g_{is}\|_q \leq \frac{C_{v,q,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \sqrt{h} \left(\|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_{\max\left\{\frac{3q}{3+q},1+\epsilon\right\}} \right) \qquad \forall\, q > 4/3 \tag{4.4.10}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
&\rho\psi \left(E_{v_\infty,v}(is+ih) - E_{v_\infty,v}(is) \right)(f) \\
&\quad = \rho\psi \left(E_{v_\infty}(is+ih) - E_{v_\infty}(is) \right)(f) + \rho\psi \left(E_{v_\infty}(is+ih) g_{is+ih} - E_{v_\infty}(is) g_{is} \right)(f) \\
&\quad = \rho\psi \left(E_{v_\infty}(is+ih) - E_{v_\infty}(is) \right)(f) \\
&\qquad + \rho\psi \left(E^0_{v_\infty}(is+ih) g_{is+ih} - E^0_{v_\infty}(is) g_{is} + E^\infty_{v_\infty}(is+ih) g_{is+ih} - E^\infty_{v_\infty}(is) g_{is} \right)(f) \\
&\quad = \rho\psi \left(E_{v_\infty}(is+ih) - E_{v_\infty}(is) \right)(f) \\
&\qquad + \rho\psi \left(\left(E^0_{v_\infty}(is+ih) - E^0_{v_\infty}(is) \right) g_{is} + E^0_{v_\infty}(is+ih) \left(g_{is+ih} - g_{is} \right) \right. \\
&\qquad + \left. \left(E^\infty_{v_\infty}(is+ih) - E^\infty_{v_\infty}(is) \right) g_{is} + E^\infty_{v_\infty}(is+ih) \left(g_{is+ih} - g_{is} \right) \right)(f) \\
&\quad =: T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5
\end{aligned}$$

Wenden wir uns jedem Term einzeln zu:

$$\begin{aligned}
\|T_1\|_{p,2} &\leq \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{p,2} \left\| E^0_{v_\infty}(is+ih) - E^0_{v_\infty}(is)(f) \right\|_{\infty,2} \\
&\leq C_{\rho,\psi} \left\| \chi(is+ih) - \chi(is) \right\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon},2} \|f\|_{1+\epsilon} && \text{Def. 4.1.4, Young Ungleichung} \\
&\leq \frac{C_{\rho,\psi,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \sqrt{|h|} \|f\|_{1+\epsilon} && \text{(4.1.15)}
\end{aligned}$$

$$\|T_2\|_{p,2} \leq \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{p,2} \left\| E^0_{v_\infty}(is+ih) - E^0_{v_\infty}(is) g_{is}(f) \right\|_{\infty,2}$$

Darstellung in Definition 4.1.4 und Young'sche Ungleichung

$$\leq C_{\rho,\psi} \left\| \chi(is+ih) - \chi(is) \right\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon},2} \|g_{is}(f)\|_{1+\epsilon}$$

Der erste Faktor wird mit (4.1.15) abgeschätzt, der zweite mit (4.3.5)

$$\leq \frac{C_{\rho,\psi,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \sqrt{|h|} \|f\|_{1+\epsilon}$$

So ähnlich schätzen wir T_4 ab:

$$\begin{aligned}\|T_4\|_{p,2} &\leq \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{\infty,2} \left\| \left(E^\infty_{v_\infty}(is+ih) - E^\infty_{v_\infty}(is)\right) g_{is}(f) \right\|_{p,2} && \text{[ShiKo, L. 3.3], Satz 4.2.10} \\ &\leq C_{\rho,\psi} |h| \, \|g_{is}(f)\|_p && (4.3.5) \\ &\leq C_{\rho,\psi} |h| \left(\|f\|_{\max\left\{1+\epsilon, \frac{3p}{3+p}\right\}} + \|f\|_{1+\epsilon} \right) \\ &\leq C_{\rho,\psi} |h| \left(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} \right)\end{aligned}$$

Weiter gehts mit T_3: Wieder sei $4/3 < \theta < 3/2$

$$\|T_3\|_{p,2} \leq \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{p,2} \left\| E^0_{v_\infty}(is+ih) \left(g_{is+ih} - g_{is}\right)(f) \right\|_{\infty,2}$$

Darstellung in Definition 4.1.4, *Young*'sche Ungleichung und (4.1.9)

$$\begin{aligned} &\leq C_{\rho,\psi} \left\| \left(g_{is+ih} - g_{is}\right)(f) \right\|_\theta \\ &\leq \frac{C_{v,p,\rho,\psi}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \sqrt{h} \, \|f\|_{1+\epsilon} && (4.4.10)\end{aligned}$$

und schließlich gilt für T_5: Nach *Hölder* existiert ein $r \in [p, \infty]$ so daß

$$\begin{aligned}&\|T_5\|_{p,2} \\ &\quad\leq \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{r,2} \left\| E^\infty_{v_\infty}(is+ih) \left(g_{is+ih} - g_{is}\right)(f) \right\|_{\max\{\theta,p\},2} \\ &\quad\leq C_{p,\psi,\rho} \left\| \left(g_{is+ih} - g_{is}\right)(f) \right\|_{\max\{\theta,p\}} && \text{[ShiKo, Lemma 3.1, 3.3]} \\ &\quad\leq \frac{C_{v,p,\psi,\rho}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \sqrt{h} \left(\|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_{\max\left\{\frac{3p}{3+p}, 1+\epsilon\right\}} \right) && (4.4.10) \\ &\quad\leq \frac{C_{v,p,\rho,\psi}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \sqrt{h} \left(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} \right)\end{aligned}$$

Zu (4.4.5):

Nach (4.3.15) ist

$$\begin{aligned}&\partial_s \rho \psi E_{v_\infty,v}(is)(f) \\ &\quad= \rho \partial_s \psi E_{v_\infty}(is) \left(f + g_{is}(f)\right) + \left(\partial_s \rho\right) \psi E_{v_\infty,v}(is)(f) \\ &\quad= -\rho\psi \left(\left(\partial_s E_{v_\infty}(is)\right) \left(f + g_{is}(f)\right) + E_{v_\infty}(is) g_{is} E_{v_\infty}(is) \left(f + g_{is}(f)\right) \right) \\ &\qquad + \left(\partial_s \rho\right) \psi E_{v_\infty,v}(is)(f) \\ &\quad= -\rho\psi \left(\left(\partial_s E^0_{v_\infty}(is)\right) \left(f + g_{is}(f)\right) + \left(\partial_s E^\infty_{v_\infty}(is)\right) \left(f + g_{is}(f)\right) \right. \\ &\qquad + E^0_{v_\infty}(is) g_{is} E^\infty_{v_\infty}(is) \left(f + g_{is}(f)\right) + E^0_{v_\infty}(is) g_{is} E^0_{v_\infty}(is) \left(f + g_{is}(f)\right)\Big) \\ &\qquad + E^\infty_{v_\infty}(is) g_{is} E^\infty_{v_\infty}(is) \left(f + g_{is}(f)\right) + E^\infty_{v_\infty}(is) g_{is} E^0_{v_\infty}(is) \left(f + g_{is}(f)\right)\Big) \\ &\qquad + \left(\partial_s \rho\right) \psi E_{v_\infty,v}(is)(f) \\ &\quad=: T_1 + \ldots + T_7\end{aligned}$$

Es sei bemerkt, daß sowohl ρ als auch $\partial_s\rho$ kompakten Träger bezüglich s haben.

Bis auf den Faktor $\partial_s\rho$ haben wir T_7 schon bei (4.4.1) betrachtet.

$$\|T_7\|_{p,2} \;\leq\; \|\partial_s\rho\|_{\infty,2}\,\|\psi E_{v_\infty,v}(is)(f)\|_{p,2} \;\leq\; C_{\rho,\psi,p}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|T_1\|_{p,2}\,ds \;\leq\; \int_{-\infty}^{\infty} \|\rho\|_{\infty,2}\|\psi\|_{p,2}\left\|\left(\partial_s E^0_{v_\infty}(is)\right)(f + g_{is}(f))\right\|_{\infty,2}\,ds$$

Mit Darstellung in Definition 4.1.4 und *Young* gilt

$$\leq\; C_{\rho,\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\|\partial_s\chi(is)\|_{\frac{1}{\mathrm{o}(1)},2}\,\|f + g_{is}(f)\|_{1+\epsilon}\;ds$$

Nach (4.1.17) und (4.3.5)

$$\leq\; C_{\rho,\psi,\epsilon,p,v}\|f\|_{1+\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
\|T_2\|_{p,2} \;&\leq\; \|\rho\|_{\infty,2}\|\psi\|_{\infty,2}\left\|\left(\partial_s E^\infty_{v_\infty}(is)\right)(f + g_{is}(f))\right\|_{p,2} && \\
&\leq\; C_{p,\rho,\psi}\,\|f + g_{is}(f)\|_p && \text{[ShiKo, L. 3.3], Satz 4.2.10} \\
&\leq\; C_{p,\rho,\psi}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big) && \text{(4.3.5), \textit{Hölder}}
\end{aligned}$$

Mit *Hölder*, Definition 4.1.4 und (4.1.9) gilt

$$\begin{aligned}
\|T_3\|_{p,2} \;&\leq\; C_{\rho,\psi}\left\|g_{is}E^\infty_{v_\infty}(is)\,(f + g_{is}(f))\right\|_{\frac{6}{5}} && \\
&\leq\; C_{\rho,\psi,\epsilon,p,v}\left\|E^\infty_{v_\infty}(is)\,(f + g_{is}(f))\right\|_{1+\epsilon} && \text{(4.3.5)} \\
&\leq\; C_{\rho,\psi,\epsilon,p,v}\,\|f + g_{is}(f)\|_{1+\epsilon} && \text{[ShiKo, Lemma 3.1, 3.3]} \\
&\leq\; C_{\rho,\psi,\epsilon,p,v}\,\|f\|_{1+\epsilon} && \text{(4.3.5)}
\end{aligned}$$

Ähnlich gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|T_4\|_{p,2}\,ds \;\leq\; C_{\rho,\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|g_{is}E^0_{v_\infty}(is)\,(f + g_{is}(f))\right\|_{\frac{6}{5}}\;ds$$

Nach (4.4.8) gibt es ein $s \geq 4$ und ein $r \geq 12$, so daß

$$\begin{aligned}
\leq\; \frac{C_{\rho,\psi,\epsilon,p,v}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(&\|(\nabla\partial_\lambda\chi)\|_{s-\mathrm{o}(1)} + \|(\partial_\lambda\chi)\|_{r-\mathrm{o}(1)} \\
&+ \|(\nabla\partial_\lambda\chi)\|_{3-\mathrm{o}(1)} + \|(\partial_\lambda\chi)\|_{12-\mathrm{o}(1)}\Big)\,\|f + g_{is}(f)\|_{1+\epsilon}\;ds
\end{aligned}$$

Nach (4.3.5), (4.1.16) und (4.1.17) ist

$$\leq \frac{C_{\rho,\psi,\epsilon,p,v}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \|f\|_{1+\epsilon}$$

Mit *Hölder* und [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3]

$$\|T_5\|_{p,2} \leq C_{\rho,\psi} \left\|g_{is} E^\infty_{v_\infty}(is)\,(f + g_{is}(f))\right\|_p$$

Anwendung von (4.3.5)

$$\leq C_{\rho,\psi,\epsilon,p,v} \Big(\left\|E^\infty_{v_\infty}(is)\,(f + g_{is}(f))\right\|_{1+\epsilon} + \left\|E^\infty_{v_\infty}(is)\,(f + g_{is}(f))\right\|_{\max\left\{1+\epsilon, \frac{3p}{3+p}\right\}} \Big)$$

[ShiKo, Lemma 3.1, 3.3]

$$\leq C_{\rho,\psi,\epsilon,p,v} \left(\|f + g_{is}(f)\|_{1+\epsilon} + \|(f + g_{is}(f))\|_{\max\left\{1+\epsilon, \frac{3p}{3+p}\right\}} \right)$$

Und mit (4.3.5) und *Hölder*

$$\leq C_{\rho,\psi,\epsilon,p,v} \big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} \big)$$

Wieder mit *Hölder* und [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|T_6\|_{p,2}\, ds \leq C_{\rho,\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\|g_{is} E^\infty_{v_\infty}(is)\,(f + g_{is}(f))\right\|_p \, ds$$

Nach (4.4.8) gibt es ein $s \geq 4$ und ein $r \geq 12$, so daß

$$\leq \frac{C_{\rho,\psi,\epsilon,p,v}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\|(\nabla \partial_\lambda \chi)\|_{s-\mathrm{o}(1)} + \|(\partial_\lambda \chi)\|_{r-\mathrm{o}(1)} + \|(\nabla \partial_\lambda \chi)\|_{3-\mathrm{o}(1)} + \|(\partial_\lambda \chi)\|_{12-\mathrm{o}(1)} \Big) \|f + g_{is}(f)\|_{1+\epsilon} \, ds$$

Nach (4.3.5), (4.1.16) und (4.1.17) ist

$$\leq \frac{C_{\rho,\psi,\epsilon,p,v}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \|f\|_{1+\epsilon}$$

Da in allen Fällen ϵ in Abhängigkeit von $p > 1$ gewählt wurde, folgt die Behauptung.

Nun zu (4.4.6):

Der übersichtlicheren Schreibweise wegen sei für den Rest dieses Beweises folgende Notation eingeführt

$$\begin{aligned}
E &:= E_{v_\infty}(is) \\
E_h &:= E_{v_\infty}(is+ih) \\
g &:= g_{is}(f) \\
g_h &:= g_{is+ih}(f) \\
\frac{\partial}{\partial s} &:= {}'
\end{aligned}$$

Etwas schlampig geschrieben soll g und g_h aber auch für die Operatoren g_{is} und für g_{is+ih} stehen, wenn in der Notation unmittelbar danach noch ein Operator oder eine Funktion folgt.

Es ist nach (4.3.15) und (4.3.14)

$$\begin{aligned}
&\partial_s \rho\psi \left(E_{v_\infty,v}\left(is+ih\right) - E_{v_\infty,v}\left(is\right)\right) \\
&\quad = \rho'\psi\left(E_h\left(f+g_h\right) - E\left(f+g\right)\right) \\
&\qquad + \rho\psi\left(E_h'\left(f+g_h\right) - E_h g_h E_h\left(f+g_h\right) - E'\left(f+g\right) + EgE\left(f+g\right)\right) \\
&\quad = \rho'\psi\left(E_h\left(f+g_h\right) - E\left(f+g\right)\right) + \rho\psi\big(\left(E_h'-E'\right)\left(f+g\right) + E_h'\left(g_h-g\right) \\
&\qquad - \left(E_h-E\right)g_hE_h\left(f+g_h\right) - EgE\left(g_h-g\right) - E\left(g_hE_h-gE\right)\left(f+g_h\right)\big) \\
&\quad = \rho'\psi\left(E_h\left(f+g_h\right) - E\left(f+g\right)\right) + \rho\psi\Big(\\
&\qquad \Big(E_h^{0\prime} - E^{0\prime}\Big)\left(f+g\right) + E_h^{0\prime}\left(g_h-g\right) \\
&\qquad + \left(E_h^{\infty\prime} - E^{\infty\prime}\right)\left(f+g\right) + E_h^{\infty\prime}\left(g_h-g\right) \\
&\qquad - \left(E_h^0 - E^0\right)g_hE_h^0\left(f+g_h\right) \\
&\qquad - \left(E_h^0 - E^0\right)g_hE_h^\infty\left(f+g_h\right) \\
&\qquad - \left(E_h^\infty - E^\infty\right)g_hE_h^0\left(f+g_h\right) \\
&\qquad - \left(E_h^\infty - E^\infty\right)g_hE_h^\infty\left(f+g_h\right) \\
&\qquad - E^0gE^0\left(g_h-g\right) \\
&\qquad - E^0gE^\infty\left(g_h-g\right) \\
&\qquad - E^\infty gE^0\left(g_h-g\right) \\
&\qquad - E^\infty gE^\infty\left(g_h-g\right) \\
&\qquad - E^0\left(g_hE_h-gE\right)\left(f+g_h\right) \\
&\qquad - E^\infty\left(g_hE_h-gE\right)\left(f+g_h\right)\Big) \\
&\quad =: T_1 + \ldots + T_{15}
\end{aligned}$$

Betrachten wir uns wieder jeden Term einzeln. Bis auf ρ', das mit *Hölder* wegen des beschränkten Träger herausgezogen werden kann, ist $\|T_1\|_{p,2} \leq C/|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}\sqrt{|h|}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$ gerade Aussage von (4.4.4).

Mit *Hölder*, *Young* und Darstellung in Definition 4.1.4 ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|T_2\|_{p,2}\, ds \;\leq\; \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{p,2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \|\partial_s\chi(is+ih) - \partial_s\chi(is)\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon},2} \|f + g_{is}(f)\|_{1+\epsilon}\, ds$$

Ungleichung (4.3.5) angewendet

$$\leq\; C_{\rho,\psi,p}\|f\|_{1+\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \|\partial_s\chi(is+ih) - \partial_s\chi(is)\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon},2}\, ds$$

Anwendung von (4.1.19) liefert

$$\leq\; C_{\rho,\psi,\epsilon,\gamma,p}\sqrt{|h|}\|f\|_{1+\epsilon}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|T_3\|_{p,2}\, ds \;\leq\; \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{p,2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \|\partial_s\chi(is+ih)\|_{4-\mathrm{o}(1),2} \|g_{is+ih}(f) - g_{is}(f)\|_{\frac{4}{3}+\epsilon}\, ds$$

Ungleichung (4.4.10) und (4.1.18) ergibt

$$\leq\; \frac{C_{\rho,\psi,\epsilon,\gamma,p}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\sqrt{|h|}\|f\|_{1+\epsilon}$$

T_4 folgt unmittelbar aus [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3] und (4.3.5):

$$\begin{aligned}
\|T_4\|_{p,2} &\leq\; \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{\infty,2} \left\| \left(E^\infty_{v_\infty}(is+ih) - E^\infty_{v_\infty}(is)\right)(f + g_{is}(f)) \right\|_{p,2} \\
&\leq\; C_{\rho,\psi,p}|h|\,\|f + g_{is}(f)\|_p \\
&\leq\; C_{\rho,\psi,p}|h|\left(\|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_{\max\left\{1+\epsilon,\frac{3p}{3+p}\right\}}\right) \\
&\leq\; C_{\rho,\psi,p}|h|\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)
\end{aligned}$$

Für T_5 gilt mit [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3] : Es gibt ein $r \in (4,\infty]$ so daß

$$\|T_5\|_{p,2} \;\leq\; \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{r,2}\, \|g_{is+ih}(f) - g_{is}(f)\|_{\max\left\{\frac{4}{3}+\epsilon,p\right\}}$$

Und mit (4.4.10) folgt

$$\begin{aligned}
&\leq\; \frac{C_{\rho,\psi,p}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\left(\|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_{\max\left\{1+\epsilon,\frac{3p}{3+p}\right\}}\right) \\
&\leq\; \frac{C_{\rho,\psi,p}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\sqrt{|h|}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)
\end{aligned}$$

Mit der Darstellung aus Definition 4.1.4 folgt zusammen mit Hölder und einem noch näher zu bestimmenden $2 > \theta > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|T_6\|_{p,2}\, ds$$
$$\leq \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{p,2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \|\chi(is+ih) - \chi(is)\|_{4-\theta,2} \left\|g_{is+ih} E^0_{v_\infty}(is+ih)\big(\mathrm{id} + g_{is+ih}\big)(f)\right\|_{\frac{4-\theta}{3-\theta}}\, ds$$

Nach Abschätzung (4.4.7) gibt es ein $4 < s = \frac{s_0(4-\theta)}{s_0(3-\theta)-4+\theta},\ s_0 > 2$, so daß

$$\leq \frac{C_{\rho,\psi,s,v}}{|v_\infty|^{\max\{0,\frac{2\theta-2}{4-\theta}\}}} \int_{-\gamma}^{\gamma} \|\chi(is+ih) - \chi(is)\|_{4-\theta,2} \left(\|\nabla\partial_s\chi\|_{s(1-\mathrm{o}(1))} + \|\partial_s\chi\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\right) \|f\|_{1+\epsilon}\, ds$$

Nach *Hölder* ist $\|.\|_{4-\delta} \leq \|.\|_4^\lambda \|.\|_{4-(1+\delta)\theta}^{1-\lambda}$ mit $\lambda = \lambda(\delta,\theta) = \frac{4\delta}{(1+\delta)(4-\theta)}$ und nach (4.1.15) ist $\left\|\chi(is+ih) - \chi(is)\right\|_{4,2} < C_\delta \sqrt{h}^{\lambda(\delta)} |v_\infty|^{-3\lambda/4}$. Weder bei θ noch bei δ kommt es auf Kleinheit an. Es gilt mit möglicherweise verschiedenen $\delta_1,\ \delta_2$ und $\lambda_1,\ \lambda_2$

$$\leq \|f\|_{1+\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{C_{\rho,\psi,\delta}\sqrt{h}^{\lambda_1}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}\lambda_1 + \max\{0,\frac{2\theta-2}{4-\theta}\}}} \|\chi(is+ih) - \chi(is)\|_{4-(1+\delta_1)\theta,2}^{1-\lambda_2} \|\partial_s\chi\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}$$
$$+ \frac{C_{\rho,\psi,\delta}\sqrt{h}^{\lambda_2}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}\lambda_2 + \max\{0,\frac{2\theta-2}{4-\theta}\}}} \|\chi(is+ih) - \chi(is)\|_{4-(1+\delta_2)\theta,2}^{1-\lambda_2} \|\nabla\partial_s\chi\|_{s(1-\mathrm{o}(1))}\, ds$$
$$\leq \|f\|_{1+\epsilon} \frac{C_{\rho,\psi,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}\max\{\lambda_1,\lambda_2\} + \max\{0,\frac{2\theta-2}{4-\theta}\}}} \Bigg($$
$$\sqrt{h}^{\lambda_1} \left(\int_{-\gamma}^{\gamma} \|\chi(is+ih) - \chi(is)\|_{4-(1+\delta_1)\theta,2}^{(1-\lambda_1)y}\, ds\right)^{\frac{1}{y}} \left(\int_{-\gamma}^{\gamma} \|\partial_s\chi\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}^{y'}\, ds\right)^{\frac{1}{y'}}$$
$$+ \sqrt{h}^{\lambda_2} \left(\int_{-\gamma}^{\gamma} \|\chi(is+ih) - \chi(is)\|_{4-(1+\delta_2)\theta,2}^{(1-\lambda_2)x}\, ds\right)^{\frac{1}{x}} \left(\int_{-\gamma}^{\gamma} \|\nabla\partial_s\chi\|_{s(1-\mathrm{o}(1))}^{x'}\, ds\right)^{\frac{1}{x'}} \Bigg)$$

Die 4 Integrale sollen vermöge (4.1.17) und (4.1.18) von Seite 40 abgeschätzt werden. Der Exponent im 2. Integral ist gerade so gewählt, daß das Integral für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ endlich ist. Die anderen Integrale können passend abgeschätzt werden, falls

$$(4-(1+\delta_1)\theta)(4-(1+\delta_1)\theta)' \leq (1-\lambda_1)y \leq \frac{5}{3} \qquad \text{1. Integral, gemäß (4.1.18)}$$
$$\left(\frac{1+\epsilon}{\epsilon}\right)' \leq y' < \frac{5}{3} \qquad \text{2. Integral, gemäß (4.1.17)}$$
$$(4-(1+\delta_1)\theta)' \leq (1-\lambda_2)x \leq \frac{5}{3} \qquad \text{3. Integral, gemäß (4.1.18)}$$
$$s' \leq x' < \frac{5}{3} \qquad \text{4. Integral, gemäß (4.1.17)}$$

Ist $\lambda_2 > 2/3$, dann gibt es stets ein $\epsilon > 0$ und ein $5 < y < (1+\epsilon)/\epsilon$ mit $(1-\lambda_1)y < 5/3$. Die 4 Bedingungen sind somit äquivalent zu

$$(4-(1+\delta_1)\theta)' = \frac{4-(1+\delta_1)\theta}{3-(1+\delta_1)\theta} < \frac{5}{3} \text{ und } \lambda_2 > \frac{2}{3}$$
$$\max\Big\{\frac{4-(1+\delta_2)\theta}{(3-(1+\delta_2)\theta)(1-\lambda_2)}, \frac{5}{2}\Big\} < x < \min\Big\{s, \frac{5}{3(1-\lambda_2)}\Big\}$$

Wählt man z.B. $s_0 = 2.5, \delta_1 = 0.5, \delta_2 = 1.5, \theta = 0.5$ so ist $(4-(1+\delta_1)\theta)' = 1.\overline{4}, \lambda_1 = 0.38, \lambda_2 = 0.686, (4-(1+\delta_2)\theta)' = 1.57, \max = 2.5, s = 3.15, \min = 2.69$. Diese Zahlenbeispiele erfüllen offensichtlich die Erfordernise. Wählt man üebrdies hinausθ in Abhängigkeit von ϵ hinreichend nah an $(4-\theta)/(2+\theta)$, etwa durch $\delta_2 = (4-\theta)/(2+\theta) + \mathrm{o}(1)$, so läßt sich λ_2 in Abhängigkeit von ϵ beliebig nah an $2/3$ einstellen. Also ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \|T_6\|_{p,2}\, ds &\leq \frac{C_{\rho,\psi,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}\max\{\lambda_1,\lambda_2\}+\max\{0,\frac{2\theta-2}{4-\theta}\}}} \big(\sqrt{h}^{\lambda_1+(1-\lambda_1)}\sqrt{h}^{\lambda_2+(1-\lambda_2)}\big)\|f\|_{1+\epsilon} \\ &\leq \frac{C_{\rho,\psi,\delta}\sqrt{h}}{|v_\infty|^{\frac{1}{2}+\mathrm{o}(1)}}\|f\|_{1+\epsilon}\end{aligned}$$

Wieder mit der Darstellung aus Definition 4.1.4 zusammen mit *Hölder*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|T_7\|_{p,2}\, ds$$
$$\leq \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{p,2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \|\chi(is+ih)-\chi(is)\|_{\frac{1}{\mathrm{o}(1)},2} \|g_{is+ih}E^\infty_{v_\infty}(is+ih)(f+g_{is+ih}(f))\|_{1+\epsilon}\, ds$$

(4.3.5), [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3] und nochmal (4.3.5) zeigt

$$\leq C_{\rho,\psi,p}\|f\|_{1+\epsilon}\int_{-\gamma}^{\gamma} \|\chi(is+ih)-\chi(is)\|_{\frac{1}{\mathrm{o}(1)},2}\, ds$$

(4.1.18) ergibt schließlich

$$\leq C_{\rho,\psi,p,\gamma}\sqrt{|h|}\|f\|_{1+\epsilon}$$

Mit [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3] folgt: Es gibt ein $r \in [6,\infty]$, so daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|T_8\|_{p,2}\, ds$$
$$\leq \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{r,2}|h| \int_{-\gamma}^{\gamma} \big\|g_{is+ih}E^0_{v_\infty}(is+ih)(f+g_{is+ih}(f))\big\|_{\max\{\frac{4}{3}+\epsilon,p\}}\, ds$$

Nun gehts weiter wie bei T_6: Abschätzung (4.4.8) und (4.1.15): Es gibt endl. viele $s_i > 4$, so daß

$$\leq\ C_{\rho,\psi,\epsilon}|h|\sum_{i\in I}\int_{-\gamma}^{\gamma}\|f+g_{is+ih}(f)\|_{1+\epsilon}\big(\|\nabla\partial_s\chi(is+ih)\|_{s_i}+\|\partial_s\chi(is+ih)\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\big)\,ds$$

g_{is+ih} mit (4.3.5) abgeschätzt und *Hölder*

$$\leq\ C_{\rho,\psi,\epsilon}|h|\|f\|_{1+\epsilon}\sum_{i\in I}\int_{-\gamma}^{\gamma}\big(\|\nabla\partial_s\chi(is+ih)\|_{s_i}+\|\partial_s\chi(is+ih)\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\big)\,ds$$

Nun ist (4.1.17) anwendbar, also

$$\leq\ C_{\rho,\psi,\epsilon}|h|\|f\|_{1+\epsilon}$$

Wieder [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3] zusammen mit *Hölder*: Es gibt ein $r\in[6,\infty]$, so daß

$$\|T_9\|_{p,2}\ \leq\ \|\rho\|_\infty\|\psi\|_{r,2}|h|\|g_{is+ih}E^\infty_{v_\infty}(is+ih)(f+g_{is+ih}(f))\|_{\max\{\frac{6}{5},p\}}$$

(4.3.5), [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3] und nochmal (4.3.5) zeigt

$$\leq\ C_{\rho,\psi,p}|h|\big(\|f\|_p+\|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

Um die Abschätzung von T_{10} vorzunehmen, zeigen wir zunächst das Folgende: Wegen der Darstellung von $g_\lambda(f)=-\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)(f)-\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)g_\lambda(f)$ ist

$$g_h-g\ =\ -\mathcal{B}\left(E_h-E\right)(f+g)-\mathcal{B}E\left(g_h-g\right)$$

und daher nach Definition von $\mathcal{B}$ und (4.2.9)

$$\begin{aligned}
&\|g_h-g\|_{1+\epsilon}\\
&\quad\leq\ C_v\Big(\big\|\nabla\left(E^0_h-E^0\right)(f+g)\big\|_{2+\mathrm{o}(1)}+\big\|\left(E^0_h-E^0\right)(f+g)\big\|_{4+\mathrm{o}(1)}\\
&\qquad+\|(E^\infty_h-E^\infty)(f+g)\|_{1+\epsilon,1}+\|E^\infty_h(g_h-g)\|_{\frac{4}{3}+\epsilon,1}\\
&\qquad+\big\|\nabla E^0_h(g_h-g)\big\|_{2+\mathrm{o}(1)}+\big\|E^0_h(g_h-g)\big\|_{4+\mathrm{o}(1)}\Big)
\end{aligned}$$

Darstellung aus Definition 4.1.4, *Young* Ungleichung, (4.3.5), [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3]

$$\begin{aligned}
&\leq\ C_v\Big(\|\nabla\left(\chi(is+ih)-\chi(is)\right)\|_{2+\mathrm{o}(1)}\|f\|_{1+\mathrm{o}(1)}\\
&\quad+\|(\chi(is+ih)-\chi(is))\|_{4+\mathrm{o}(1)}\|f\|_{1+\mathrm{o}(1)}+|h|\,\|f\|_{1+\epsilon}+\|g_h-g\|_{\frac{4}{3}+\epsilon}\\
&\quad+\|\mathcal{F}(\nabla\chi)(is+ih)\|_{(\frac{4}{3}+\mathrm{o}(1))'}\|g_h-g\|_{\frac{4}{3}+\mathrm{o}(1)}+\|\chi(is+ih)\|_{2+\mathrm{o}(1)}\|g_h-g\|_{\frac{4}{3}+\mathrm{o}(1)}\Big)
\end{aligned}$$

Ungleichungen (4.1.15) und (4.1.9) sind anwendbar

$$\leq\ C_{v,\epsilon}\left(|v_\infty|^{-\frac{3}{4}}\sqrt{|h|}\|f\|_{1+\mathrm{o}(1)}+|v_\infty|^{-\frac{1}{4}}\,\|g_h-g\|_{\frac{4}{3}+\epsilon}\right)$$

Mit (4.4.10) folgt

(4.4.10')
$$\|g_{is+ih}(f)-g_{is}(f)\|_{1+\epsilon}\ \leq\ C_{v,\sigma_0}\sqrt{|h|}|v_\infty|^{-\frac{3}{4}}\big(\|f\|_{1+\mathrm{o}(1)}+\|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

Somit können wir nun T_{10} angehen: Verwenden wir wieder Darstellung aus Definition 4.1.4

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|T_{10}\|_{p,2}\,ds\ \leq\ \|\rho\|_\infty\|\psi\|_{p,2}\int\limits_{-\gamma}^{\gamma}\|\chi(is)\|_{4-\mathrm{o}(1),2}\left\|g_{is}E^0_{v_\infty}(is)\left(g_{is+ih}-g_{is}\right)(f)\right\|_{\frac{4}{3}+\epsilon}\,ds$$

Als nächstes (4.1.9) und wieder Darstellung aus Definition 4.1.4. Nach Formel (4.4.8) existieren endl. viele $s_i>4$, so daß

$$\leq\ C_{\rho,\psi,p}\sum_{i\in I}\int\limits_{-\gamma}^{\gamma}\Big(\|\nabla\partial_s\chi(is)\|_{s_i}+\|\partial_s\chi(is)\|_{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\Big)\,\|(g_{is+ih}-g_{is})\,(f)\|_{1+\epsilon}\,ds$$

Nun (4.4.10') und (4.1.17). Außerdem ϵ so klein wählen, daß $\mathrm{o}(1)\leq p-1$

$$\leq\ C_{\rho,\psi,p,\sigma_0}\sqrt{|h|}|v_\infty|^{-\frac{3}{4}}\big(\|f\|_{1+\mathrm{o}(1)}+\|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

$$\|T_{11}\|_{p,2}\ \leq\ \|\rho\|_\infty\|\psi\|_{p,2}\,\|\chi(is)\|_{4-\mathrm{o}(1),2}\left\|g_{is}E^\infty_{v_\infty}(is)\left(g_{is+ih}-g_{is}\right)(f)\right\|_{\frac{4}{3}+\epsilon}$$

Formel (4.1.9), (4.3.6) und [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3]

$$\leq\ C_{\rho,\psi,p}\,\|(g_{is+ih}-g_{is})\,(f)\|_{\frac{4}{3}+\epsilon}$$

Nach (4.4.10) folgt

$$\leq\ \frac{C_{\rho,\psi,p}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\sqrt{|h|}\big(\|f\|_{1+\mathrm{o}(1)}+\|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

Nach [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3] gibt es ein $t=t(p)\in(4,\infty]$, so daß

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|T_{12}\|_{p,2}\,ds\ \leq\ \|\rho\|_\infty\|\psi\|_{t,2}\int\limits_{-\gamma}^{\gamma}\left\|g_{is}E^0_{v_\infty}(is)\left(g_{is+ih}-g_{is}\right)(f)\right\|_{\max\left\{\frac{4}{3}+\epsilon,p\right\}}\,ds$$

Nach Formel (4.4.8) existieren endl. viele $s_i>4$, so daß

$$\leq\ C_{\rho,\psi,p}\sum_{i\in I}\int\limits_{-\gamma}^{\gamma}\left(\|\nabla\partial_s\chi(is)\|_{s_i}+\|\partial_s\chi(is)\|_\infty\right)\|(g_{is+ih}-g_{is})\,(f)\|_{1+\epsilon}\,ds$$

Nun (4.4.10') und (4.1.17). Außerdem ϵ so klein wählen, daß $\mathrm{o}(1) \leq p-1$

$$\leq\ C_{\rho,\psi,p,\epsilon}\sqrt{|h|}|v_\infty|^{-\frac{3}{4}}\left(\|f\|_{1+\mathrm{o}(1)} + \|f\|_{1+\epsilon}\right)$$

Nach [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3] gibt es ein $t = t(p) \in (4,\infty]$, so daß

$$\|T_{13}\|_{p,2}\ \leq\ \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{t,2}\left\|g_{is}E^\infty_{v_\infty}(is)\left(g_{is+ih} - g_{is}\right)(f)\right\|_{\max\left\{\frac{4}{3}+\epsilon,p\right\}}$$

Formel (4.3.5) und [ShiKo, Lemma 3.1,3.3]

$$\leq\ C_{\rho,\psi,p}\left\|\left(g_{is+ih} - g_{is}\right)(f)\right\|_{1+\epsilon}$$

Nach (4.4.10') und ϵ hinreichend klein folgt

$$\leq\ C_{\rho,\psi,p}\sqrt{|h|}|v_\infty|^{-\frac{3}{4}}\left(\|f\|_{1+\mathrm{o}(1)} + \|f\|_{1+\epsilon}\right)$$

Wegen der Darstellung $g_\lambda(f) = -\mathcal{B}E_{v_\infty}(\lambda)(f + g_\lambda(f)) =: -\mathcal{B}E(f+g)$ ist

$$\begin{aligned} g_hE_h - gE =&\ -\mathcal{B}E_hE_h + \mathcal{B}EE - \mathcal{B}E_hg_hE_h + \mathcal{B}EgE \\ =&\ -\mathcal{B}\left(E_hE_h - EE\right) - \mathcal{B}E\left(g_hE_h - gE\right) - \mathcal{B}\left(E_h - E\right)g_hE_h \end{aligned}$$

Somit ist für ein $p \geq 4/3+\epsilon$

$$\begin{aligned} &\left\|\left(g_hE_h - gE\right)(f)\right\|_p \\ &\leq\ C_v\Big(\left\|\mathcal{B}\left(E'_h - E'\right)(f)\right\|_p + \left\|\mathcal{B}\left(E_h - E\right)g_hE_h(f)\right\|_p \\ &\quad + \left\|\mathcal{B}E^0\left(g_hE_h - gE\right)(f)\right\|_p + \left\|\mathcal{B}E^\infty\left(g_hE_h - gE\right)(f)\right\|_p\Big) \end{aligned}$$

Nach Definition von $\mathcal{B}$ gibt es ein $r \geq 4$, so daß

$$\begin{aligned} &\leq\ C_v\Big(\left\|\mathcal{B}\left(E'_h - E'\right)(f)\right\|_p + \left\|\mathcal{B}\left(E_h - E\right)g_hE_h(f)\right\|_p + \left\|\nabla E^0\left(g_hE_h - gE\right)(f)\right\|_{r+\mathrm{o}(1)} \\ &\quad + \left\|E^0\left(g_hE_h - gE\right)(f)\right\|_{\frac{1}{\mathrm{o}(1)}} + \left\|E^\infty\left(g_hE_h - gE\right)(f)\right\|_{p,1}\Big) \end{aligned}$$

Nach *Young* Ungleichung, Dartsellung in Definition 4.1.4 und (4.1.9) und Soboleveinbettung folgt

$$\begin{aligned} &\leq\ C_v\Big(\left\|\mathcal{B}\left(E'_h - E'\right)(f)\right\|_p + \left\|\mathcal{B}\left(E_h - E\right)g_hE_h(f)\right\|_p \\ &\quad + \left\|\left(g_hE_h - gE\right)(f)\right\|_{\frac{4}{3}+\epsilon} + \left\|E^\infty\left(g_hE_h - gE\right)(f)\right\|_{\max\left\{\frac{4}{3}+\epsilon,\frac{3p}{3+p}\right\},2}\Big) \end{aligned}$$

Nach [ShiKo, Lemma 3.3] bzw. Satz 4.2.10 folgt

$$\begin{aligned} &\leq\ C_v\Big(\left\|\mathcal{B}\left(E'_h - E'\right)(f)\right\|_p + \left\|\mathcal{B}\left(E_h - E\right)g_hE_h(f)\right\|_p \\ &\quad + \left\|\left(g_hE_h - gE\right)(f)\right\|_{\frac{4}{3}+\epsilon} + \left\|\left(g_hE_h - gE\right)(f)\right\|_{\max\left\{\frac{4}{3}+\epsilon,\frac{3p}{3+p}\right\}}\Big) \end{aligned}$$

Ist $\max\left\{\frac{4}{3}+\epsilon, \frac{3p}{3+p}\right\} > 4/3+\epsilon$, so wiederhole man obige Schritte mit dem dritten Summand iterativ so oft, bis die Grenze $4/3+\epsilon$ erreicht ist. Dazu sind höchstens noch zwei weitere Schritte notwendig. Es gibt daher endlich viele (höchstens drei) $p_i \in [4/3+\epsilon, p]$ so daß

$$\leq\ C_v \sum_i \Big(\|\mathcal{B}\,(E_h' - E')\,(f)\|_{p_i} + \|\mathcal{B}\,(E_h - E)\,g_h E_h(f)\|_{p_i} + \|(g_h E_h - gE)\,(f)\|_{\frac{4}{3}+\epsilon}\Big)$$

Wegen der Darstellung (4.3.9) $g = -\Gamma\mathcal{B}E$ und mit (4.3.14) ist $g_h E_h - gE = -\Gamma_h \mathcal{B} E_h E_h + \Gamma\mathcal{B}EE = \Gamma\mathcal{B}\,(E_h' - E') - \big(\Gamma_h - \Gamma\big)\mathcal{B}E_h E_h$ und wegen $\Gamma^{-1} = \mathcal{B}E + \mathrm{id}$ ist ähnlich der ersten Umformung in Beweis zu Hilfssatz 4.3.4 $\Gamma_h - \Gamma = \Gamma\mathcal{B}(E_h - E)\Gamma_h$ also

$$\begin{aligned}
&\leq\ C_v \sum_i \Big(\|\mathcal{B}\,(E_h' - E')\,(f)\|_{p_i} + \|\mathcal{B}\,(E_h - E)\,g_h E_h(f)\|_{p_i} \\
&\quad + \|\Gamma\mathcal{B}\,(E_h' - E')\,(f)\|_{\frac{4}{3}+\epsilon} + \big\|\Gamma\mathcal{B}(E_h - E)\,\underbrace{\Gamma_h\mathcal{B}E_h}_{=-g_h} E_h(f)\big\|_{\frac{4}{3}+\epsilon}\Big) \\
&\leq\ C_v \sum_i \Big(\|\mathcal{B}\,(E_h' - E')\,(f)\|_{p_i} + \|\mathcal{B}\,(E_h - E)\,g_h E_h(f)\|_{p_i} \\
&\quad + \|\Gamma\mathcal{B}\,(E_h' - E')\,(f)\|_{\frac{4}{3}+\epsilon} + \big\|\Gamma\mathcal{B}(E_h - E) g_h E_h(f)\big\|_{\frac{4}{3}-\epsilon}\Big)
\end{aligned}$$

(4.3.10) und Darstellung $E = E^0 + E^\infty$ liefern mit veränderten p_i's

$$\leq\ C_{v,\epsilon} \sum_i \Big(\|\mathcal{B}\,(E_h' - E')\,(f)\|_{p_i} + \|\mathcal{B}\,(E_h - E)\,g_h E_h(f)\|_{p_i}\Big)$$

Also

(4.4.11)

$$\begin{aligned}
&\|(g_h E_h - gE)\,(f)\|_p \\
&\qquad \leq\ C_{v,\epsilon} \sum_{\substack{\text{endl. } i \\ p_i \in [\frac{4}{3}+\epsilon, p]}} \Big(\|\mathcal{B}\,(E_h' - E')\,(f)\|_{p_i} + \|\mathcal{B}\,(E_h - E)\,g_h E_h(f)\|_{p_i}\Big) \qquad \forall\, p \geq \frac{4}{3}+\epsilon
\end{aligned}$$

Nun zu den letzten beiden Termen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \|T_{14}\|_{p,2}\, ds\ \leq\ \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{p,2} \int_{-\gamma}^{\gamma} &\|\chi(is)\|_{4+\mathrm{o}(1),2} \\
&\big\|\big(g_{is+ih} E_{v_\infty}(is+ih) - g_{is} E_{v_\infty}(is)\big)(f + g_{is+ih}(f))\big\|_{\frac{4}{3}+\epsilon}\, ds
\end{aligned}$$

Nach (4.1.9) und (4.4.11) ist

$$\begin{aligned}
\leq\ C_{v,\rho,\psi,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \sum_i \Big(&\|\mathcal{B}\,(E_h' - E')\,(f + g_{is+ih}(f))\|_{p_i} \\
&+ \|\mathcal{B}\,(E_h - E)\,g_h E_h(f + g_{is+ih}(f))\|_{p_i}\Big)\, ds
\end{aligned}$$

Analog gilt für T_{15}: Es gibt ein $r = r(p) \in [4, \infty]$ so daß nach [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|T_{15}\|_{p,2}\, ds \;\leq\; \|\rho\|_\infty \|\psi\|_{r,2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \Big\| \big(g_{is+ih} E_{v_\infty}(is+ih) - g_{is} E_{v_\infty}(is)\big)\big(f + g_{is+ih}(f)\big) \Big\|_{\max\left\{\frac{4}{3}+\epsilon, p\right\}} ds$$

Nach (4.4.11) ist

$$\leq\; C_{v,\rho,\psi,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \sum_i \Big(\left\|\mathcal{B}\left(E_h' - E'\right)\left(f + g_{is+ih}(f)\right)\right\|_{p_i} + \left\|\mathcal{B}\left(E_h - E\right) g_h E_h(f + g_{is+ih}(f))\right\|_{p_i} \Big)\, ds$$

Betrachten wir die jeweiligen Summanden einzeln: Zu einem $p_i \geq 4/3 + \epsilon$ gibts nach Definition von $\mathcal{B}$ und Aufteilung von $E = E^0 + E^\infty$ ein $r \geq 4$, so daß

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \left\|\mathcal{B}\left(E_h' - E'\right)\left(f + g_{is+ih}(f)\right)\right\|_{p_i}\, ds$$
$$\leq\; C_v \int_{-\gamma}^{\gamma} \Bigg(\left\| \left(E_h^{\infty\prime} - E^{\infty\prime}\right)\left(f + g_{is+ih}(f)\right)\right\|_{p_i,1} + \left\| \left(E_h^{0\prime} - E^{0\prime}\right)\left(f + g_{is+ih}(f)\right)\right\|_\infty + \left\| \nabla \left(E_h^{0\prime} - E^{0\prime}\right)\left(f + g_{is+ih}(f)\right)\right\|_{r+\mathrm{o}(1)}\, ds \Bigg)$$

Den ersten Term mit [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3] und (4.3.5); die beiden anderen Terme mit *Young* Ungleichung, (4.3.5) und (4.1.19) ergibt schon wegen $4/3 + \epsilon \leq p_i \leq p$

$$\leq\; C_{v,\epsilon} \sqrt{|h|} \|f\|_{1+\epsilon}$$

Der letzte Summand wird ähnlich zu den Termen $T_6, \ldots, T_9$ aufgespaltet und abgeschätzt, genauer gesagt gibt es zu $p_i \geq 4/3 + \epsilon$ nach Definition von $\mathcal{B}$ ein $r_i \geq 4$, so daß

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \left\|\mathcal{B}\left(E_h - E\right) g_h E_h(f + g_{is+ih}(f))\right\|_{p_i}\, ds$$
$$\leq\; C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \nabla \left(E_h^0 - E^0\right) g_h E_h^0 (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{r_i+\mathrm{o}(1)}\, ds$$
$$+\, C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \nabla \left(E_h^0 - E^0\right) g_h E_h^\infty (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{r_i+\mathrm{o}(1)}\, ds$$
$$+\, C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \nabla \left(E_h^\infty - E^\infty\right) g_h E_h^0 (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{r_i+\mathrm{o}(1)}\, ds$$

$$+ C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \nabla \left(E_h^\infty - E^\infty \right) g_h E_h^\infty (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{r_i + \mathrm{o}(1)} \, ds$$

$$+ C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \left(E_h^0 - E^0 \right) g_h E_h^0 (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{\frac{1}{\mathrm{o}(1)}} \, ds$$

$$+ C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \left(E_h^0 - E^0 \right) g_h E_h^\infty (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{\frac{1}{\mathrm{o}(1)}} \, ds$$

$$+ C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \left(E_h^\infty - E^\infty \right) g_h E_h^0 (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{\frac{1}{\mathrm{o}(1)}} \, ds$$

$$+ C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \left(E_h^\infty - E^\infty \right) g_h E_h^\infty (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{\frac{1}{\mathrm{o}(1)}} \, ds$$

$$\leq \; C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \nabla \left(\chi(is+ih) - \chi(is) \right) \right\|_{t + \mathrm{o}(1)} \left\| g_h E_h^0 (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{\frac{4}{3} + \mathrm{o}(1)} \, ds \quad t \geq 2$$

$$+ C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \nabla \left(\chi(is+ih) - \chi(is) \right) \right\|_{r_i + \mathrm{o}(1)} \left\| g_h E_h^\infty (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{1+\epsilon} \, ds$$

$$+ C_{v,\epsilon,\gamma} |h| \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| g_h E_h^0 (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{r_i + \mathrm{o}(1)} \, ds$$

$$+ C_{v,\epsilon,\gamma} |h| \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| g_h E_h^\infty (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{r_i + \mathrm{o}(1)} \, ds$$

$$+ C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \left(\chi(is+ih) - \chi(is) \right) \right\|_{4 - \mathrm{o}(1)} \left\| g_h E_h^0 (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{\frac{4}{3} + \mathrm{o}(1)} \, ds$$

$$+ C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \left(\chi(is+ih) - \chi(is) \right) \right\|_{\frac{1}{\mathrm{o}(1)}} \left\| g_h E_h^\infty (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{1+\epsilon} \, ds$$

$$+ C_{v,\epsilon,\gamma} |h| \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| g_h E_h^0 (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{\frac{1}{\mathrm{o}(1)}} \, ds$$

$$+ C_{v,\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left\| \left(E_h^\infty - E^\infty \right) g_h E_h^\infty (f + g_{is+ih}(f)) \right\|_{q,2} \, ds \quad q < \frac{3}{2} \text{ Soboleveinbettung}$$

$$\leq \; C_{v,\epsilon} \sqrt{|h|} |v_\infty|^{-\frac{1}{2} - \mathrm{o}(1)} \sum_{i \in I} \|f\|_{1+\epsilon} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left(\left\| \nabla \chi(is+ih) \right\|_{s_i} + \right.$$

$$\left. + \left\| \chi(is+ih) \right\|_{\infty} \right) \, ds \quad s_i > 4, \text{ (4.1.15),(4.4.8),(4.3.5)}$$

$$+ C_{v,\epsilon}\sqrt{|h|}\|f\|_{1+\epsilon} \quad \text{(4.1.15),(4.3.5),[ShiKo, L. 3.3], Satz 4.2.10,(4.3.5)}$$
$$+ C_{v,\epsilon,\gamma}|h|\|f\|_{1+\epsilon}\sum_{i\in I}\int_{-\gamma}^{\gamma}\left(\|\nabla\chi(is+ih)\|_{s_i}+\right.$$
$$\left.+\|\chi(is+ih)\|_\infty\right)\,ds \quad s_i>4,\ \text{(4.4.8),(4.3.5)}$$
$$+ C_{v,\epsilon}\sqrt{|h|}\left(\|f\|_{1+\epsilon}+\|f\|_{\max\left\{1+\epsilon,\frac{3p}{3+p}\right\}}\right) \quad \text{(4.3.5),[ShiKo, L. 3.3], Satz 4.2.10,(4.3.5)}$$
$$+ C_{v,\epsilon}\sqrt{|h|}|v_\infty|^{-\frac{1}{2}-\mathrm{o}(1)}\|f\|_{1+\epsilon}\sum_{i\in I}\int_{-\gamma}^{\gamma}\left(\|\nabla\chi(is+ih)\|_{s_i}\right.$$
$$\left.+\|\chi(is+ih)\|_\infty\right)\,ds \quad s_i>4,\ \text{(4.1.15),(4.4.8),(4.3.5)}$$
$$+ C_{v,\epsilon}\sqrt{|h|}|v_\infty|^{-\mathrm{o}(1)}\|f\|_{1+\epsilon} \quad \text{(4.1.15),(4.3.5),[ShiKo, L. 3.3], Satz 4.2.10,(4.3.5)}$$
$$+ C_{v,\epsilon,\gamma}|h|\|f\|_{1+\epsilon}\sum_{i\in I}\int_{-\gamma}^{\gamma}\left(\|\nabla\chi(is+ih)\|_{s_i}\right.$$
$$\left.+\|\chi(is+ih)\|_\infty\right)\,ds \quad s_i>4,\ \text{(4.4.8),(4.3.5)}$$
$$+ C_{v,\epsilon,\gamma}|h|\|f\|_{1+\epsilon} \quad \text{(4.3.5), [ShiKo, Lemma 3.1, 3.3] , (4.3.5)}$$

Und mit (4.1.17) und *Hölder* folgt schließlich

$$\le\ C_{v,\epsilon,\gamma,\psi}\sqrt{|h|}|v_\infty|^{-\frac{1}{2}-\mathrm{o}(1)}\|f\|_{1+\epsilon}$$

Insgesamt folgt also für T_{14} und T_{15}:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\|T_{14}\|_{p,2}+\|T_{15}\|_{p,2}\right)\,ds\ \le\ C_{v,\rho,\psi,\epsilon}\sqrt{|h|}|v_\infty|^{-\frac{1}{2}-\mathrm{o}(1)}\|f\|_{1+\epsilon}$$

Insgesamt gilt für (4.4.6)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{15}\|T_i\|_{p,2}\,ds\le C_{v,p,\rho,\psi,\epsilon}\sqrt{h}|v_\infty|^{-\frac{3}{4}}\left(\|f\|_p+\|f\|_{1+\epsilon}+\|f\|_{1+\mathrm{o}(1)}\right)$$

wobei $\mathrm{o}(1)$ eine Landaufunktion ist mit $\mathrm{o}(1)\to 0$ für $\epsilon>0$ und $\mathrm{o}(1)>0$. Setzen wir $\tilde\epsilon:=\min\{\epsilon,\mathrm{o}(1)\}$ für hinreichend kleines ϵ, so gilt (4.4.6) mit $\tilde\epsilon$ statt ϵ. Erneute Umbenennung von $\tilde\epsilon$ in ϵ zeigt die Behauptung. $\square$

Kapitel 5

Oseen-Gleichung im Außenraum Ω

5.1 Parametrix und Resolventenabschätzung

Mit diesem Kapitel halten wir uns bezüglich der Beweisstruktur dicht an die Vorlage von [ShiKo]. Von Kapitel 4.2 her ist die Existenz einer Lösung der vollen Oseengleichung bekannt. Die für die Resolventenabschätzung fehlenden Eindeutigkeitsaussagen unter gewissen a priori Abschätzungen werden in den nächsten Sätzen behandelt. Im Gegensatz zu [ShiKo] betrachten wir hier die Räume $L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$, statt $L^p_r(\Omega)$. Der kleine Unterschied ist wichtig, da die Projektion $\mathbb{P}_\Omega$ auf den divergenzfreien Teil zwar beschränkt ist, nicht aber beschränkte Träger erhält.

Für das weitere Vorgehen, insbesondere um das Zeitverhalten der Oseenhalbgruppe mit Hilfe der Integraldarstellung zu berechnen, ist das Verhalten der Lösungsoperatoren bei $\lambda \searrow 0$ wichtig. Zu einer gleichmäßigen Integralabschätzung vermöge eines Kompaktuumsschluß führt kein Weg an dem Fall $\lambda = 0$ vorbei. Um zu $f \in L^p_r(\mathbb{R}^3)$ oder zu $f \in L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ tatsächlich $\nabla^2 E^0_0(f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ zu zeigen, würden wir gerne $\|\nabla^2 E^0_0(f)\|_p \leq C\|\nabla^2\chi\|_1 \|f\|_p \leq C\|f\|_p$ vermöge (4.1.9) abschätzen. Leider bekommen wir dabei Probleme mit der *Hausdorff-Young* Ungleichung, die nur Normexponenten von ≥ 2 auf der linken Seite zuläßt. Ein Ausweg wäre $\left|\partial^\alpha_x \chi(x)\right|$ direkt zu berechnen und nicht wie in Satz 4.1.5 mit der Fouriertransformierten. In [ShiKo, Lemma 3.8] wurde genau das getan, allerdings nur für $|\alpha| \leq 1$, so daß sowohl die Abschätzung $\|\nabla^2 E^0(f)\|_p \leq C\|f\|_p$, als auch $\nabla^2 E^0(f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ im Fall $\lambda = 0$ noch zu beweisen sind. Diese Aussagen folgen auch nicht wie in [ShiKo, Lemma 3.4] behauptet aus [Hörmander, Theorem 7.9.5] oder der Variante [ShiKo, Proposition 3.2]. Jedoch bleiben alle weiteren Aussagen bis auf den Fall $\lambda = 0$ gültig. Möchte man jedoch darauf bestehen auch den Fall $\lambda = 0$ unter Kontrolle zu bringen, so kann man wenigstens für $p > 4/3$ vermöge (4.1.4), (4.1.9) und [Friedmann, Theorem 9.3, S. 24] berechnen:

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla^2 E^0(f)\right\|_{\frac{4}{3}+\epsilon} &\leq C_\epsilon \left\|\nabla^4 E^0(f)\right\|^{\frac{1}{2}}_{1+\mathrm{o}(1)} \left\|E^0(f)\right\|^{\frac{1}{2}}_{2+\mathrm{o}(1)} \\
&\leq C_\epsilon \left\|f\right\|^{\frac{1}{2}}_{1+\mathrm{o}(1)} \left\|\chi\right\|^{\frac{1}{2}}_{2+\mathrm{o}(1)} \left\|f\right\|^{\frac{1}{2}}_{1+\mathrm{o}(1)} \\
&\leq C_\epsilon \|f\|_{1+\mathrm{o}(1)}
\end{aligned}$$

Wir möchten die Lösung der Oseengleichung als Kombination von einer Lösung auf beschränkten Gebieten und einer auf ganz $\mathbb{R}^3$ angeben. Dazu ist es notwendig Funktionen einerseits divergenzfrei abzuschneiden und andererseits divergenzfrei fortzusetzen. Eine elegante Methode, die auch schon in [ShiKo] verwendet wurde, ist die mit Hilfe des Lemmas von *Bogovskii*:

Satz 5.1.1 (Bogovskii) *Sei $1 < p < \infty$, $m \geq 0$ eine ganze Zahl und $D \subset R^3$ ein beschränktes Gebiet. Sei $\bar{W}_0^{m,p}(D) := \{f \in W_0^{m,p}(D) | \int_D f(x)\,dx = 0\}$ die Menge der mittelwertfreien Sobolevfunktionen. Dann gibt es ein Operator $\mathbb{B} : \bar{W}_0^{m,p}(D) \to W_0^{m+1,p}(D)^3$ so daß*

$$(5.1.1) \qquad div\,\mathbb{B}(f) = f \text{ in } D \qquad \text{und} \qquad \|\mathbb{B}(f)\|_{p,m+1,D} \leq C_{p,m,D}\|f\|_{p,m,D}$$

Beweis: Siehe [Bog1], [Bog1] oder [GiSo, Lemma 2.1] oder [Galdi1, III.3] oder [Iwa, Proposition 2.6]. □

Der eigentliche Clou bei der Verwendung von Abschneidetechniken ist die folgende Folgerung aus Satz 5.1.1, die schon in [ShiKo] verwendet wurde, dort bewiesen wurde und die ich hier nur zitiere.

Folgerung 5.1.2 *Sei $1 < p < \infty$ und $G = \Omega, \Omega \cap B_r(0)$ oder $\mathbb{R}^3$, wobei r mindestens so groß ist, daß $\partial\Omega \cap \partial B_{r-1}(0) = \emptyset$. Sei $m \geq 1$ eine ganze Zahl, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ eine Abschneidefunktion mit $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leq r-1$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq r$. Ist $u \in W_{\text{loc}}^{m,p}(G)^3$, div $u = 0$ in G und $u = 0$ auf ∂G, dann ist $(\nabla\varphi) \cdot u \in \bar{W}_0^{m,p}(B_r(0) \setminus B_{r-1}(0))$. Insbesondere ist $\mathbb{B}((\nabla\varphi) \cdot u) \in W_0^{m+1,p}\big(B_r(0) \setminus B_{r-1}(0)\big)^3$, div $\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot u\big) = (\nabla\varphi) \cdot u$ und*

$$(5.1.2) \qquad \|\mathbb{B}((\nabla\varphi) \cdot u)\|_{p,m+1,\mathbb{R}^3} \leq C_{p,m,\varphi,r}\|u\|_{p,m,B_r(0)\setminus B_{r-1}(0)}$$

Ist $u \in W_{\text{loc}}^{m,p}(\Omega)^3$, div $u = 0$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$, dann existiert ein $w \in W_{\text{loc}}^{m,p}(\mathbb{R}^3)^3$ mit $u = w$ in Ω und div $w = 0$ in $\mathbb{R}^3$. Ist darüberhinaus $u \in W^{m,p}(\Omega)^3$, dann ist auch $w \in W^{m,p}(\mathbb{R}^3)^3$ und es ist $\|w\|_{p,m,\mathbb{R}^3} \leq C_{p,m}\|u\|_{p,m,\Omega}$

Beweis: Siehe [ShiKo, Proposition 2.4]. Dort verwendet: *Poincaré* Ungleichung, Lemma von Bogovskii und Divergenztheorem. □

Kommen wir nun zur Konstruktion einer Lösung von Oseen auf Ω. Es sei hier noch einmal an die Bezeichnungen in Kapitel 3 und 4.2 erinnert, insbesondere an die beiden Lösungsoperatoren auf beschränkten Gebieten $\mathbb{L}(\lambda, f, c)$ für die Geschwindigkeit , $\mathcal{I}(\lambda, f, c)$ für den Druck und an die beiden Lösungsoperatoren auf unbeschränkten Gebieten $E_{v_\infty,v,\lambda}$ bzw. $E_{v_\infty,\lambda}$ für die Geschwindigkeit , Π bzw. Π_v für den Druck.

Satz 5.1.3 (Parametrix) *Sei $1 < p < \infty, \epsilon > 0$ hinreichend klein, $v_\infty \neq 0$, $f \in L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ und $K \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0, \lambda \neq 0\}$ eine kompakte Menge. Bezeichne f_o die*

Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}^3$ *von* f *mit* 0. *Sei* $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ *wieder eine Abschneidefunktion mit* $\varphi(x) = 1$ *für* $|x| \leq r-2$ *und* $\varphi(x) = 0$ *für* $|x| \geq r-1$ *und* $c = c(f) := \int_{B_r(0)} \Pi_v(f_0)(x)\,dx$. *Definiere*

$$\begin{aligned} \Phi_{v_\infty,\lambda}(f) &:= (1-\varphi)E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0) + \varphi\mathbb{L}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c) \\ &\quad + \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0)\big) - \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot\mathbb{L}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c)\big) \\ \mathcal{P}_{v_\infty,\lambda}(f) &:= (1-\varphi)\Pi_v(f_0) + \varphi\mathcal{I}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c) \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Dann gilt für $1 < q \leq p$

(5.1.4)
$$\|\Phi_{v_\infty,\lambda}(f)\|_{q,2} \leq C_{q,p,r,\varphi,K}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} + c\big), \quad \|\nabla\mathcal{P}_{v_\infty,\lambda}(f)\|_q \leq C_{q,p,r}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

$$\big(-\Delta + (v_\infty\cdot\nabla) + \lambda + \mathcal{B}\big)\Phi_{v_\infty,\lambda}(f) + \nabla\mathcal{P}_{v_\infty,\lambda}(f) = f + \Psi_{v_\infty,\lambda}(f) \ \textit{ in } \Omega \tag{5.1.5}$$

$$\textit{div}\,\Phi_{v_\infty,\lambda}(f) = 0 \ \textit{ in } \Omega \textit{ und } \Phi_{v_\infty,\lambda}(f) = 0 \textit{ auf } \partial\Omega \tag{5.1.6}$$

$$\int\limits_{\Omega_r} \mathcal{I}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c)(x)\,dx = \int\limits_{B_r(0)} \Pi_v(f_0)(x)\,dx = c \tag{5.1.7}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Psi_{v_\infty,\lambda}(f) \ = \ & \\ & 2(\nabla\varphi)\cdot\nabla E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0) + (\Delta\varphi)E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0) - \big((v_\infty\cdot\nabla)\varphi\big)E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0) \\ & - 2(\nabla\varphi)\cdot\nabla\mathbb{L}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c) - (\Delta\varphi)\mathbb{L}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c) + \big((v_\infty\cdot\nabla)\varphi\big)\mathbb{L}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c) \\ & + \big(-\Delta + (v_\infty\cdot\nabla) + \lambda + \mathcal{B}\big)\Big(\mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0)\big) - \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot\mathbb{L}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c)\big)\Big) \\ & - (\nabla\varphi)\Pi_v(f_0) + (\nabla\varphi)\mathcal{I}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c) \\ & + (\nabla\varphi)\cdot\big(v\otimes E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0) - v\otimes\mathbb{L}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c) + E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0)\otimes v - \mathbb{L}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c)\otimes v\big) \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

und $\Psi_{v_\infty,\lambda}(f) \in W_0^{1,p}\big(B_{r-1}(0)\setminus B_{r-2}(0)\big)$ *ist ein kompakter Operator von* $L^p(\Omega)\cap L^{1+\epsilon}(\Omega) \to L^p(\Omega)\cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ *für* $\lambda \in K$.

Bemerkung: Beachte, daß sowohl die Darstellungen (5.1.5),. . ., (5.1.8), als auch die Aussage zum Druck in (5.1.4) für $\lambda = 0$ gültig bleiben. Nur die Regularität $\Phi_{v_\infty,\lambda}(f) \in W^{2,q}(\Omega)$ geht für $\lambda = 0$ verloren.

Der Operator $\Psi_{v_\infty,\lambda}(f)$ ist in der Tat nicht gerade übersichtlich, aber da stets Ableitungen von φ vor den Summanden stehen, hat er kompakten Träger. Wir wollen später die Lösung der vollen Oseen-Gleichung als $(\mathbb{O}+\lambda)(f) = \Phi_\lambda(\mathbb{I}+\Psi_\lambda)^{-1}(f)$ schreiben. Dazu wird es notwendig sein die Invertierbarkeit von $\mathbb{I}+\Psi_\lambda$ zu zeigen.

Beweis: Verzichten wir für die Dauer dieses Beweises auf unnötige Indizes; so sei kurz $E = E_{v_\infty}$, also $E_{v_\infty,v}(f_0) = E(f + g(f))$ und der Operator gibt vor, ob es sich um eine Einschränkung oder eine Fortsetzung handelt.

Daß $\Psi(f) \in W_0^{1,p}\big(B_{r-1}(0)\setminus B_{r-2}(0)\big)$ auch für $\lambda = 0$ ist, folgt offensichtlich aus (4.1.9), Satz 5.1.2, (4.2.12), Satz 3.0.13 und (4.3.5). Da für beschränktes $D \subset \mathbb{R}^3$ nach dem Theorem von

Rellich-Kondrachov [Adams, Theorem 6.2, S.: 144] die Einbettung $W^{1,p}(D) \subset\subset L^p(D)$ kompakt ist, ist der Operator $\Psi : L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ kompakt.

Machen wir weiter mit (5.1.7): Nach Definition von Π (siehe Satz 4.2.2 und [ShiKo, (3.4) S.: 13]) ist nach Satz 4.2.9 $\|\nabla\Pi(f_0)\|_p \leq C\|f\|_p$, daher ist nach (4.3.5) für $f \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}\|\nabla\Pi_v(f_0)\|_p &= \|\nabla\Pi(f_0 + g(f_0))\|_p \leq C\big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\\ &\leq C\Big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_{\max\{1+\epsilon, \frac{3p}{3+p}\}}\Big) \leq C\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)\end{aligned}$$

d.h. $\Pi_v(f_0) \in \hat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Daher ist die Konstante $c = c(f)$ wegen des beschränkten Integrationsbereichs wohldefiniert und Gleichung (5.1.7) ergibt sich direkt aus Satz 3.0.13 aus der Definition von c.

Sei $\epsilon < p - 1$ hinreichend klein und $1 < q \leq p$.

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0)\big) - \mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot \mathbb{L}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c)\big)\Big\|_{q,1}\\ &\leq\ \Big\|\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot E^0(f+g)\big)\Big\|_{q,1} + \Big\|\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot E^\infty(f+g)\big)\Big\|_{q,1} + \Big\|\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot \mathbb{L}(f)\big)\Big\|_{q,1}\end{aligned}$$

Nach dem Lemma von *Bogovskii* (5.1.1)

$$\leq\ C_q\Big(\Big\|(\nabla\varphi) \cdot E^0(f+g)\Big\|_q + \Big\|\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot E^\infty(f+g)\big)\Big\|_{q,1} + \Big\|\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot \mathbb{L}(f)\big)\Big\|_{q,1}\Big)$$

Hölder, *Young* Ungleichung, Darstellung $E^0 f = \chi * f$ und wieder Lemma von *Bogovskii* (5.1.1)

$$\leq\ C_q\Big(\|\nabla\varphi\|_q\|\chi\|_{\frac{1}{o(1)}}\|f+g\|_{1+\epsilon} + \|\nabla\varphi\|_\infty\|E^\infty(f+g)\|_q + \|\nabla\varphi\|_\infty\|\mathbb{L}(f)\|_q\Big)$$

(4.1.9), [ShiKo, Lemma 3.3], Satz 3.0.13 (3.0.5) und (4.3.5)

$$\begin{aligned}&\leq\ C_q\Big(\|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_{\max\{1+\epsilon, \frac{3q}{3+q}\}} + |c|\Big)\\ &\leq\ C_{q,p,r}\Big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}|c|\Big)\end{aligned}$$

Analog zu dieser Rechnung ergibt sich mit $1 < q \leq p$

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0)\big) - \mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot \mathbb{L}(\lambda, f|_{\Omega_r}, c)\big)\Big\|_{q,2}\\ &\leq\ \Big\|\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot E^0(f+g)\big)\Big\|_{q,2} + \Big\|\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot E^\infty(f+g)\big)\Big\|_{q,2} + \Big\|\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot \mathbb{L}(f)\big)\Big\|_{q,2}\\ &\leq\ C_q\Big(\Big\|(\nabla\varphi) \cdot E^0(f+g)\Big\|_{q,1} + \Big\|\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot E^\infty(f+g)\big)\Big\|_{q,1} + \Big\|\mathbb{B}\big((\nabla\varphi) \cdot \mathbb{L}(f)\big)\Big\|_{q,1}\Big)\\ &\leq\ C_q\Big(\|\varphi\|_{q,2}\|\chi\|_{\frac{1}{o(1)},1}\|f+g\|_{1+\epsilon} + \|\nabla\varphi\|_\infty\|E^\infty(f+g)\|_{q,1} + \|\nabla\varphi\|_\infty\|\mathbb{L}(f)\|_{q,1}\Big)\\ &\leq\ C_q\Big(\|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_q + \|g\|_q + |c|\Big)\\ &\leq\ C_q\Big(\|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_q + \|f\|_{\max\{1+\epsilon, \frac{3q}{3+q}\}} + |c|\Big)\\ &\leq\ C_{q,r}\Big(\|f\|_q + \|f\|_{1+\epsilon} + |c|\Big)\\ &\leq\ C_{q,p,r}\Big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} + |c|\Big)\end{aligned}$$

Damit folgt aus Satz 4.2.10 (4.2.14) und Satz 3.0.13 (3.0.3):

$$\begin{aligned}
\|\Phi(f)\|_{q,2} &\leq C_{q,p,r}\Big(\|1-\varphi\|_{\infty,2}\|E(f+g(f))\|_{q,2} + \|\varphi\|_{q,2}\|\mathbb{L}(f)\|_{q,2} + \|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} + |c|\Big)\\
&\leq C_{q,p,r,\varphi,K}\Big(\|f\|_q + \|g(f)\|_q + \|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} + |c|\Big)\\
&\leq C_{q,p,r,\varphi,K}\Big(\|f\|_{1+\epsilon} + \|f\|_q + \|f\|_{\max\left\{1+\epsilon,\frac{3q}{3+q}\right\}} + \|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} + |c|\Big)\\
&\leq C_{q,p,r,\varphi,K}\Big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} + |c|\Big)
\end{aligned}$$

Daß $\mathcal{P}_{v_\infty,\lambda}(f) \in \hat{W}^{q,1}(\Omega)$ liegt, folgt unmittelbar aus Satz 3.0.13 und Satz 4.2.9 (4.2.10)

$$\|\nabla\mathcal{P}_{v_\infty,\lambda}(f)\|_q \leq C_{q,r}\|f\|_q \leq C_{q,p,r}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

Das zeigt (5.1.4).

(5.1.6) ist offensichtlich: Die Terme mit dem *Bogovskii* Operator sind gerade so gewählt worden, daß die Divergenz verschwindet. Am Gebietsrand $\partial\Omega$ verschwinden wegen der Definition von φ sowohl der Term mit dem Ganzraumoperator E, als auch die Terme mit dem *Bogovskii* Operator. Letztere haben sogar kompakten Träger in $\{r-2 \leq |x| \leq r-1\}$.

Bleibt (5.1.5) und (5.1.8) zu zeigen: Sei kurz $E_v = E_{v_\infty,v,\lambda}$. Benutzen wir u.a. die Formel $\Delta(fg) = 2\nabla f\cdot\nabla g + f\Delta g + g\Delta f$ um geradewegs zu berechnen:

$$\begin{aligned}
-\Delta(1-\varphi)E_v(f) &= 2\nabla\varphi\cdot\nabla E_v(f) + (\Delta\varphi)E_v(f) && + (1-\varphi)(-\Delta)E_v(f)\\
(v_\infty\cdot\nabla)(1-\varphi)E_v(f) &= -\big((v_\infty\cdot\nabla)\varphi\big)E_v(f) && + (1-\varphi)(v_\infty\cdot\nabla)E_v(f)\\
\lambda(1-\varphi)E_v(f) &= && + (1-\varphi)\lambda E_v(f)\\
\mathcal{B}(1-\varphi)E_v(f) &= -(\nabla\varphi)\big(v\otimes E_v f + E_v f\otimes v\big) && + (1-\varphi)\mathcal{B}E_v(f)\\
\nabla(1-\varphi)\Pi_v(f) &= -(\nabla\varphi)\Pi_v(f) && + (1-\varphi)\nabla\Pi_v(f)\\
-\Delta\varphi\mathbb{L}(f) &= -2\nabla\varphi\cdot\nabla\mathbb{L}(f) - (\Delta\varphi)\mathbb{L}(f) && + \varphi(-\Delta)\mathbb{L}(f)\\
(v_\infty\cdot\nabla)\varphi\mathbb{L}(f) &= \big((v_\infty\cdot\nabla)\varphi\big)\mathbb{L}(f) && + \varphi(v_\infty\cdot\nabla)\mathbb{L}(f)\\
\lambda\varphi\mathbb{L}(f) &= && + \varphi\lambda\mathbb{L}(f)\\
\mathcal{B}\varphi\mathbb{L}(f) &= (\nabla\varphi)\big(v\otimes\mathbb{L}(f) + \mathbb{L}(f)\otimes v\big) && + \varphi\mathcal{B}\mathbb{L}(f)\\
\nabla\varphi\mathcal{I}(f) &= (\nabla\varphi)\mathcal{I}(f) && + \varphi\nabla\mathcal{I}(f)
\end{aligned}$$

Die linken und rechten Seiten jeweils aufsummiert ergibt

$$\begin{aligned}
&\big(-\Delta + (v_\infty\cdot\nabla) + \lambda + \mathcal{B}\big)\Phi(f)\\
&\qquad +\nabla\mathcal{P}(f) = \Psi(f) \qquad\qquad + f
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 5.1.4 (Eindeutigkeit) *Sei* $1 < p < \infty$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ *und Reynoldszahl* $\mathrm{Re_E} < 1$. *Erfülle* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *und* $p \in \hat{W}^{1,p}(\Omega)$ *die homogene Gleichung*

$$\begin{aligned} \big(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \lambda + \mathcal{B}\big)u + \nabla p &= 0 \quad \textit{in } \Omega \\ \textit{div}\, u &= 0 \quad \textit{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Dann ist $u \equiv 0$ *und* p *konstant.*

Bemerkung: In [ShiKo, Lemma 4.1] wird nur $u \in \hat{W}^{2,p}$ und geeignete Wachstumsbedingungen an u verlangt. Jedoch wird dieser Satz nur für $\lambda \neq 0$ oder für Funktionen vom Typ $u = \Phi(f)$, $f \in L^p_r(\Omega)$ mit zusätzlichen Annahmen verwendet. In beiden Fällen kann man $u \in W^{2,p}$ leicht zeigen. Der Beweis von [ShiKo, Lemma 4.1] gebraucht außerdem die Tatsache, daß $E_{\lambda=0}(f) \in \hat{W}^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ liegt, was aber noch zu beweisen ist, da diese Aussage nicht wie in [ShiKo, Lemma 3.4] behauptet aus [Hörmander, Theorem 7.9.5] oder der Variante [ShiKo, Proposition 3.2] folgt. Mit unserem Satz 4.3.1 (4.3.1) folgt dies zumindest für $p \geq 2$. Das aber genügt schon, um [ShiKo, Lemma 4.1] zu zeigen.

Beweis: Sei $D \subset \Omega$ ein beschränktes Gebiet. $u \in W^{2,p}(D)$ löst (5.1.9), d.h.

$$-\Delta u + \nabla p = -\big(v_\infty \cdot \nabla + \lambda + \mathcal{B}\big)u \ \in W^{m_i,p}(D)$$

und nach Satz 2.0.7 ist $u \in W^{m_i+2,p}(D)$ und $p \in W^{m_i+1,p}(D)$. Wegen $m_0 = 1$ und Induktion folgt $p,\ u \in W^{l,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\forall l \in \mathbb{N}$.

Nach Folgerung 5.1.2 gibt es zu $u \in W^{2,p}(\Omega)$ und $p \in \hat{W}^{1,p}(\Omega)$ ein $\eta \in W^{2,p}(\mathbb{R}^3) \cap W^{l,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ und $q \in \hat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W^{l,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ mit $\mathrm{div}\,\eta = 0$ und $\eta|_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega} = u$ bzw. $q|_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega} = p$.

Setze $f := \big(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \lambda + \mathcal{B}\big)\eta + \nabla q$. Offensichtlich hat f kompakten Träger in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ und deshalb ist $f \in W^{l,q}(\mathbb{R}^3)$, $\forall l \in \mathbb{N}, q \geq 1$, was für $q > p$ aus der *Sobolev* Einbettung folgt.

Behauptung: Für ein hinreichend kleines $\delta = \delta(p)$ ist

$$w := E(f) - E\mathcal{B}(\eta) \in \hat{W}^{2,2}(\mathbb{R}^3) \cap \hat{W}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{4-\delta}(\mathbb{R}^3),\ \Pi\big(f - \mathcal{B}(\eta)\big) \in L^2(\mathbb{R}^3) \tag{5.1.10}$$

$$\exists (n_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \ : \ \lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i} \int\limits_{G_{n_i}} |w(x)|^2 \, dx = 0, \qquad G_{n_i} = \{n_i \leq |x| \leq 2n_i\} \tag{5.1.11}$$

$$\|\mathcal{B}(\eta)\|_2 \in L^2(\mathbb{R}^3) \tag{5.1.12}$$

Beweis dazu: Sei $\alpha \in \mathbb{N}^3$ ein Multiindex mit $1 \leq |\alpha| \leq 2$

$$\begin{aligned} \|\partial_x^\alpha E(f)\|_2 &\leq \|\partial_x^\alpha E^0(f)\|_2 + \|\partial_x^\alpha E^\infty(f)\|_2 \leq C\left(\|\partial_x^\alpha \chi\|_2 \|f\|_1 + \|f\|_2\right) < \infty \\ \|E(f)\|_{4-\delta} &\leq \|E^0(f)\|_{4-\delta} + \|E^\infty(f)\|_{4-\delta} \leq C\left(\|\chi\|_{4-\delta}\|f\|_1 + \|f\|_{4-\delta}\right) < \infty \end{aligned}$$

Die j-te Komponente von $\mathcal{B}(\eta)$ ist definiert durch

$$\big(\mathcal{B}(\eta)\big)_j = \sum_{i=1}^{3} c_i \partial_x^{\alpha_i} \left(v_i \eta_j + \eta_i v_j\right)$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{N}$ einem Multiindex mit $|\alpha_i| = 1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\left(E^0\mathcal{B}(\eta)\right)_k &= \sum_{j=1}^{3} \chi_{kj} * \left(\mathcal{B}(\eta)\right)_j \\
&= \sum_{j=1}^{3} \chi_{kj} * \sum_{i=1}^{3} c_i \partial_x^{\alpha_i} \left(v_i\eta_j + \eta_i v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \chi_{kj} * \left(c_i \partial_x^{\alpha_i} \left(v_i\eta_j + \eta_i v_j\right)\right) \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \\ |\alpha_i|=1}}^{3} c_i \left(\partial_x^{\alpha_i} \chi_{kj}\right) * \left(v_i\eta_j + \eta_i v_j\right)
\end{aligned}$$

und mit $\xi_j = \xi^{\alpha_j}$

$$\begin{aligned}
\Pi\mathcal{B}(\eta) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\xi_k \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{3} c_j \partial_\xi^{\alpha_j} (v_k\eta_j + \eta_k v_j)\right)}{i|\xi|^2} \right) \\
&= \sum_{k,j=1}^{3} c_j \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi_k \xi^{\alpha_j} \mathcal{F}\left((v_k\eta_j + \eta_k v_j)\right)}{|\xi|^2}\right) \\
&= \sum_{k,j=1}^{3} c_j \partial_x^{\alpha_j} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi_k \mathcal{F}\left((v_k\eta_j + \eta_k v_j)\right)}{i|\xi|^2}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} c_j \partial_x^{\alpha_j} \Pi(\eta_j v + v_j \eta)
\end{aligned}$$

Also gilt allgemein für jedes $q \in [2, \infty]$ nach *Hausdorff-Young* und *Hölder* Ungleichung wegen $\|\partial_x^\alpha E^0\mathcal{B}(\eta)\|_q^{q'} \leq C_q \|\mathcal{F}\left(\partial_x^\alpha E^0\mathcal{B}(\eta)\right)\|_{q'}^{q'} \leq C_q \sum_{i,j,k=1}^{3} \|\mathcal{F}\left(\partial_x^\alpha \partial_i \chi_{kj}\right) \mathcal{F}\left(v_i\eta_j + \eta_i v_j\right)\|_{q'}^{q'}$ mit einem Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^3$

(5.1.13)

$$\left\|\nabla^i E^0\mathcal{B}(\eta)\right\|_q \leq C_{q,r,s,p} \|F(\nabla^{i+1}\chi)\|_{r'} \|v\|_s \|\eta\|_p \quad \forall\, 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{p},\ q \geq 2,\ \frac{1}{s} + \frac{1}{p} \geq \frac{1}{2}$$

wobei $1 = 1/r + 1/r'$, $i \geq 0$ und $\operatorname{div} \eta = 0$. Und wegen Satz 4.2.9 (4.2.10) ist $\|\Pi\mathcal{B}(\eta)\|_q^q \leq \sum_{j=1}^{3} \|\nabla\Pi(\eta_j v + v_j\eta)\|_q^q \leq C_q \|\eta_j v + v_j \eta\|_q^q \leq C_{q,p,s} \|v\|_s^q \|\eta\|_p^q$ wobei $1/q = 1/p + 1/s$, also

$$\|\Pi\mathcal{B}(\eta)\|_q \leq C_{q,p,s} \|v\|_s \|\eta\|_p \qquad \forall\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} \tag{5.1.14}$$

Sei $\epsilon < 1/p'$ hinreichend klein. Wenden wir (5.1.13) auf unser η und $i = 1, 2$, $q = 2$, $r = p'/(1 + p'\epsilon) \iff 1/r = 1/p' + \epsilon$ und $s = 2/(1 - 2\epsilon) > 2$ an. Dann ist nach (4.1.9)

$$\left\|\nabla^i E^0\mathcal{B}(\eta)\right\|_2 \leq C_p \|\eta\|_p \iff E^0\mathcal{B}(\eta) \in \hat{W}^{2,2}(\mathbb{R}^3) \cap \hat{W}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$$

Außerdem existiert zu $1 < p < \infty$ ein $\delta(p)$ und Funktionen $\mathrm{O}(\delta)$ mit $\mathrm{O}(\delta) \to 0$, falls $\delta \to 0$ und o.B. $\mathrm{O}(\delta) \geq 0$ und $\mathrm{O}(\delta) = 0 \iff \delta = 0$, so daß $1 + 1/(4-\delta) = 3/(4+\mathrm{O}(\delta)) + 1/(2+\mathrm{O}(\delta)) + 1/p$ und $1/(2+\mathrm{O}(\delta)) + 1/p \geq 1/2$, d.h.

$$\left\|E^0\mathcal{B}(\eta)\right\|_{4-\delta} \leq C\|\nabla\chi\|_{\frac{4}{3}+\mathrm{O}(\delta)}\|v\|_{2+\mathrm{O}(\delta)}\|\eta\|_p \leq C_p\|\eta\|_p < \infty$$

Nach Konstruktion ist $\eta \in W^{2,p}(\mathbb{R}^3) \cap W^{l,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \supset W^{2,p}(\mathbb{R}^3) \cap W^{\tilde{l},q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \supset W^{2,q}(\mathbb{R}^3)$, $\forall q \geq p$ mit hinreichend großem $l, \tilde{l} \in \mathbb{N}$, also

$$\begin{aligned} \|E^\infty\mathcal{B}(\eta)\|_{2,2} &\leq \|\mathcal{B}(\eta)\|_2 \leq C_v\,\|\eta\|_{p,1} < \infty \qquad && p \geq 2 \\ \|E^\infty\mathcal{B}(\eta)\|_{2,2} &\leq \|\mathcal{B}(\eta)\|_2 \leq C_v\,\|\eta\|_{2,1} < \infty \qquad && p < 2 \end{aligned}$$

Es ist nach (5.1.14) und (4.2.11)

$$\|\Pi(f-\mathcal{B}(\eta))\|_2 \leq C\big(\|\Pi(f)\|_2 + \|\Pi\mathcal{B}(\eta)\|_2\big) \leq C\big(\|f\|_1 + \|v\|_{4+\mathrm{O}(\delta)}\|\eta\|_{4-\delta}\big) < \infty$$

Damit ist (5.1.10) und (5.1.12) gezeigt. Für ein $a \in L^p$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \int_{G_{2^n}} |a(x)|^p\,dx$. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_i} \leq (n_i)^{-1}$ andernfalls

$$C = \int_{\mathbb{R}^3} |a(x)|^p\,dx \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{G_{2^n}} |a(x)|^p\,dx \ = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-1} = \infty$$

Widerspruch! Sei $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ diese Teilfolge zu $w \in L^{4-\delta}$. Dann gilt nach *Hölder*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_i}\int\limits_{G_{n_i}} |w(x)|^2\,dx &\leq \frac{1}{n_i}\left(\int\limits_{G_{n_i}} 1\,dx\right)^{\frac{1}{2}-\mathrm{O}(\delta)} \left(\int\limits_{G_{n_i}} |w(x)|^{4-\delta}\,dx\right)^{\frac{1}{2}+\mathrm{O}(\delta)} \\ &\leq {n_i}^{-1}\,|G_{n_i}|^{\frac{1}{2}-\mathrm{O}(\delta)}\,{n_i}^{-\frac{1}{2}-\mathrm{O}(\delta)} \\ &= C{n_i}^{-\mathrm{O}(\delta)} \\ &\longrightarrow 0 \quad (i \to 0) \end{aligned}$$

was (5.1.11) zeigt.

Nach Definition von w und v ist

$$\begin{aligned} & \big(-\Delta + v_\infty\cdot\nabla + \lambda\big)w + \nabla\Pi\big(f-\mathcal{B}(\eta)\big) = f - \mathcal{B}(\eta) = \big(-\Delta + v_\infty\cdot\nabla+\lambda\big)\eta + \nabla q \\ \Rightarrow\quad & \big(-\Delta + v_\infty\cdot\nabla + \lambda\big)z + \nabla k = 0,\ \text{div}\, z = 0,\ \text{wobei } z = w - \eta,\ k = \Pi\big(f-\mathcal{B}(\eta)\big) - q \\ \Rightarrow\quad & q_\lambda(\xi)\hat{z} + i\xi\hat{k} = 0,\ i\xi\cdot\hat{z} = 0,\ \text{ wobei } q_\lambda(\xi) = -|\xi|^2 + iv_\infty\cdot\xi + \lambda \\ \Rightarrow\quad & 0 = i\xi\cdot\hat{z} = i\xi\cdot\left(-i\xi\frac{\hat{k}}{q_\lambda(\xi)}\right) = |\xi|^2\frac{\hat{k}}{q_\lambda(\xi)} \quad \forall\,\xi\neq 0,\ \mathrm{Re}(\lambda)\geq 0 \end{aligned}$$

Da nach Hilfssatz 4.2.1 $q_\lambda(\xi) \neq 0$ für $\xi \neq 0$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, ist $\hat{k} \neq 0$ höchstens in $\xi = 0$ und somit auch $\hat{z} = -i\xi\hat{k}/q_\lambda(\xi) \neq 0$ höchstens in $\xi = 0$. Nach dem Strukturtheorem [Hörmander, Theorem 2.3.4] über Distributionen ist $z(x)$ ein Vektor von Polynomen und auch $k(x)$ ist ein Polynom und da aber $w \in L^{4-\delta}(\mathbb{R}^3)$, $v \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $\nabla\Pi\big(f - \mathcal{B}(\eta)\big) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $\nabla q \in L^p(\mathbb{R}^3)$, folgt $z = \nabla k = 0$.

Das bedeutet $u|_\Omega = v = w \in \hat{W}^{2,2}(\mathbb{R}^3) \cap \hat{W}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{4-\delta}(\mathbb{R}^3)$, $p|_\Omega + c = q + c = \Pi\big(f - \mathcal{B}(\eta)\big) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und es gilt die Wachstumsbedingung (5.1.11). Sei $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$ eine Abschneidefunktion mit $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $\psi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$ und sei $\psi_i(x) = \psi(x/n_i)$. Wir testen die Gleichung $\big(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \lambda + \mathcal{B}\big)u + \nabla p = 0$ mit $\psi_i u$. Partielle Integration und die Tatsache, daß div $u = 0$ ergibt

$$\begin{aligned}
0 =& < \psi_i u, \big(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \lambda + \mathcal{B}\big)u + \nabla p > \\
=& < \psi_i \nabla u, \nabla u > + {n_i}^{-1} \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega (\partial_j \psi)(x/n_i)\,\big((\partial_j u(x)\big) \cdot \overline{u(x)}\, dx \\
&- \frac{{n_i}^{-1}}{2} \int_\Omega \big((v_\infty \cdot \nabla)\psi\big)(x/n_i)|u(x)|^2\, dx + i\,\mathrm{Im} < \psi_i (v_\infty \cdot \nabla)u, u > \\
&+ \lambda < \psi_i u, u > + \mathrm{Re} < \psi_i u, \mathcal{B}u > - < u\big((u \cdot \nabla)\psi_i\big), v > \\
&- \frac{{n_i}^{-1}}{2} \int_\Omega \big((v \cdot \nabla)\psi\big)(x/n_i)|u(x)|^2\, dx + i\,\mathrm{Im} < \psi_i u, \mathcal{B}u > \\
&- {n_i}^{-1} \int_\Omega (\nabla\psi)(x/n_i) \cdot \overline{u(x)}(p(x) + c)\, dx
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun nur noch den Realteil dieser Gleichung und schätzen vermöge $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ ab. Wegen der Definition der Reynoldszahl ist $< \psi_i u, \mathcal{B}u > = < u, \mathcal{B}u > - < (1 - \psi_i)u, \mathcal{B}u > \geq -\,\mathrm{Re}_\mathrm{E} \|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla u\|_{2,\mathbb{R}^3 \setminus B_{n_i+1}} \|u\|_{6,\mathbb{R}^3 \setminus B_{n_i+1}} \|v\|_{3,\mathbb{R}^3 \setminus B_{n_i+1}} + \|u\|^2_{6,\mathbb{R}^3 \setminus B_{n_i+1}} \|\nabla v\|_{3/2,\mathbb{R}^3 \setminus B_{n_i+1}} \geq -(\mathrm{Re}_\mathrm{E} + o(1/n_i))\|\nabla u\|_2^2$ und somit

$$0 \geq \|\nabla u\|_2^2 + C{n_i}^{-1}\big(\|\nabla u\|_2 + \|v\|_\infty + \|p + c\|_2\big) \int_{G_{n_i}} |u(x)|^2\, dx - (\mathrm{Re}_\mathrm{E} + o(1/n_i))\|\nabla u\|_2^2$$

Wegen der Wachstumsbedingung (5.1.11) und da die Reynoldszahl echt kleiner 1 sein soll, folgt nach dem Grenzübergang $(i \to \infty)$

$$0 \geq \|\nabla u\|_2^2$$

Das impliziert $u \equiv 0$ und daher wegen (5.1.9) auch $\nabla p \equiv 0$.

$\square$

Hilfssatz 5.1.5 *Sei $1 < p < \infty$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, $\epsilon > 0$ hinreichend klein und $\Psi_{v_\infty,\lambda}$ wie in Satz 5.1.3 definiert. Sei $X := L^p_r(\Omega)$ mit Norm $\|.\|_X = \|.\|_p$ oder $X := L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ mit Norm $\|.\|_X = \|.\|_p + \|.\|_{1+\epsilon}$. Dann besitzt der Operator $\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I} : X \longrightarrow X$ eine beschränkte Inverse $(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}$.*

Beweis: Fast wortwörtlich wie [ShiKo, Lemma 4.2]

Die Wohldefiniertheit, d.h., daß $\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I}$ Abbildung der angegebenen Räume ist, ist wegen *Hölder* offensichtlich, da $\Psi_{v_\infty,\lambda}$ beschränkten Träger hat.

Wie in Satz 5.1.3 gezeigt, ist $\Psi_{v_\infty,\lambda}$ ein kompakter Operator. Nach der *Fredholm'schen Alternative* genügt es daher die Injektivität von $\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I}$ zu zeigen. Wegen $L^p_r(\Omega) \subset L^p(\Omega)\cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$, genügt es die Injektivität für $X := L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ zu zeigen.

Sei also $f \in L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$, so daß $(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})f = 0$.

Da $f = -\Psi_{v_\infty,\lambda}(f) \in W^{1,p}_0(\mathcal{B}_{r-1}(0) \setminus \mathcal{B}_{r-2}(0))$, insbesondere auch kompakten Träger hat, folgt nach Iteration $f \in L^q_r(\Omega)$ für alle $1 \leq q < \infty$. Unabhängig von λ, insbesondere auch für $\lambda = 0$, folgt nach (4.1.9) und (4.3.5) $E^0(f_0 + g_\lambda(f_0)) \in W^{2,q}(\Omega)$ für $q > 2$, nach [ShiKo, Lemma 3.3] bzw. Satz 4.2.10 $E^\infty(f_0 + g_\lambda(f_0)) \in W^{2,q}(\Omega)$ für $q > 1$, nach Satz 3.0.13 $\mathbb{L}(f) \in W^{2,q}(\Omega)$ für $q > 1$ und nach Folgerung 5.1.2 (5.1.2) ist $\mathbb{B}\big((\nabla\varphi)(E(f) - \mathbb{L}(f))\big) \in W^{2,q}(\Omega)$ für $q > 1$. Nach Satz 4.2.9 (4.2.11), (4.2.10) und Gleichung (4.3.5) ist $\Pi(f+g(f)) \in W^{1,q}(\Omega)$ für $q > 2$ und nach Satz 3.0.13 ist $\mathcal{I}(f) \in W^{1,q}(\Omega)$ für $q > 1$.

Fixieren wir ein solches $q > 2$, etwa $p_0 > 2$.

Das bedeutet, daß $u := \Phi_{v_\infty,\lambda}(f) \in W^{2,p_0}(\Omega)$ und $p := \mathcal{P}_{v_\infty,\lambda}(f) \in W^{1,p_0}(\Omega)$ und die Gleichung

$$\big(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \lambda + \mathcal{B}\big)u + \nabla p = 0 \qquad \operatorname{div} u = 0 \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

erfüllen. Nach Satz 5.1.4 folgt $u \equiv 0$ und p ist konstant.Da $p \in L^{p_0}$, muß der Druck p identisch Null sein.

Also können wir schreiben:

$$\begin{aligned} (1-\varphi)E_{v_\infty,v}(f_0) + \varphi\mathbb{L}(f|_{\Omega_r}) + \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot E_{v_\infty,v}(f_0)\big) - \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot \mathbb{L}(f|_{\Omega_r})\big) &= 0 \\ (1-\varphi)\Pi_v(f_0) + \varphi\mathcal{I}(f|_{\Omega_r}) &= 0 \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Nach Definition der Abschneidefunktion φ und da $\mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot E_{v_\infty,v}(f_0)\big) - \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot \mathbb{L}(f|_{\Omega_r})\big)$ seinen Träger in $B_{r-1}(0) \setminus B_{r-2}(0)$ hat, folgt aus (5.1.15)

$$E_{v_\infty,v}(f_0) = \Pi_v(f_0) = 0 \qquad \text{für } |x| \geq r-1 \tag{5.1.16}$$

$$\mathbb{L}(f|_{\Omega_r}) = \mathcal{I}(f|_{\Omega_r}) = 0 \qquad \text{für } |x| \leq r-2 \tag{5.1.17}$$

Setzen wir $z := \mathbb{L}(f|_{\Omega_r})$ in $\Omega_r = \Omega \cap \mathcal{B}_r(0)$ und $z = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ bzw. $k := \mathcal{I}(f|_{\Omega_r})$ in $\Omega \cap \mathcal{B}_r(0)$ und $k = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Dann ist wegen (5.1.17) $z \in W^{2,p_0}(B_r(0))$, $k \in W^{1,p_0}(B_r(0))$ und z, k erfüllen

$$\big(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \lambda + \mathcal{B}\big)z + \nabla k = f_0|_{B_r(0)} \qquad \operatorname{div} z = 0 \qquad z|_{\partial B_r(0)} = 0$$

Andererseits gilt wegen (5.1.16) und (4.1.9) $\big\|\big(E_{v_\infty,v}(f_0)\big)|_{B_r(0)}\big\|_{p_0,2} \leq C_{p_0,r}\|\chi\|_{\frac{1}{o(1)},2}\|f\|_{1+\epsilon}$, daß $\big(E_{v_\infty,v}(f_0)\big)|_{B_r(0)} \in W^{2,p_0}(B_r(0))$ ist. Wegen (5.1.16) und (4.2.12) folgt außerdem daß

$\big(\Pi_v(f_0)\big)|_{B_r(0)} \in W^{1,p_0}(B_r(0))$ und daß folgende Gleichung erfüllt ist

$$\big(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \lambda + \mathcal{B}\big)\Big(\big(E_{v_\infty,v}(f_0)\big)|_{B_r(0)}\Big) + \nabla\Big(\big(\Pi_v(f_0)\big)|_{B_r(0)}\Big) = f_0|_{B_r(0)}$$
$$\text{div}\,\big(E_{v_\infty,v}(f_0)\big)|_{B_r(0)} = 0 \quad \big(E_{v_\infty,v}(f_0)\big)|_{\partial B_r(0)} = 0$$

Ziehen wir jetzt beide Gleichungen voneinander ab, so gilt mit $w := z - \big(E_{v_\infty,v}(f_0)\big)|_{\partial B_r(0)} \in W^{2,p_0}(B_r(0))$ und $q := k - \big(\Pi_v(f_0)\big)|_{B_r(0)} \in W^{1,p_0}(B_r(0))$ wegen (5.1.7)

$$\big(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \lambda + \mathcal{B}\big)w + \nabla q = 0, \quad \text{div}\, w = 0, \quad w|_{\partial B_r(0)} = 0, \quad \int\limits_{B_r(0)} q(x)\,dx = 0$$

Von Satz 3.0.13 wissen wir, daß die Lösung dieser Gleichung auf beschränkten Gebieten eindeutig ist, d.h. $w = q = 0$ in $B_r(0)$ und in $\Omega \cap B_r(0)$ gilt daher

$$E_{v_\infty,v}(f_0) = \mathbb{L}(f|_{\Omega_r}), \qquad \Pi_v(f_0) = \mathcal{I}(f|_{\Omega_r}) \qquad \text{in } \Omega_r = \Omega \cap B_r(0) \tag{5.1.18}$$

Da der Träger von $\nabla\varphi \subset B_{r-1}(0) \setminus B_{r-2}(0) \subset \Omega \cap B_r(0)$ liegt (die Konstante r war hinreichend groß definiert) folgt aus (5.1.18), daß $(\nabla\varphi) \cdot \big(E_{v_\infty,v}(f_0) - \mathbb{L}(f|_{\Omega_r})\big) = 0$ und somit auch $\mathbb{B}\Big((\nabla\varphi)\big(\cdot E_{v_\infty,v}(f_0) - \cdot\mathbb{L}(f|_{\Omega_r})\big)\Big) = 0$. Nach (5.1.15) ist $E_{v_\infty,v}(f_0) = \Pi_v(f_0) = 0$ in $\Omega \cap B_r(0)$ und zusammen mit (5.1.16) $E_{v_\infty,v}(f_0) = \Pi_v(f_0) = 0$ in ganz Ω, also $f_0 = \big(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \lambda + \mathcal{B}\big)E_{v_\infty,v}(f_0) + \nabla\Pi_v(f_0) = 0$.

□

Hilfssatz 5.1.6 *Sei $1 < p < \infty$, $\delta, r > 0$ reelle Zahlen, $K_1 \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0, |\lambda| \geq \delta\}$ und $K_2 \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0, |\lambda| \leq \delta\}$ kompakte Mengen. Dann ist $(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}$ holomorph in λ und gleichmäßig in $X = L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ und $X = L^p_r(\Omega)$ beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante $C = C(K_1, K_2, r, p) > 0$, so daß*

$$\begin{aligned} &\big\|(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}(f)\big\|_p \leq C\|f\|_p && \forall f \in L^p_r(\Omega) \\ &\big\|(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}(f)\big\|_q \leq C\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big) && q = 1, 2,\ \forall f \in L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega) \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

Beweis: Bis auf die Referenzen wortwörtlich wie [ShiKo, Lemma 4.3].

Wir beweisen den Fall $X = L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$. Der andere Fall ergibt sich völlig analog.

Im Fall $\lambda \in K_1$ wegen Satz 4.2.10; im Fall $\lambda \in K_2$ wegen Satz 3.0.13, Satz 4.1.3 (4.1.5), Folgerung 5.1.2 und Satz 4.3.2 (4.3.6) folgt wegen dem in $B_{r-1} \setminus B_{r-2}$ beschränkten Träger von $\Psi_{v_\infty,\lambda}$

(5.1.20)

$$\|(\Psi_{v_\infty,\lambda} - \Psi_{v_\infty,\lambda'})(f)\|_p + \|(\Psi_{v_\infty,\lambda} - \Psi_{v_\infty,\lambda'})(f)\|_{1+\epsilon} \leq C_{p,r,K_1,K_2}|\lambda - \lambda'|^{\frac{1}{4}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

Ähnlich wie im Beweis zu Satz 3.0.13, schreiben wir $(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}$ als Reihe:

$$(\Psi_{v_\infty,\lambda'}+\mathbb{I})^{-1}=(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\Big((\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}\big(\Psi_{v_\infty,\lambda'}-\Psi_{v_\infty,\lambda}\big)\Big)^j \tag{5.1.21}$$

wobei die Konvergenz der Reihe in der Operatorennorm $\|\ldots\|_{\mathcal{L}(X)}$ zu verstehen ist. Die Reihe konvergiert genau dann in der Operatorennorm, wenn

$$\big\|(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}\big(\Psi_{v_\infty,\lambda'}-\Psi_{v_\infty,\lambda}\big)\big\|_{\mathcal{L}(X)}<1$$

ist. Nach Hilfssatz 5.1.5 ist $(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}$ unabhängig von λ stetig in $L^p(\Omega)\cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$, also $\|(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}<\infty$. Deswegen existiert nach (5.1.20) und (5.1.21) zu jedem $\lambda\in K_j$, $j=1,2$ ein $\delta_\lambda>0$, eine Umgebung $\mathcal{U}_{\delta_\lambda}(\lambda)=\{\lambda\in K_j : |\lambda-\lambda'|<\delta_\lambda\}$ und eine Konstante $C_{p,r,\lambda}>0$, so daß $\|(\Psi_{v_\infty,\lambda'}+\mathbb{I})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}<C_{p,r,\lambda}$ und $(\Psi_{v_\infty,\lambda'}+\mathbb{I})^{-1}$ holomorph in λ' für alle $\lambda'\in\mathcal{U}_{\delta_\lambda}(\lambda)$ ist.

Da K_j, $j=1,2$ jeweils kompakte Mengen sind, existieren endlich viele λ_{k_j}, $k_j=1,\ldots N_j$, so daß

$$K_j=\bigcup_{k_j=1}^{N_j}\mathcal{U}_{\delta_{\lambda_{k_j}}}(\lambda_{k_j}) \qquad\qquad j=1,2$$

Setzen wir

$$C:=\max_{\substack{1\le k_j\le N_j\\ j=1,2}} C_{p,r,\lambda_{k_j}}$$

so zeigt das (5.1.19).

$\square$

Hilfssatz 5.1.7 *Sei $1<p<\infty$, $\sigma_0>0$ und $|v_\infty|\le\sigma_0$. Sei $\mathbb{O}_{v_\infty,v}=\mathbb{P}(-\Delta+v_\infty\cdot\nabla+\mathcal{B})$ der volle Oseenoperator. Dann existiert ein $R_0>0$ und ein $\delta_0=\delta_0(p,\sigma_0)$ mit $0<\delta_0<\pi/2$, so daß*

$$\|(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\|_{p,2}+|\lambda|\|(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\|_p\le C_p\|f\|_p \tag{5.1.22}$$

für alle $f\in H_p(\Omega)$, $|\lambda|\ge R_0$ und $|\arg\lambda|<\pi-\delta_0$.

Beweis: Bis auf die Referenzen fast wortwörtlich wie [ShiKo, Lemma 4.5].

Nach [BoSo] oder [Wahl1] gibt es ein $\lambda_1>0$ und ein δ_0 mit $0<\delta_0<\pi/2$, so daß für ein $\lambda\in\mathbb{C}$ mit $|\lambda|\ge\lambda_1$ und $|\arg\lambda|<\pi-\delta_0$ gilt

$$\|u\|_{p,2}+|\lambda|\|u\|_p\le C_p\|(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{I})u\|_p \qquad \forall u\in\mathcal{D}(\mathbb{A})=\mathcal{D}(\mathbb{O}_{v_\infty})=\mathcal{D}(\mathbb{O}_{v_\infty,v})$$

wobei $\mathbb{A} = \mathbb{P}(-\Delta)$ der Stokesopertor ist. Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
&\|u\|_{p,2} + |\lambda|\|u\|_p \\
&\qquad \leq C_p\|(\mathbb{A} + \lambda\mathbb{I})u\|_p \\
&\qquad \leq C_p\|(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})u\|_p + C_p\|\mathbb{P}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}|v_\infty|\|\nabla u\|_p + C_p\|\mathbb{P}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}\|\mathcal{B}u\|_p \\
&\qquad \leq C_p\|(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})u\|_p + C_{p,\sigma_0}\|u\|_{p,1}
\end{aligned}
$$

Nach einem Interpolationstheorem [Adams, Theorem 4.14, S.: 75] folgt

$$
\leq C_p\|(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})u\|_p + \frac{1}{2}\|u\|_{p,2} + C_{p,\sigma_0}\|u\|_p
$$

Also

$$
\|u\|_{p,2} + \big(|\lambda| - C_{p,\sigma_0}\big)\|u\|_p \leq C_p\|(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})u\|_p
$$

Wähle $R_0 > 2C_{p,\sigma_0}$, dann folgt für $|\lambda| \geq R_0$ und $|\arg\lambda| < \pi - \delta_0$ die Behauptung.

$\square$

Theorem 2 (Resolvente von Oseen) *Sei* $1 < p < \infty$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, $\lambda_0; \sigma_0 > 0$. *Sei* $\mathbb{O}_{v_\infty,v} = \mathbb{P}(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \mathcal{B})$ *der volle Oseenoperator. Dann existiert zu* $|\lambda| \geq \lambda_0$ *und* $|v_\infty| \leq \sigma_0$ *die Resolvente* $(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}$ *in* $H_p(\Omega)$ *und es gilt*

$$
\|(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}f\|_{p,2} + |\lambda|\|(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}f\|_p \leq C_{p,\lambda_0,\sigma_0}\|f\|_p \qquad \forall f \in H_p(\Omega) \tag{5.1.23}
$$

$$
\left\|\frac{\partial}{\partial\lambda}(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}f\right\|_{p,2} \leq \frac{C_{p,\lambda_0,\sigma_0}}{1 + |\lambda|}\|f\|_p \qquad \forall f \in H_p(\Omega) \tag{5.1.24}
$$

Bemerkung: Die Gestalt der Resolventenmenge wie sie für den einfachen Oseenoperator in [ShiKo, Theorem 4.4] angegeben wurde, konnten wir hier leider nicht erreichen, obwohl es auf beschränkten Grundgebieten der Satz 3.0.13 nahelegt. Hier gilt es die Existenz von g_λ als Lösung von $g = -\mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}f - \mathcal{B}E_{v_\infty,\lambda}g$ für den fehlenden Bereich in der negativen reellen Halbebene nachzuweisen.

Tatsächlich mußten wir in Hilfssatz 5.1.7 nicht $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ voraussetzen, was einen weiteren Hinweis darauf bildet, daß sich die Resolventenmenge des vollen Oseenoperators im Wesentlichen wie die des einfachen verhält.

Der Unterschied zu Hilfssatz 5.1.7 ist, daß hier λ_0 beliebig klein gewählt werden kann. Die Lücke zwischen einem beliebig kleinen λ_0 und R_0 füllt dann gerade eine kompakte Menge K bzw. (5.1.29).

Beweis: Bis auf die Referenzen wortwörtlich wie [ShiKo, Theorem 4.4].

Am liebsten würden wir $(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}f = \Phi(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}(f)$ setzen, doch haben wir uns bei dem Nachweis der Stetigkeit von $(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}(f)$ zugunsten des Falles $\lambda = 0$ auf die Funktionen

$f \in L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ bzw. $f \in L^p_r(\Omega)$ beschränkt. Wir müssen jetzt also einen kleinen Umweg machen:

Sei zu $f \in H_p(\Omega)$ wieder f_0 die Fortsetzung mit 0 von f auf ganz $\mathbb{R}^3$. Dann ist $E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0) = E_{v_\infty,\lambda}(f_0 + g_\lambda(f_0)) \in W^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ nach [ShiKo, Lemma 3.1] und Satz 4.3.3 und es ist $\nabla\Pi(f_0 + g_\lambda(f_0)) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ nach Satz 4.2.9 (4.2.10) und Satz 4.3.3. Offensichtlich gilt wegen Gleichung (4.3.9) :

$$\big(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \lambda + \mathcal{B}\big)E_{v_\infty,v,\lambda}(f) + \nabla\Pi(f + g_\lambda(f)) = f_0$$

Indem wir eine geeignete Konstante von $\tilde{p}(f_0) := \Pi(f_0 + g_\lambda(f_0))$ abziehen können wir o.B. annehmen, daß $\tilde{p}$ in $B_r(0)$ mittelwertfrei ist , d.h.

$$\int\limits_{B_r(0)} \tilde{p}\; dx = 0 \tag{5.1.25}$$

Sei $K \subset \mathbb{R}^3 \times \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0, \lambda \neq 0\}$ eine kompakte Menge, dann ist nach Satz 2.0.9 (2.0.16) $\|\tilde{p}(f_0)\|_{p,B_r(0)} \leq C_r\|\nabla\tilde{p}(f_0)\|_{p,B_r(0)} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ und

$$\|E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0)\|_{p,2} + \|\nabla\tilde{p}(f_0)\|_p + \|\tilde{p}(f_0)\|_{p,B_r(0)} \leq C_{p,r,K}\|f\|_p \tag{5.1.26}$$

Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ eine Abschneidefunktion mit $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leq r-2$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq r-1$. Sei $w := (1-\varphi)E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0) + \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0)\big)$ und $q := (1-\varphi)\tilde{p}(f_0)$. Dann ist nach (5.1.26) und Folgerung 5.1.2

$$\begin{aligned}
&w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \cap H_p(\Omega) = \mathcal{D}(\mathbb{O}_{v_\infty,v}), \quad q \in \hat{W}^{1,p}(\Omega)\\
&\big(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \lambda + \mathcal{B}\big)w + \nabla q = f + h_{v_\infty,\lambda} \text{ in } \Omega\\
&\|w\|_{p,2} + \|\nabla q\|_p \leq C_{p,K}\|f\|_p \quad \forall (v_\infty,\lambda) \in K
\end{aligned} \tag{5.1.27}$$

wobei (vergleiche Beweis S.: 115 von Satz 5.1.3)

$$\begin{aligned}
h_{v_\infty,\lambda} = -\varphi f + 2(\nabla\varphi)\cdot\nabla E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0) + (\Delta\varphi)E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0) - \big((v_\infty\cdot\nabla)\varphi\big)E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0)\\
- (\nabla\varphi)\big(v \otimes E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0) + E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0)\otimes v\big)\\
+ \big(-\Delta + v_\infty\cdot\nabla + \lambda + \mathcal{B}\big)\mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot E_{v_\infty,v,\lambda}(f_0)\big) - (\nabla\varphi)\tilde{p}(f_0)
\end{aligned}$$

Da die Träger von $\varphi, \nabla\varphi$ und $\Delta\varphi$ in $B_r(0)$ liegen, ist $h_{v_\infty,\lambda} \in L^p_r(\Omega)$ und wegen (5.1.26) folgt

$$\|h_{v_\infty,\lambda}\|_p \leq C_{p,K}\|f\|_p \qquad \forall (v_\infty,\lambda) \in K \tag{5.1.28}$$

Setze nun $u := w - \Phi_{v_\infty,\lambda}(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}h_{v_\infty,\lambda}$ und $p := q - \mathcal{P}_{v_\infty,\lambda}(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}h_{v_\infty,\lambda}$. Dann ist wegen (5.1.27), (5.1.28) und Hilfssatz 5.1.6 $u \in \mathcal{D}(\mathbb{O}_{v_\infty,v})$, $p \in \hat{W}^{1,p}(\Omega)$ und nach Satz 5.1.3

$$\begin{aligned}
&\big(-\Delta + v_\infty\cdot\nabla + \lambda + \mathcal{B}\big)u + \nabla p\\
&\quad = \big(-\Delta + v_\infty\cdot\nabla + \lambda + \mathcal{B}\big)w - \big(-\Delta + v_\infty\cdot\nabla + \lambda + \mathcal{B}\big)\Phi_{v_\infty,\lambda}(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}h_{v_\infty,\lambda}\\
&\qquad + \nabla\tilde{p} - \nabla\mathcal{P}_{v_\infty,\lambda}(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}h_{v_\infty,\lambda}\\
&\quad = f + h_{v_\infty,\lambda} + (\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1}h_{v_\infty,\lambda}\\
&\quad = f
\end{aligned}$$

Darüberhinaus gilt $\|u\|_{p,2} \leq C_{p,K}\|f\|_p \; \forall (v_\infty,\lambda) \in K$. Nach Satz 5.1.4 ist u eindeutig und wegen $\mathbb{P}\big(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \lambda + \mathcal{B}\big)u = (\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})u = \mathbb{P}f$ besitzt $\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I}$ eine beschränkte Inverse $(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}$ von $H_p(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{O}_{v_\infty,v})$ für die gilt

$$\big\|(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}(f)\big\|_{p,2} \leq C_{p,K}\|f\|_p \qquad \forall (v_\infty,\lambda) \in K,\ \forall f \in H_p(\Omega) \tag{5.1.29}$$

Das, zusammen mit dem Hilfssatz 5.1.7, zeigt (5.1.23) und daß die Resolventenmenge mindestens $\{-\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0\}$ umfaßt.

Gleichung (5.1.24) ist eine direkte Folgerung aus (5.1.23): Offensichtlich ist

$$(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda'\mathbb{I})^{-1} - (\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1} = -(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}(\lambda' - \lambda)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda'\mathbb{I})^{-1}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}(f) &= \lim_{\lambda' \to \lambda} \frac{1}{\lambda' - \lambda}\left((\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda'\mathbb{I})^{-1} - (\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}\right)(f) \\ &= -(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-2}(f)\end{aligned}$$

Zweimalige Anwendung von (5.1.23) zeigt (5.1.24).

□

5.2 Lokale Energieabklingraten

Im vorigen Kapitel haben wir in Theorem 2 gesehen, daß die Resolvente des (vollen) Oseenoperators der Gleichung (5.1.24) genügt. Das reicht aus, um die Halbgruppe $e^{-\mathbb{O}_v t}$ zu definieren. Mit Hilfe einer Integraldarstellung werden wir hier eine lokale Abklingrate der Halbgruppe in der Zeit berechnen.

Sowohl die Aussagen, als auch die Beweise in diesem Kapitel sind fast wortwörtlich wie die von Kapitel 5 in [ShiKo]. Da die Referenzen aber stark verschieden sind, wiederholen wir die Argumente noch einmal.

Auch hier verwenden wir den Banachraum $X = L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ mit Norm $\|.\|_X = \|.\|_{1+\epsilon} + \|.\|_p$ anstatt $L^p_r(\Omega)$.

Wir beginnen mit einem Zitat eines Satzes, der uns später die Abfallrate ermöglichen wird:

Satz 5.2.1 *Sei Ξ ein Banachraum mit Norm $\|.\|_\Xi$ und $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \Xi$ eine Ξ-wertige Funktion. Sei*

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(s)\, ds$$

Gilt

$$\sup_{h \neq 0} |h|^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|f(s+h) - f(s)\|_\Xi\, ds + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|f(s)\|_\Xi\, ds \leq C_f$$

mit einer von f abhängenden Konstanten C_f, dann ist

$$\|g(t)\|_\Xi \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}} C_f$$

mit einer Konstanten C, unabhängig von t oder f.

Beweis: [Shi, Theorem 3.7]

□

Nach Theorem 2 kennen wir die Regularität der Resolvente von Oseen bis auf eine Umgebung der Null. Der folgende Satz gibt Auskunft über die Regularität in dieser Umgebung und verwendet Satz 4.4.1:

Satz 5.2.2 *Sei $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq p$, $\epsilon > 0$ hinreichend klein, $\sigma_0, \gamma > 0$ und $r >$ so groß , daß $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega \subset B_r(0)$. Sei $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Abschneidefunktion mit $\rho(s) = 1$ für $|s| \leq \gamma$ und $\rho(s) = 0$*

für $|s| \geq \gamma + 1$. *Sei* $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ *eine Abschneidefunktion mit* $\psi(x) = 1$ *für* $|x| \leq r$ *und* $\psi(x) = 0$ *für* $|x| \geq r + 1$. *Dann gilt*

$$\text{(5.2.1)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left\| \psi\rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + is\mathbb{I})^{-1} f \right\|_{q,2} + \left\| \psi \frac{\partial}{\partial s}\Big(\rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + is\mathbb{I})^{-1} f\Big) \right\|_{p,2} \right) ds \leq \frac{C_{p,r,\gamma,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

$$\text{(5.2.2)} \quad \sup_{h \neq 0} |h|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \psi \frac{\partial}{\partial s}\Big(\rho(s+h)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + (is+ih)\mathbb{I})^{-1} - \rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + is\mathbb{I})^{-1}\Big) f \right\|_{q,2} ds \leq \frac{C_{p,r,\gamma,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}} \big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)$$

für jedes $f \in H_p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ *und* $0 \neq |v_\infty| \leq \sigma_0$ *mit einer von* f *unabhängigen Konstanten* $C_{p,r,\gamma,\sigma_0,\epsilon}$.

Beweis: Bis auf die Referenzen wortwörtlich wie [ShiKo, Lemma 5.1].

Da ψ beschränkten Träger hat, können wir uns o.B. auf den Fall $q = p$ zurückziehen.

Da $f \in H_p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$, können wir mit den Bezeichnungen aus Kapitel 5.1 die Resolvente $(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}$ explizit angeben: Nach Hilfssatz 5.1.5 liegt $(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1} f$ in $L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$. Für $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, $\lambda \neq 0$ ist dann nach (5.1.4) $\Phi_{v_\infty,\lambda}(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1} f \in W^{p,2}(\Omega)$, löst nach (5.1.5) die volle Oseengleichung, d.h.

$$\big(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \lambda + \mathcal{B}\big)\Phi_{v_\infty,\lambda}(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1} f + \nabla\mathcal{P}_{v_\infty,\lambda}(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1} f = f$$

ist somit nach Satz 5.1.4 eindeutig und nach Theorem 2 ist

$$\text{(5.2.3)} \quad (\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1} f = \Phi_{v_\infty,\lambda}(\Psi_{v_\infty,\lambda} + \mathbb{I})^{-1} f \qquad \forall\, f \in H_p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega),\ \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0,\ \lambda \neq 0$$

Insbesondere gilt für jedes $f \in H_p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ und $s \neq 0$

$$\begin{aligned} \psi\rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + is\mathbb{I})^{-1} f &= \psi\rho(s)\Phi_{v_\infty,is}(\Psi_{v_\infty,is} + \mathbb{I})^{-1} f \\ &= \underbrace{\psi\rho(s)\Phi_{v_\infty,is}}_{=:\tilde{\Phi}(s)} \underbrace{\tilde{\rho}(\Psi_{v_\infty,is} + \mathbb{I})^{-1}}_{=:\Lambda(s)} f \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\rho} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Abschneidefunktion mit $\tilde{\rho} = 1$ für $|s| \leq \gamma + 1$ und $\tilde{\rho} = 0$ für $|s| \geq \gamma + 2$. Da ρ Träger in $\{|s| \leq \gamma\}$ hat, durften wir $\tilde{\rho}$ einfügen.

Für $\tilde{\Phi}(s) = \psi\rho(s)\Phi_{v_\infty,is}$ gilt für $f \in L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ wegen der Darstellung (5.1.3) von $\Phi_{v_\infty,is}$

nach Satz 3.0.13, Satz 4.2.9 und Folgerung 5.1.2 für $1 \le q \le p$

$$\sup_{s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \|\tilde{\Phi}(s)f\|_{q,2} + \sup_{\substack{s\in\mathbb{R}\\ s,h\neq 0}} |h|^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{\Phi}(s+h)f - \tilde{\Phi}(s)f\|_{q,2} \le C_{p,r,\epsilon}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big) \tag{5.2.4}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \|\partial_s \tilde{\Phi}(s)f\|_{q,2}\, ds &\le C_{p,r,\epsilon}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big) \\ \sup_{h\neq 0} |h|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \|\partial_s\tilde{\Phi}(s+h)f - \partial_s\tilde{\Phi}(s)f\|_{q,2}\, ds &\le \frac{C_{p,r,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big) \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Analog zur ersten Umformung im Beweis zu Hilfssatz 4.3.4 ist

$$\begin{aligned} &(\Psi_{v_\infty,i(s+h)} + \mathbb{I})^{-1} - (\Psi_{v_\infty,is} + \mathbb{I})^{-1} \\ &\qquad = -(\Psi_{v_\infty,is} + \mathbb{I})^{-1}\Big(\Psi_{v_\infty,i(s+h)} - \Psi_{v_\infty,is}\Big)(\Psi_{v_\infty,i(s+h)} + \mathbb{I})^{-1} \end{aligned}$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial s}(\Psi_{v_\infty,is} + \mathbb{I})^{-1} = -(\Psi_{v_\infty,is} + \mathbb{I})^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Psi_{v_\infty,is}\Big)(\Psi_{v_\infty,is} + \mathbb{I})^{-1} \tag{5.2.6}$$

Nach Hilfssatz 5.1.6 ist $(\Psi_{v_\infty,is}+\mathbb{I})^{-1}$ ein stetiger Operator $L^p(\Omega)\cap L^{1+\epsilon}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)\cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ bzw. $L^p_r(\Omega) \longrightarrow L^p_r(\Omega)$ mit einer von s unabhängigen Einbettungskonstanten (5.1.19). Gemäß der Darstellung (5.1.8) von $\Psi_{v_\infty,is}f$ gilt daher nach Satz 3.0.13, Satz 4.4.1, Satz 4.2.9 und Folgerung 5.1.2 und Hilfssatz 5.1.6 für $\Lambda(s)f = \tilde{\rho}(\Psi_{v_\infty,is} + \mathbb{I})^{-1}f$, $f \in L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ und $1 \le q \le p$

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \|\Lambda(s)f\|_q + \sup_{s\in\mathbb{R},\, h\neq 0} |h|^{-\frac{1}{2}} \|\Lambda(s+h)f - \Lambda(s)f\|_q \le \frac{C_{p,r,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big) \tag{5.2.7}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \|\partial_s\Lambda(s)f\|_q\, ds &\le \frac{C_{p,r,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big) \\ \sup_{h\neq 0} |h|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \|\partial_s\Lambda(s+h)f - \partial_s\Lambda(s)f\|_q\, ds &\le \frac{C_{p,r,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big) \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Beachte, daß $\Psi_{v_\infty,is}f$, $\partial_s\Psi_{v_\infty,is}f$ und somit auch $\partial_s\Lambda(s)f$ und $\Lambda(s+h)f - \Lambda(s)f$ beschränkten Träger haben.

Somit ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \big\|\psi\rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + is\mathbb{I})^{-1}f\big\|_{p,2}\, ds &= \int_{-\gamma-1}^{\gamma+1} \big\|\tilde{\Phi}(s)\Lambda(s)f\big\|_{p,2}\, ds \\ &\le 2(\gamma+1) \sup_{s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \big\|\tilde{\Phi}(s)\Lambda(s)f\big\|_{p,2} \\ &\le C_{p,r,\gamma} \sup_{s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \big(\big\|\Lambda(s)f\big\|_p + \big\|\Lambda(s)f\big\|_{1+\epsilon}\big) \quad \text{nach (5.2.4)} \\ &\le \frac{C_{p,r,\gamma,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big) \quad \text{nach (5.2.7)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left\| \psi \partial_s \rho(s) (\mathbb{O}_{v_\infty,v} + is\mathbb{I})^{-1} f \right\|_{p,2} ds \\
&\quad = \int_{-\gamma-1}^{\gamma+1} \left\| \partial_s \big(\tilde{\Phi}(s) \Lambda(s) \big) f \right\|_{p,2} ds \\
&\quad \leq \int_{-\gamma-1}^{\gamma+1} \Big(\left\| \partial_s \big(\tilde{\Phi}(s) \big) \Lambda(s) f \right\|_{p,2} + \left\| \tilde{\Phi}(s) \partial_s \big(\Lambda(s) \big) f \right\|_{p,2} \Big) \, ds \\
&\quad \leq C_{p,r,\gamma} \sup_{s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \big(\left\| \Lambda(s) f \right\|_p + \left\| \Lambda(s) f \right\|_1 \big) && \text{nach (5.2.5)} \\
&\qquad + C_{p,r,\gamma} \int_{-\gamma-1}^{\gamma+1} \big(\left\| \partial_s \big(\Lambda(s) \big) f \right\|_p + \left\| \partial_s \big(\Lambda(s) \big) f \right\|_1 \big) \, ds && \text{nach (5.2.4)} \\
&\quad \leq \frac{C_{p,r,\gamma,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \big(\|f\|_p + \|f\|_1 \big) && \text{nach (5.2.7),(5.2.8)}
\end{aligned}
$$

Das zeigt (5.2.1).

Sei X der Banachraum $X = L^p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ mit Norm $\|.\|_X = \|.\|_p + \|.\|_{1+\epsilon}$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left\| \psi \frac{\partial}{\partial s} \Big(\rho(s+h) (\mathbb{O}_{v_\infty,v} + (is+ih)\mathbb{I})^{-1} - \rho(s) (\mathbb{O}_{v_\infty,v} + is\mathbb{I})^{-1} \Big) f \right\|_{p,2} ds \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \partial_s \big(\tilde{\Phi}(s+h) \Lambda(s+h) \big) f - \partial_s \big(\tilde{\Phi}(s) \Lambda(s) \big) f \right\|_{p,2} ds \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \Big\| \partial_s \big(\tilde{\Phi}(s+h) \big) \Lambda(s+h) f + \tilde{\Phi}(s+h) \partial_s \big(\Lambda(s+h) \big) f \\
&\qquad - \partial_s \big(\tilde{\Phi}(s) \big) \Lambda(s) f - \tilde{\Phi}(s) \partial_s \big(\Lambda(s) \big) f \Big\|_{p,2} ds \\
&\quad \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \Big(\partial_s \big(\tilde{\Phi}(s+h) \big) - \partial_s \big(\tilde{\Phi}(s) \big) \Big) \Lambda(s+h) f \right\|_{p,2} ds \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \big(\tilde{\Phi}(s+h) - \tilde{\Phi}(s) \big) \partial_s \big(\Lambda(s) \big) f \right\|_{p,2} ds \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \partial_s \big(\tilde{\Phi}(s) \big) \big(\Lambda(s+h) - \Lambda(s) \big) f \right\|_{p,2} ds \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \tilde{\Phi}(s+h) \Big(\partial_s \big(\Lambda(s+h) \big) - \big(\partial_s \big(\Lambda(s) \big) \Big) f \right\|_{p,2} ds
\end{aligned}
$$

Da die Träger von $\partial_s\Lambda(s)f$ und $\Lambda(s+h)f-\Lambda(s)f$ beschränkt sind folgt nach (5.2.4), (5.2.5) und *Hölder*

$$\begin{aligned}
&\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\|\partial_s\tilde{\Phi}(s+h)-\partial_s\tilde{\Phi}(s)\right\|_{\mathcal{L}(X,W^{2,p}(\Omega))} ds \ \sup_{s\in\mathbb{R}}\big(\left\|\Lambda(s+h)f\right\|_p+\left\|\Lambda(s+h)f\right\|_{1+\epsilon}\big)\\
&\quad+\sup_{s\in\mathbb{R}}\left\|\tilde{\Phi}(s+h)-\tilde{\Phi}(s)\right\|_{\mathcal{L}(X,W^{2,p}(\Omega))}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\|\partial_s\Lambda(s)f\right\|_p ds\\
&\quad+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\|\partial_s\tilde{\Phi}(s)\right\|_{\mathcal{L}(X,W^{2,p}(\Omega))} ds \ \sup_{s\in\mathbb{R}}\left\|\big(\Lambda(s+h)-\Lambda(s)\big)f\right\|_p\\
&\quad+\sup_{s\in\mathbb{R}}\left\|\tilde{\Phi}(s+h)\right\|_{\mathcal{L}(X,W^{2,p}(\Omega))}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\|\big(\partial_s\Lambda(s+h)-\partial_s\Lambda(s)\big)f\right\|_p ds\\
&\leq \frac{C_{p,r,\gamma,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}|h|^{\frac{1}{2}}\big(\|f\|_p+\|f\|_{1+\epsilon}\big)
\end{aligned}$$

nach (5.2.4), (5.2.5), (5.2.7) und (5.2.8).

$\square$

Theorem 3 (Lokale Energieabklingrate) *Sei* $1<p<\infty$, $\epsilon>0$ *hinreichend klein,* $\sigma_0>0$, $v_\infty\neq 0$ *die Anströmgeschwindigkeit bei* ∞, $r_0>0$ *so groß , daß* $\mathbb{R}^3\setminus\Omega\subset B_r(0)$. *Sei* $\mathbb{O}_{v_\infty,v}=\mathbb{P}(-\Delta+v_\infty\cdot\nabla+\mathcal{B})$ *der (volle) Oseenoperator und* $T(t)=e^{-\mathbb{O}_{v_\infty,v}t}$ *die zugehörige stark stetige Halgruppe. Dann gilt für jedes* $r>r_0$ *und jede ganze Zahl* $m\geq 0$

$$\left\|\partial_t^m T(t)f\right\|_{p,2,\Omega_r}\leq\frac{C_{m,p,r,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}t^{-\frac{3}{2}}\big(\|f\|_p+\|f\|_{1+\epsilon}\big)\quad\forall\, t\geq 1,\ \forall\, f\in H_p(\Omega)\cap L^{1+\epsilon}(\Omega)\tag{5.2.9}$$

wobei $\Omega_r=\Omega\cap B_r(0)$ *und* $|v_\infty|\leq\sigma_0$.

Beweis: Bis auf die Referenzen wortwörtlich wie [ShiKo, S. 32ff].

Durch n-maliges Anwenden von Theorem 3 (5.2.9) sieht man, daß für $|\lambda|\geq\lambda_0>0$, $\mathrm{Re}(\lambda)\geq 0$ gilt $\|(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-n}f\|_p\leq C_p\|f\|_p/|\lambda|^n$. Nach [Pazy, Chapter 1, Theorem 5.3] ist somit $\mathbb{O}_{v_\infty,v}$ Erzeuger einer stark stetigen Halbbruppe $T(t):=e^{-\mathbb{O}_{v_\infty,v}t}$ in $H_p(\Omega)$, die nach [Pazy, Chapter 1, Corollary 7.5] der Darstellung

$$T(t)f=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}e^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\,d\lambda\qquad\forall\,\omega>0,\ f\in H_p(\Omega)\tag{5.2.10}$$

genügt, da $\mathcal{D}(\mathbb{O}^2_{v_\infty,v})\subset H_p(\Omega)$ dicht liegt.

Mit partieller Integration und $\partial_\lambda e^{\lambda t} = te^{\lambda t}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
T(t)f &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{s\to\infty}\int\limits_{\omega-is}^{\omega+is} e^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\,d\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi it}\int\limits_{\omega-is}^{\omega+is} te^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\,d\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi it}\int\limits_{\omega-is}^{\omega+is} \partial_\lambda e^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\,d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi it}\lim_{s\to\infty}\underbrace{e^{\omega}e^{ist}(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f}_{\to 0\text{in } L^p(\Omega)\text{ nach Theorem 2}} - \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi it}\int\limits_{\omega-is}^{\omega+is} e^{\lambda t}\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda)^{-1}f\,d\lambda \\
&= -\lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi it}\int\limits_{\omega-is}^{\omega+is} e^{\lambda t}\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda)^{-1}f\,d\lambda
\end{aligned}$$

wobei der Limes im Riemann'schen Sinn in $H_p(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ zu verstehen ist. Wir halten fest

$$T(t)f = -\frac{1}{2\pi it}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda t}\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\,d\lambda \qquad \forall\,\omega>0,\ f\in H_p(\Omega) \tag{5.2.11}$$

Sei $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ eine Abschneidefunktion mit $\psi(x) = 1$ für $|x| \le r$. Nach (5.2.11) gilt für jedes $f \in H_p(\Omega)$ und einem Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^3$, $|\alpha| \le 2$

$$\partial_x^\alpha\big(\psi T(t)f\big) = -\frac{1}{2\pi it}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda t}\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\Big)\,d\lambda \quad \forall\,\omega>0,\ f\in H_p(\Omega) \tag{5.2.12}$$

Nach (5.2.3) aus dem Beweis von Satz 5.2.2 haben wir die Darstellung $\psi(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f = \psi\Phi_{v_\infty,\lambda}(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f$ für $f \in H_p(\Omega)\cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$. Also

$$\begin{aligned}
&\big\|\psi\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\big\|_{p,2} \\
&\quad= \big\|\psi\partial_\lambda\big(\Phi_{v_\infty,\lambda}(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f\big)\big\|_{p,2} \\
&\quad\le \big\|\psi\partial_\lambda\big(\Phi_{v_\infty,\lambda}\big)(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f\big\|_{p,2} + \big\|\psi\Phi_{v_\infty,\lambda}\partial_\lambda\big((\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f\big)\big\|_{p,2}
\end{aligned}$$

Nach Satz 3.0.13, Satz 4.4.1 (4.4.1) (4.4.2), Folgerung 5.1.2 folgt für $0 < \mathrm{Re}(\lambda) \le 1$

$$\begin{aligned}
&\le \frac{C_{p,r}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}}\big(\big\|(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f\big\|_p + \big\|(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f\big\|_{1+\epsilon}\big) \\
&\quad + C_{p,r}\big(\big\|\partial_\lambda\big((\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f\big)\big\|_p + \big\|\partial_\lambda\big((\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f\big)\big\|_{1+\epsilon}\big)
\end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 5.1.6 schätzen wir die ersten beiden Summand ab, die anderen beiden formen wir gemäß (5.2.6) um zu

$$\leq \frac{C_{p,r}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big) + C_{p,r}\Big(\Big\|(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}\partial_\lambda\big(\Psi_{v_\infty,\lambda}\big)(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f\Big\|_p$$
$$+\Big\|(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}\partial_\lambda\big(\Psi_{v_\infty,\lambda}\big)(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f\Big\|_{1+\epsilon}\Big)$$

Wieder mit Hilfssatz 5.1.6 und der Tatsache, daß $\Psi_{v_\infty,\lambda}$ beschränkten Träger in $B_{r+1}(0)$ hat folgt

$$\leq \frac{C_{p,r}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big) + C_{p,r}\Big\|\partial_\lambda\big(\Psi_{v_\infty,\lambda}\big)(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f\Big\|_p$$

$\Psi_{v_\infty,\lambda}$ hat die Darstellung (5.1.8). Nach Satz 3.0.13, Satz 4.4.1 (4.4.1) (4.4.2), Folgerung 5.1.2 folgt für $0 < \mathrm{Re}(\lambda) \leq 1$

$$\leq \frac{C_{p,r}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}}\big(\|f\|_p + \|f\|_p\big) + \frac{C_{p,r}}{\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}}\Big(\Big\|(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f\Big\|_p + \Big\|(\Psi_{v_\infty,\lambda}+\mathbb{I})^{-1}f\Big\|_{1+\epsilon}\Big)$$
$$\leq \frac{C_{p,r}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}}\big(\|f\|_p + \|f\|_p\big)$$

Sei $\gamma_\delta := \{\lambda = \delta e^{i\theta} : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Dann ist für $|\alpha| \leq 2$ und $0 < \mathrm{Re}(\lambda) \leq 1$

$$\begin{aligned}
\Big\|\int_{\gamma_\delta} e^{\lambda t}\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\Big)\,d\lambda\Big\|_p &= \Big\|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\delta e^{i\theta}t}\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\delta e^{i\theta}\mathbb{I})^{-1}f\Big)\delta\,d\theta\Big\|_p \\
&\leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big\|e^{\delta e^{i\theta}t}\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\delta e^{i\theta}\mathbb{I})^{-1}f\Big)\delta\Big\|_p\,d\theta \\
&\leq \big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big|e^{\delta e^{i\theta}t}\Big|\Big|\frac{C_{p,r}}{\sqrt{\mathrm{Re}(\delta e^{i\theta})}}\Big|\delta\,d\theta \\
&\leq C_{p,r}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\delta e^{\delta\cos(\theta)t}}{\sqrt{\delta\cos(\theta)}}\,d\theta \\
&\leq C_{p,r,t}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)\sqrt{\delta}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\cos(\theta)}}\,d\theta \\
&\leq C_{p,r,t}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big)\sqrt{\delta} \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{für } \delta \to 0
\end{aligned}$$

Sei $\gamma_s := \{\lambda = \theta + is : 0 \leq \theta \leq \omega\}$ ein Weg parallel zur reellen Achse mit $s \neq 0$. Dann ist für $|s| \geq s_0 > 0$

$$\Big\|\int_{\gamma_s} e^{\lambda t}\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\Big)\,d\lambda\Big\|_p \leq \int_{\gamma_s}\big|e^{\lambda t}\big|\Big\|\psi\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\Big\|_{p,2}\,d\lambda$$

Theorem 2 (5.1.24)

$$
\begin{aligned}
&\leq C_{p,r}\|f\|_p \int\limits_{\gamma_s} e^{\mathrm{Re}(\lambda)t} \frac{1}{1+|\lambda|}\, d\lambda \\
&\leq C_{p,r}\|f\|_p \int\limits_0^\omega e^{\theta t} \frac{1}{1+\sqrt{\theta^2+|s|^2}}\, d\theta \\
&\leq C_{p,r,\omega}\|f\|_p \int\limits_0^\omega \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\theta+|s|}\, d\theta \\
&\leq C_{p,r,\omega}\|f\|_p \log(\sqrt{2}+\theta+|s|)\Big|_0^\omega \\
&\leq C_{p,r,\omega}\|f\|_p \log\frac{\sqrt{2}+\omega+|s|}{\sqrt{2}+|s|} \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{für } |s| \to \infty
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\delta\searrow 0} \int\limits_{\gamma_\delta} e^{\lambda t}\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\Big)\, d\lambda = 0 \qquad \gamma_\delta := \{\lambda = \delta e^{i\theta} : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\} \\
&\lim_{s\to\pm\infty} \int\limits_{\gamma_s} e^{\lambda t}\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\Big)\, d\lambda = 0 \qquad \gamma_s := \{\lambda = \theta + is : 0 \leq \theta \leq \omega\}
\end{aligned}
$$

Sei schließlich $\gamma_{\delta,s} := \{i\theta : \delta \leq \theta \leq s\}$ und $\gamma_{\omega,s} := \{\omega + i\theta : -s \leq \theta \leq s\}$. Betrachte den geschlossenen Integrationsweg $\gamma_{\omega,s} - \gamma_s - \gamma_{\delta,s} - \gamma_\delta + \gamma_{-\delta,-s} + \gamma_{-s}$. Integrieren wir die Funktion $e^{\lambda t}\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\Big)$ entlang dieses Weges, so ergibt dies wegen der Holomorphie Null. Lassen wir $s \to \infty$ und $\delta \to 0$ gehen, sehen wir, daß der Integrationsweg bei (5.2.12) auf die imaginäre Achse verlegt werden kann. Sei $\psi(x) = 0$ für $|x| \geq r+1$ und $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Abschneidefunktion mit $\rho(s) = 1$ für $|s| \leq \gamma$ und $\rho(s) = 0$ für $|s| \geq \gamma + 1$, $\gamma > 1$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\partial_x^\alpha\big(\psi T(t)f\big) &= -\frac{1}{2\pi i t}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{\lambda t}\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_\lambda(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+\lambda\mathbb{I})^{-1}f\Big)\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_s(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-1}f\Big)\, ds \\
&= \frac{1}{2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_s\big(\rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-1}f\big)\Big)\, ds \\
&\quad + \frac{1}{2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_s\big((1-\rho(s))(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-1}f\big)\Big)\, ds \\
&=: J_0(t)f + J_\infty(t)f
\end{aligned}
$$

Wir zeigen die Aussage von Theorem 3 für jeweils $J_0(t)f$ und $J_\infty(t)f$. Fangen wir mit letzterem an: Wegen $\partial_t^{m-j}t^{-1} = (-1)^{m-j}(m-j)!t^{-(m-j+1)}$ und $e^{ist} = (it)^{-(j+n+1)}\big(\partial_s^{j+n+1}e^{ist}\big)$ ist

$$\begin{aligned}
\partial_t^m \frac{e^{ist}}{t} &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j}\big(\partial_t^{m-j}t^{-1}\big)\big(\partial_t^j e^{ist}\big) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j}(-1)^{m-j}(m-j)!t^{-(m-j+1)}(is)^j e^{ist} \\
&= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j}(-1)^{m-j}(m-j)!t^{-(m-j+1)}(is)^j(it)^{-(j+n+1)}\big(\partial_s^{j+n+1}e^{ist}\big) \\
&= \frac{t^{-(m+n+2)}}{i^{n+1}}\sum_{j=0}^m \binom{m}{j}(-1)^{m-j}(m-j)!s^j\big(\partial_s^{j+n+1}e^{ist}\big)
\end{aligned}$$

Wie zu Beginn dieses Beweises erhalten wir mit partieller Integration für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\partial_t^m J_\infty(t)f \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\partial_t^m \frac{e^{ist}}{t}\Big)\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_s\big((1-\rho(s))(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-1}f\big)\Big)\,ds \\
&= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j}\frac{(-1)^{m-j}(m-j)!}{2\pi t^{m+n+2}i^{n+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\big(\partial_s^{j+n+1}e^{ist}\big)s^j\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_s\big((1-\rho(s))(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-1}f\big)\Big)\,ds \\
&= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j}\frac{(-1)^{m+n+1}(m-j)!}{2\pi t^{m+n+2}i^{n+1}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}\partial_s^{j+n+1}\Big(s^j\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_s\big((1-\rho(s))(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-1}f\big)\Big)\Big)ds \\
&= \sum_{j=0}^m \frac{C_{m,n,j}}{t^{m+n+2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}\partial_s^{j+n+1}\Big(s^j\Big(\big(\partial_s\rho(s)\big)\partial_x^\alpha\big(\psi(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-1}\big) \\
&\quad + (1-\rho)\partial_x^\alpha\big(\psi(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-2}\big)\Big)f\Big)\,ds \\
&= \sum_{j=0}^m\sum_{l=0}^j \frac{C_{m,n,j,l}}{t^{m+n+2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}\Big(\underbrace{\partial_s^{j+n+1-l}\big(s^j\partial_s\rho(s)\big)}_{\in\mathcal{C}_0^\infty(\gamma,\gamma+1)\ \forall j,l}\partial_x^\alpha\big(\psi(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-(l+1)}\big) \\
&\quad + \underbrace{\partial_s^{j+n+1-l}\big(s^j(1-\rho)\big)}_{\in\mathcal{C}^\infty(\gamma,\infty)\ \forall j,l}\partial_x^\alpha\big(\psi(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-(l+2)}\big)\Big)f\,ds
\end{aligned}$$

Beachte, daß $\partial_s^{j+1+n-l}s^j = 0$ für $n-l \geq 0$. Indem wir mit der Produktregel die Differentiation weiter auftrennen und die Summanden nach Potenzen in l neu sortieren, sehen wir, daß es $m+1$ Funktionen $h_{l,n} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $l = 0,\dots,m$ gibt, so daß

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^m \frac{C_{m,n,l}}{t^{m+n+2}}\int_{\gamma\leq|s|\leq\gamma+1} e^{ist}h_{l,n}(s)\big(\partial_s\rho(s)\big)\partial_x^\alpha\big(\psi(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-(l+1)}\big)\,ds \\
&\quad + \sum_{l=n+1}^m \frac{C_{m,n,l}}{t^{m+n+2}}\int_{|s|\geq\gamma} e^{ist}s^l\big(1-\rho(s)\big)\partial_x^\alpha\big(\psi(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-(l+3)}\big)f\,ds
\end{aligned}$$

wobei wir die letzte Summe als 0 auffassen, wenn $n+1>m$ ist. Aus Theorem 2 folgt durch mehrfache Anwendung von (5.1.23) $\|(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-(l+1)}f\|_{p,2}\leq C_{p,\gamma}(1+|s|)^{-l}\|f\|_p$, $\forall l\in\mathbb{N}$. Somit ist

$$
\begin{aligned}
\left\|\partial_t^m J_\infty(t)f\right\|_p &\leq \sum_{l=0}^{m}\frac{C_{m,n,p,\sigma_0,l,\gamma}}{t^{m+n+2}}\int\limits_{\gamma\leq|s|\leq\gamma+1}\|h_l(s)\|_\infty\frac{1}{(1+|s|)^l}\|f\|_p\,ds\\
&\quad+\sum_{l=n+1}^{m}\frac{C_{m,n,l,\gamma,p,\sigma_0}}{t^m}\int\limits_{|s|\geq\gamma}\frac{s^l}{(1+|s|)^{l+2}}\|f\|_p\,ds\\
&\leq\frac{C_{m,n,\gamma,p,\sigma_0}}{t^{m+n+2}}\|f\|_p \qquad\qquad \forall m\geq 0,\ n\geq 0
\end{aligned}
$$

Um $\|J_0(t)f\|_p$ abzuschätzen, wollen wir Satz 5.2.1 im Banachraum $\Xi=L^p(\Omega)\cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$ mit Norm $\|.\|_\Xi=\|.\|_{1+\epsilon}+\|.\|_p$ anwenden.

$$
\begin{aligned}
&\partial_t^m J_0(t)f\\
&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\partial_t^m\frac{e^{ist}}{t}\Big)\partial_x^\alpha\Big(\psi\partial_s\big(\rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-1}f\big)\Big)\,ds\\
&=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-1)^{m-j}(m-j)!}{2\pi t^{m-j+1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ist}(is)^j\partial_x^\alpha\psi\partial_s\big(\rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-1}f\big)\,ds\\
&=\frac{1}{t}\underbrace{\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-1)^{m-j}(m-j)!i^j}{2\pi t^{m-j}}}_{\text{Beschränkt für }t\geq1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ist}\underbrace{s^j\partial_x^\alpha\psi\partial_s\big(\rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-1}f\big)}_{=:f_j(s)}\,ds
\end{aligned}
$$

Beachte, daß $f_j(s)$ beschränkten Träger in $B_{r+1}(0)$ hat.

Sei $1\leq q\leq p$. Zwei Ungleichungen müssen wir zeigen: Die erste folgt aus Satz 5.2.2 (5.2.1)

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|f_j(s)\|_q\,ds&\leq C_{q,p,r}\int\limits_{-\gamma-1}^{\gamma+1}(\gamma+1)^j\left\|\psi\partial_s\big(\rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v}+is\mathbb{I})^{-1}f\big)\right\|_{p,2}ds\\
&\leq\frac{C_{p,r,\gamma,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\big(\|f\|_p+\|f\|_{1+\epsilon}\big)
\end{aligned}
$$

Die zweite aus Satz 5.2.2 (5.2.1) und (5.2.2):

$$
\begin{aligned}
&\sup_{h\neq0}|h|^{-\frac12}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|f_j(s+h)-f_j(s)\|_p\,ds\\
&\leq C_{p,r}\sup_{\substack{h\neq0\\|h|\leq1}}|h|^{-\frac12}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|f_j(s+h)-f_j(s)\|_p\,ds+C_{p,r}\sup_{\substack{h\neq0\\|h|\geq1}}|h|^{-\frac12}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|f_j(s+h)-f_j(s)\|_p\,ds\\
&\leq C_{p,r}\sup_{\substack{h\neq0\\|h|\leq1}}|h|^{-\frac12}\int\limits_{-\gamma-2}^{\gamma+2}\|f_j(s+h)-f_j(s)\|_p\,ds+2\frac{C_{p,r,\gamma,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}}\big(\|f\|_p+\|f\|_{1+\epsilon}\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C_{p,r} \sup_{\substack{h\neq 0\\ |h|\leq 1}} |h|^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\gamma-2}^{\gamma+2} |s|^j \Big\| \psi \partial_s \Big(\rho(s+h)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + i(s+h)\mathbb{I})^{-1} \\
&\quad - \rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + is\mathbb{I})^{-1} \Big) f \Big\|_{p,2} \, ds \\
&\quad + C_{p,r} \sup_{\substack{h\neq 0\\ |h|\leq 1}} |h|^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\gamma-2}^{\gamma+2} |(s+h)^j - s^j| \Big\| \psi \partial_s \Big(\rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + is\mathbb{I})^{-1} \Big) f \Big\|_{p,2} \, ds \\
&\quad + 2C_{p,r,\gamma,\sigma_0} \big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} \big) \\
&\leq \frac{C_{p,r,\gamma,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}} (\gamma+2)^j \big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} \big) + 2 \frac{C_{p,r,\gamma,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}} \big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} \big) \\
&\quad + C_{p,r,\gamma,\sigma_0,\epsilon} \sup_{\substack{h\neq 0\\ |h|\leq 1}} |h|^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\gamma-2}^{\gamma+2} |h| \Big| \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j}{l} s^l h^{j-k-1} \Big| \Big\| \psi \partial_s \Big(\rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + is\mathbb{I})^{-1} \Big) f \Big\|_{p,2} \, ds \\
&\leq \frac{C_{p,r,\gamma,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}} \big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} \big) + \sup_{\substack{h\neq 0\\ |h|\leq 1}} (\gamma+2)^j \int\limits_{-\gamma-2}^{\gamma+2} \Big\| \psi \partial_s \Big(\rho(s)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + is\mathbb{I})^{-1} \Big) f \Big\|_{p,2} \, ds \\
&\leq \frac{C_{p,r,\gamma,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}} \big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} \big)
\end{aligned}
$$

Damit sind die Voraussetzungen an Satz 5.2.2 erfüllt und es folgt für $1 \leq q \leq p$:

$$
\begin{aligned}
\big\| \partial_t^m J_0(t) f \big\|_q &\leq \frac{1}{t} \sum_{j=0}^m C_{m,j} \Big\| \int\limits_{\infty}^{\infty} e^{ist} f_j \, ds \Big\|_p \\
&\leq \frac{1}{t} C(1+t)^{-\frac{1}{2}} \frac{C_{p,r,\gamma,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}} \big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} \big) \\
&\leq \frac{C_{p,r,\gamma,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}} t^{-\frac{3}{2}} \big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon} \big)
\end{aligned}
$$

für $f \in H_p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$, $t \geq 1$ und $m \geq 0$.

$\square$

Satz 5.2.3 *Sei* $1 < p < \infty$, $\sigma_0 > 0$ *und* $|v_\infty| \leq \sigma_0$. *Sei* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $m \geq 1$ *und* $\mathbb{O}_{v_\infty,v} = \mathbb{P}(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \mathcal{B})$ *der volle Oseenoperator. Angenommen* $u \in \mathcal{D}(\mathbb{O}_{v_\infty,v})$ *und* $\mathbb{O}_{v_\infty,v} u \in W^{m,p}(\Omega)$. *Dann ist* $u \in W^{m+2,p}(\Omega)$ *und es ist*

(5.2.13) $$\|u\|_{p,m+2} \leq C_{p,m,\sigma_0} \big(\|\mathbb{O}_{v_\infty,v} u\|_{p,m} + \|u\|_p \big)$$

Gilt $u \in \mathcal{D}(\mathbb{O}_{v_\infty,v}^m)$, *dann ist* $u \in W^{2m,p}(\Omega)$ *und*

(5.2.14) $$\|u\|_{p,2m} \leq C_{p,m,\sigma_0} \big(\|\mathbb{O}_{v_\infty,v}^m u\|_p + \|u\|_p \big)$$

Beweis: Fast wortwörtlich wie [ShiKo, Lemma Ap.2], da $\|\mathcal{B}(u)\|_{p,m} \leq C\|u\|_{p,m+1}$.

$\square$

Hilfssatz 5.2.4 *Sei $t_0 \in \mathbb{R}^+$ beliebig, $l,m \in \mathbb{N}$ mit $l,m \geq 0$ und $T(t)$ die von $-\mathbb{O}_{v_\infty,v} = -\mathbb{P}(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \mathcal{B})$ erzeugte Halbgruppe. Dann gilt für $0 < t \leq 1$ und $a \in H_p(\Omega)$*

$$\|\partial_t^l T(t)a\|_{p,m} \leq C_{l,m,p,\sigma_0,t_0}\, t^{-(m+2l)/2}\|a\|_p \qquad \forall l,m \geq 0,\ 1 < t \leq t_0 \tag{5.2.15}$$

und insbesondere

$$\begin{aligned} \|T(t)a\|_q &\leq C_{q,p,\sigma_0,t_0}\, t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \\ \|\nabla T(t)a\|_q &\leq C_{q,p,\sigma_0,t_0}\, t^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Beweis: Sei zunächst m gerade, etwa $m = 2N$ und ohne Einschränkung $N \geq 1$. Nach Satz 5.2.3 ist

$$\|\partial_t^l T(t)a\|_{p,m} \leq C_{p,m}\big(\|\mathbb{O}_{v_\infty,v}^{l+m}T(t)a\|_p + \|T(t)a\|_p\big) = C_{p,m}\big(\|\partial_t^{l+m}T(t)a\|_p + \|T(t)a\|_p\big)$$

Es genügt daher $m = 0$ zu betrachten. Sei weiterhin o.B. $a \in \mathcal{D}(\mathbb{O}_{v_\infty,v}^2)$. Ohne Beschränkung deshalb, weil $\mathcal{D}(\mathbb{O}_{v_\infty,v}^k) \subset \mathcal{D}(T(t))$ für alle $k \in \mathbb{N}$ dicht liegt nach [Pazy, Theorem 2.7., S.: 6] . Mit der Darstellung von $T(t)$ nach [Pazy, Corollary 7.5.] ist

$$\begin{aligned} \partial_t^l T(t)a &= \partial_t^l \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}a\, d\lambda \\ &= \partial_t^l \frac{1}{2\pi i t^l}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \partial_\lambda^l\big(e^{\lambda t}\big)(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1}a\, d\lambda \end{aligned}$$

Wegen Theorem 2 können wir, wie im Beweis zu Theorem 3 ausgeführt, partiell integrieren

$$\begin{aligned} &= \partial_t^l \frac{(-1)^l l!}{2\pi i t^l}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1-l}a\, d\lambda \\ &= \frac{(-1)^l l!}{2\pi i t^l}\sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j} t^l \partial_t^j\big(t^{-l}\big)\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda t}\lambda^j(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1-l}a\, d\lambda \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Wie in [Pazy, Theorem 7.4.] zeigt man, daß

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \lambda^j e^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1-l}x\, \frac{d\lambda}{\lambda} \qquad \forall\, 0 \leq j \leq l$$

gleichmäßig in der Operatorentopologie und gleichmäßig in beschränkten Intervallen in t konvergiert. Wegen $\mathbb{O}_{v_\infty,v}x/\lambda = x - (\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda)x/\lambda$ ist

$$\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \lambda^j e^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1-l}\mathbb{O}_{v_\infty,v}a\,\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$= \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \lambda^j e^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1-l}a\,d\lambda - \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \lambda^j e^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-j}a\,\frac{d\lambda}{\lambda}$$

und somit

$$\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \lambda^j e^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1-l}a\,d\lambda =$$

$$\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \lambda^j e^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-1-l}\mathbb{O}_{v_\infty,v}a\,\frac{d\lambda}{\lambda} + \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \lambda^j e^{\lambda t}(\mathbb{O}_{v_\infty,v} + \lambda\mathbb{I})^{-j}a\,\frac{d\lambda}{\lambda}$$

wobei die beiden rechten Integrale mit jeweils $x = a$ bzw. $x = \mathbb{O}_{v_\infty,v}a$ beschränkte Operatoren sind. Somit ist auch das linke Integral ein beschränkter Operator und zusammen mit (5.2.17) folgt, daß $t^l\partial_t^l T(t)$ für $t \leq t_0$ ein beschränkter Operator ist.

Für ungerades m, etwa $m = 2N - 1$ benutzen wir ein Intepolationstheorem [Adams, Theorem 4.14]:

$$\|\partial_t^l T(t)a\|_{p,2N-1} \leq C_{p,N}t^{\frac{1}{2}}\|\partial_t^l T(t)a\|_{p,2N} + C_{p,N}t^{-N+\frac{1}{2}}\|\partial_t^l T(t)a\|_p$$

Bei dem Beweis der Aussage (5.2.16) folgen wir der Argumentation von [Iwa, Sec. 5, S.285]: Sei m die größte natürliche Zahl kleiner als $2\sigma := 3(1/p - 1/q)$ Sei zunächst m gerade. Nach (5.2.15) gilt

$$\|T(t)a\|_{p,m} \leq C_{p,m}t^{-\frac{m}{2}}\|a\|_p$$

und $\|T(t)a\|_{p,m+2} \leq C_{p,m}t^{-\frac{m+2}{2}}\|a\|_p$. Nach Soboleveinbettungstheorem und Interpolationsmethoden für Sobolevräume mit gebrochenen Potenzen (siehe [Adams, Theorem 7.57, S.: 217]) folgt

$$\|T(t)a\|_q \leq C_{q,p}\|T(t)a\|_{p,2\sigma} \leq C_{q,p}(t^{-\frac{m}{2}-1})^{1-\frac{m+2-2\sigma}{2}}(t^{-\frac{m}{2}})^{\frac{m+2-2\sigma}{2}}\|a\|_p = C_{q,p}t^{-\sigma}\|a\|_p$$

Ist m ungerade, dann ersetzte oben lediglich m durch $m - 1$.

Schließlich ist mit (5.2.15)

$$\begin{aligned}\|\nabla T(t)a\|_q = \|\nabla T(t/2)T(t/2)a\|_q \leq C_q(t/2)^{-\frac{1}{2}}\|T(t/2)a\|_q \leq C_{q,p}(t/2)^{-\frac{1}{2}}(t/2)^{-\sigma}\|a\|_p \\ \leq C_{q,p}t^{-\frac{1}{2}-\sigma}\|a\|_p\end{aligned}$$

$\square$

Nun können wir eine Folgerung aus Theorem 3 ziehen:

Folgerung 5.2.5 *Sei $1 < p < \infty$, $\epsilon > 0$ hinreichend klein, $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 1$, $v_\infty \neq 0$, $r \geq r_0$ und r_0 so groß, daß $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega \subset B_{r_0}(0)$. Sei $a \in H_p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$, $\mathbb{O}_{v_\infty,v} = \mathbb{P}(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \mathcal{B})$ der Oseenoperator und $T(t) = e^{-\mathbb{O}_{v_\infty,v}}$ die zugehörige stark stetige Halbgruppe ist. Dann gilt*

$$(5.2.18)\qquad \begin{aligned} \big\|T(t)a\big\|_{p,2N,\Omega_r} &\leq \frac{C_{p,N,r,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\,(1+t)^{-\frac{3}{2}}\big(\|a\|_{p,2N} + \|a\|_{1+\epsilon}\big) && \forall\, t \geq 1\\ \big\|\partial_t T(t)a\big\|_{p,2(N-1),\Omega_r} &\leq \frac{C_{p,N,r,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\,(1+t)^{-\frac{3}{2}}\big(\|a\|_{p,2N} + \|a\|_{1+\epsilon}\big) && \forall\, t \geq 1 \end{aligned}$$

Beweis: Bis auf die Referenzen fast wortwörtlich wie [ShiKo, Lemma 6.2].

Mit Induktion über $N \in \mathbb{N}$.

Nach Theorem 3 (5.2.9) gilt

(5.2.19)
$$\big\|\partial_t^m T(t)f\big\|_{p,2,\Omega_{r+1}} \leq \frac{C_{m,p,r,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}} t^{-\frac{3}{2}}\big(\|f\|_p + \|f\|_{1+\epsilon}\big) \qquad \forall\, t \geq 1,\ \forall\, f \in H_p(\Omega) \cap L^{1+\epsilon}(\Omega)$$

Sei

$$\varphi_N \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3) \text{ Abschneidefunktion mit } \qquad \varphi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq r + \frac{1}{N+1}\\ 0 & \text{für } |x| \geq r + \frac{1}{N} \end{cases}$$

Nach Definition von $T(t) = e^{-\mathbb{O}_{v_\infty,v}}$ erfüllt $u(t,x) := T(t)a$ die Gleichung

$$(5.2.20)\qquad \begin{aligned} &\partial_t u + (-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \mathcal{B})u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 && \text{in } (0,\infty) \times \Omega\\ &u|_{\partial\Omega} = 0 && \text{in } (0,\infty) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

mit geeignetem Druck $p(t,x)$. Nach Abzug einer Konstanten $c = c(t)$ können wir o.B. annehemen, daß

$$\int_{\Omega_r} p(t,x)\, dx = 0$$

Sei

$$(5.2.21)\qquad w_N(t,x) := \partial_t^m\Big(\varphi_N u - \mathbb{B}\big((\nabla\varphi_N) \cdot u\big)\Big)$$

Offensichtlich ist w_N nach Folgerung 5.1.2 divergenzfrei. Es ist für $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} -\Delta w_N &+ \nabla(\varphi_N \partial_t^m p)\\ &= -\Delta\big(\partial_t^m \varphi_N u\big) + \Delta\Big(\partial_t^m \mathbb{B}\big((\nabla\varphi_N) \cdot u\big)\Big) + \nabla(\varphi_N \partial_t^m p)\\ &= -\partial_t^m(\Delta\varphi_N)u - \partial_t^m \varphi_N(\Delta u) + 2\partial_t^m(\nabla\varphi_N) \cdot (\nabla u) + \Delta\Big(\partial_t^m \mathbb{B}\big((\nabla\varphi_N) \cdot u\big)\Big)\\ &\quad + \partial_t^m(\nabla\varphi_N)p + \partial_t^m \varphi_N(\nabla p) \end{aligned}$$

Ersetze Δu mit (5.2.20)

$$\begin{aligned}
&= -\partial_t^m(\Delta\varphi_N)u - \partial_t^{m+1}\varphi_N u - \partial_t^m\varphi_N\big((v_\infty\cdot\nabla)u\big) - \partial_t^m\varphi_N(\mathcal{B}u) - \partial_t^m\varphi_N(\nabla p)\\
&\quad + 2\partial_t^m(\nabla\varphi_N)\cdot(\nabla u) + \Delta\Big(\partial_t^m\mathbb{B}\big((\nabla\varphi_N)\cdot u\big)\Big) + \partial_t^m(\nabla\varphi_N)p + \partial_t^m\varphi_N(\nabla p)\\
&= -\partial_t^m(\Delta\varphi_N)u - \partial_t^{m+1}\varphi_N u - \partial_t^m\varphi_N\big((v_\infty\cdot\nabla)u\big) - \partial_t^m\varphi_N(\mathcal{B}u)\\
&\quad + 2\partial_t^m(\nabla\varphi_N)\cdot(\nabla u) + \Delta\Big(\partial_t^m\mathbb{B}\big((\nabla\varphi_N)\cdot u\big)\Big) + \partial_t^m(\nabla\varphi_N)p\\
&:= h_N(t,x)
\end{aligned}$$

Also

$$(5.2.22) \qquad -\Delta w_N + \nabla(\varphi_N\partial_t^m p) = h_N(t,x), \qquad \operatorname{div} w_N = 0, \qquad w_N|_{\partial\Omega_{r+\frac{1}{N}}} = 0$$

Für die m-te Ableitung des Drucktermes nach der Zeit gilt nach (5.2.19) und (5.2.20)

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t^m\nabla p\|_{p,\Omega_{r+1}}\\
&\quad = \big\|\partial_t^m\big(\partial_t - \Delta + v_\infty\cdot\nabla + \mathcal{B}\big)u\big\|_{p,\Omega_{r+1}}\\
&\quad \le \big\|\partial_t^{m+1}u\big\|_{p,\Omega_{r+1}} + \big\|\partial_t^m u\big\|_{p,2,\Omega_{r+1}} + |v_\infty|\big\|\partial_t^m u\big\|_{p,1,\Omega_{r+1}} + C_{p,v}\big\|\partial_t^m u\big\|_{p,1,\Omega_{r+1}}\\
&\quad \le \frac{C_{p,r,m,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\, t^{-\frac{3}{2}}\big(\|a\|_p + \|a\|_{1+\epsilon}\big) \qquad \forall t\ge 1
\end{aligned}$$

Da o.B. p auf Ω_r mittelwertfrei angenommen werden konnte, folgt mit *Poincare* Ungleichung (2.0.16)

$$\|\partial_t^m p\|_{p,\Omega_{r+1}} \le C_r\Big(\big\|\nabla\partial_t^m p\big\|_{p,\Omega_{r+1}} + \underbrace{\Big|\int_{\Omega_r} p\,dx\Big|}_{=0}\Big) \le \frac{C_{p,r,m,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\, t^{-\frac{3}{2}}\big(\|a\|_p + \|a\|_{1+\epsilon}\big) \quad \forall t\ge 1$$

Also

$$(5.2.23) \qquad \|\partial_t^m p\|_{p,1,\Omega_{r+1}} \le \frac{C_{p,r,m,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\, t^{-\frac{3}{2}}\big(\|a\|_p + \|a\|_{1+\epsilon}\big) \qquad \forall t\ge 1,\ m\ge 0$$

Und nach Folgerung 5.1.2, (5.2.23) und (5.2.19) ist

$$(5.2.24) \qquad \|h_N(t,x)\|_{p,1} \le \frac{C_{p,r,m,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\, t^{-\frac{3}{2}}\big(\|a\|_p + \|a\|_{1+\epsilon}\big) \qquad \forall t\ge 1,\ m\ge 0$$

Wegen $w_N(t,x) = \partial_t^m u(t,x)$ auf $\Omega_{r+\frac{1}{N+1}}$ folgt aus Satz 2.0.7 (2.0.15)

$$\begin{aligned}
&\big\|\partial_t^m u(t,.)\big\|_{p,3,\Omega_{r+\frac{1}{N+1}}} + \big\|\partial_t^m p\big\|_{p,2,\Omega_{r+\frac{1}{N+1}}} \le \|h_N(t,x)\|_{p,1}\\
(5.2.25) \qquad &\qquad \le \frac{C_{p,r,m,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\, t^{-\frac{3}{2}}\big(\|a\|_p + \|a\|_{1+\epsilon}\big) \quad \forall t\ge 1,\ m\ge 0
\end{aligned}$$

Angenommen es gilt

$$(5.2.24') \qquad \|h_N(t,x)\|_{p,N} \le \frac{C_{p,r,m,\sigma_0,\epsilon,N}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\, t^{-\frac{3}{2}}\big(\|a\|_p + \|a\|_{1+\epsilon}\big) \qquad \forall t\ge 1,\ m\ge 0,\ N\ge 1$$

(5.2.25') $$\left\|\partial_t^m u(t,.)\right\|_{p,N+2,\Omega_{r+\frac{1}{N+1}}} + \left\|\partial_t^m p\right\|_{p,N+1,\Omega_{r+\frac{1}{N+1}}} \le \frac{C_{p,r,m,\sigma_0,\epsilon,N}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\, t^{-\frac{3}{2}}\left(\|a\|_p + \|a\|_{1+\epsilon}\right) \quad \forall t \ge 1,\ m \ge 0,\ N \ge 1$$

Dann ist wegen (5.2.25') anaolg zu (5.2.24)

$$\|h_N(t,x)\|_{p,N+1} \le C\left\|\partial_t^m u\right\|_{p,N+2,\Omega_{r+\frac{1}{N+1}}} \le \frac{C_{p,r,m,\sigma_0,\epsilon,N}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\, t^{-\frac{3}{2}}\left(\|a\|_p + \|a\|_{1+\epsilon}\right) \quad \forall t \ge 1,\ m \ge 0$$

woraus analog zu (5.2.25) wegen $w_{N+1}(t,x) = \partial_t^m u(t,x)$ auf $\Omega_{r+\frac{1}{N+2}}$ folgt

$$\left\|\partial_t^m u(t,.)\right\|_{p,N+3,\Omega_{r+\frac{1}{N+2}}} + \left\|\partial_t^m p\right\|_{p,N+2,\Omega_{r+\frac{1}{N+2}}} \le \frac{C_{p,r,m,\sigma_0,\epsilon,N}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\, t^{-\frac{3}{2}}\left(\|a\|_p + \|a\|_{1+\epsilon}\right) \quad \forall t \ge 1,\ m \ge 0$$

Insgesamt zeigt (5.2.24), (5.2.25) die Gleichungen (5.2.24') und (5.2.25') im Fall $N = 1$ und mit Induktion folgt (5.2.25') für alle $N \in \mathbb{N}$ und insbesondere wegen $\|.\|_{p,N,\Omega_r} \le \|.\|_{p,N,\Omega_{r+\frac{1}{N}}}$

(5.2.26) $$\begin{aligned} \|T(t)a\|_{p,2N,\Omega_r} &\le \frac{C_{p,r,m,\sigma_0,\epsilon,N}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\, t^{-\frac{3}{2}}\left(\|a\|_p + \|a\|_{1+\epsilon}\right) && \forall t \ge 1,\ m \ge 0 \\ \|\partial_t T(t)a\|_{p,2N-2,\Omega_r} &\le \frac{C_{p,r,m,\sigma_0,\epsilon,N}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\, t^{-\frac{3}{2}}\left(\|a\|_p + \|a\|_{1+\epsilon}\right) && \forall t \ge 1,\ m \ge 0 \end{aligned}$$

Das zeigt (5.2.18) □

Hilfssatz 5.2.6 *Sei $1 < p < \infty$, $N \in \mathbb{N}$ mit $N \ge 0$ und $a \in \mathcal{D}(\mathbb{O}^N_{v_\infty,v})$. Dann gilt*

(5.2.27) $$\|T(t)a\|_{p,2N} + \|\partial_t T(t)a\|_{p,2N-2} \le C_{p,N,\sigma_0}\|a\|_{p,2N} \qquad \forall\, t \ge 0$$

Beweis: Wir benutzen die Tatsache, daß die Halbgruppe mit dem erzeugenden Operator vertauscht.

Nach Hilfssatz 5.2.4 (5.2.15) ist

$$\begin{aligned} \|T(t)a\|_{p,2N} &\le C_{p,N}\left(\|\mathbb{O}^N_{v_\infty,v}T(t)a\|_p + \|T(t)a\|_p\right) \\ &= C_{p,N}\left(\|T(t)\mathbb{O}^N_{v_\infty,v}a\|_p + \|a\|_p\right) \\ &= C_{p,N}\left(\|\mathbb{O}^N_{v_\infty,v}a\|_p + \|a\|_p\right) \\ &\le C_{p,N,\sigma_0}\|a\|_{p,2N} \end{aligned}$$

Nach Definition von $T(t)$ als Lösung der Oseengleichung gilt

$$\begin{aligned} \|\partial_t T(t)a\|_{p,2N-2} &= \|\mathbb{O}_{v_\infty,v}T(t)a\|_{p,2N-2} \\ &\le \|\mathbb{A}T(t)a\|_{p,2N-2} + \|(v_\infty\cdot\nabla)T(t)a\|_{p,2N-1} + \|\mathcal{B}T(t)a\|_{p,2N-2} \\ &\le \|T(t)a\|_{p,2N} + |v_\infty|\|T(t)a\|_{p,2N-1} + C_{p,v}\|T(t)a\|_{p,2N-1} \\ &\le C_{p,N,\sigma_0}\|a\|_{p,2N} \end{aligned}$$

□

5.3 $L^p - L^q$ Abschätzung der vollen, nicht-stationären Oseen Gleichung

Ziel dieses letzten Kapitels zur Oseengleichung ist es, $L^p - L^q$ Abschätzungen für die Halbgruppe des Oseenoperators $\mathbb{O}_{v_\infty,v} = \mathbb{P}(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \mathcal{B})$ im Außenraum Ω zu erhalten. Dabei ist $\mathcal{B} = \nabla(v \otimes . + . \otimes v)$ der schiefsymmetrische Teil wobei v die in Definition 2.0.4 genannten Regularitätseigenschaften besitzt. Der lineare Oseenoperator ohne $\mathcal{B}$ wurde ausführlich in [ShiKo] behandelt. Die eigentliche Arbeit, die Aussagen von dem einfachen auf den vollen Operator auszudehnen, wurde in Kapitel 4.1, 4.2, 4.3 und teilweise in Kapitel 3 und 5.1 getan.

Wir werden hier entscheidend die Tatsache benutzen, daß uns eine Lösung der einfachen Oseengleichung im Ganzraum $\mathbb{R}^3$ explizit vorliegt. Sei nämlich

$$\vartheta(t,x) := S_{v_\infty}(t)a := \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-|x-tv_\infty-y|^2/(4t)} a(y)\, dy \tag{5.3.1}$$

für $a \in H_p(\mathbb{R}^3)$. Dann löst ϑ die lineare, nicht-stationäre Oseen Gleichung

$$\begin{aligned} &\partial_t\vartheta - \Delta\vartheta + (v_\infty \cdot \nabla)\vartheta = 0, \quad \operatorname{div}\vartheta = 0 && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \\ &\vartheta(0,x) = a(x) && \text{in } \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Für $\partial_t^j \partial_x^\alpha \vartheta$ gelten die in [ShiKo, Lemma 6.1] angegebenen $L^p - L^q$ Abschätzungen. Diese sind dann auch das Nadelöhr der $L^p - L^q$ Abschätzungen der Oseenhalbgruppe:

$$\left\|\partial_t^j \partial_x^\alpha S(t)a\right\|_q \le C_{j,\alpha,p,q,\sigma_0} t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{j+|\alpha|}{2}} \|a\|_p \quad \forall a \in H_p(\mathbb{R}^3), t \ge 1 \tag{5.3.3}$$

$$\left\|\partial_t^j \partial_x^\alpha S(t)a\right\|_p \le C_{j,\alpha,p,\sigma_0} \|a\|_{p,2j+|\alpha|} \quad \forall a \in H_p(\mathbb{R}^3) \cap W^{2j+|\alpha|,p}(\mathbb{R}^3), t \ge 0 \tag{5.3.4}$$

$$\left\|\partial_x^\alpha S(t)a\right\|_p \le 1 \left\|\partial_x^\alpha a\right\|_p \quad \forall a \in H_p(\mathbb{R}^3) \cap \hat{W}^{|\alpha|,p}(\mathbb{R}^3), t \ge 0 \tag{5.3.5}$$

Zunächst ein paar allgemeine Aussagen

Hilfssatz 5.3.1 *Sei $\alpha, \beta \ge 0$. Dann gilt*

(5.3.6)
$$\int\limits_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta}\, ds \le C_{\alpha,\beta}(1+t)^{-\nu} \qquad \nu \le \beta \textit{ und } \nu < \alpha+\beta-1$$

(5.3.7)
$$\int\limits_{0}^{t} (1+t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta}\, ds \le C_{\alpha,\beta}(1+t)^{-\nu} \qquad \begin{aligned} &\big(\nu \le \min\{\alpha,\beta\} \textit{ und } \nu < \alpha+\beta-1\big) \\ &\textit{oder } \big(\nu \le \alpha+\beta-1, \textit{ falls } \alpha,\beta < 1\big) \end{aligned}$$

$$\int\limits_{0}^{t} (t-s)^{-\alpha} s^{-\beta}\, ds \le C_{\alpha,\beta} t^{-\nu} \qquad \nu \le \alpha+\beta-1 \textit{ falls } \alpha,\beta < 1 \tag{5.3.8}$$

Beweis: Behandeln wir zuerst (5.3.6). Dann ist $0 \le \nu < \alpha + \beta - 1$ und $\varphi := \alpha + \beta - \nu > 1$. Es ist nach Definition $\varphi - \beta = \alpha - \nu$ und $\varphi - \alpha = \beta - \nu$. Somit

$$\begin{aligned}
&\int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta}\, ds \\
&\qquad \le \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\nu} \int_{\frac{t}{2}}^{t} (1+t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta+\nu}\, ds \\
&\qquad \le \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\nu} + \underbrace{\max_{t/2\le s\le t} \left\{(1+t-s)^{-\alpha+\varphi}(1+s)^{-\beta+\nu}\right\}}_{=1\text{ , da } \nu\le\beta \text{ und } -\alpha+\varphi=-(-\beta+\nu)} \int_{\frac{t}{2}}^{t} (1+t-s)^{-\varphi}\, ds
\end{aligned}$$

Substitution von $s = t - \tilde{s}$

$$\begin{aligned}
&\le 2\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\nu} \int_{0}^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-\varphi}\, ds \\
&\le 2\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\nu} \int_{0}^{\infty} (1+s)^{-\varphi}\, ds \\
&= C_{\alpha,\beta}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\nu} \\
&\le C_{\alpha,\beta}\,(1+t)^{-\nu}
\end{aligned}$$

für alle $\nu \le \beta$ und $\nu < \alpha + \beta - 1$. Substitution von $\tilde{s} = t - s$ zeigt

$$\int_{0}^{t/2} (1+t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta}\, ds = \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\beta}(1+s)^{-\alpha}\, ds \le C_{\alpha,\beta}\,(1+t)^{-\nu}$$

für alle $\nu \le \alpha$ und $\nu < \alpha + \beta - 1$. Zusammen mit (5.3.6) zeigt den oberen Teil von (5.3.7).

Zu (5.3.8): Seien nun $\alpha < 1$ und $\beta < 1$. Substitution $s = t\sigma$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{t} (t-s)^{-\alpha} s^{-\beta}\, ds = t\int_{0}^{1} (t-\sigma t)^{-\alpha}(\sigma t)^{-\beta}\, d\sigma &= t^{1-\alpha-\beta}\int_{0}^{1} (t-\sigma)^{-\alpha}\sigma^{-\beta}\, ds \\
&\le t^{1-\alpha-\beta}\int_{0}^{1} (t-\sigma)^{-\alpha}\sigma^{-\beta}\, ds
\end{aligned}$$

Das Integral ist die wohlbekannte Betafunktion, die für Werte $\alpha, \beta < 1$ definiert ist.

$$= C_{\alpha,\beta} t^{1-\alpha-\beta}$$

Bleibt den unteren Teil von (5.3.7) zu zeigen: Substitution $s = \tilde{s} - 1$, $t = \tilde{t} - 2$ und Anwendung von (5.3.8)

$$\begin{aligned}
\int_0^t (1+t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta}\,ds &= \int_1^{t+1} (2+t-s)^{-\alpha}s^{-\beta}\,ds = \int_1^{\tilde{t}-1} (\tilde{t}-s)^{-\alpha}s^{-\beta}\,ds \\
&\leq \int_0^{\tilde{t}} (\tilde{t}-s)^{-\alpha}s^{-\beta}\,ds \leq C_{\alpha,\beta}\tilde{t}^{1-\alpha-\beta} \\
&\leq C_{\alpha,\beta}(1+t)^{1-\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

□

Hilfssatz 5.3.2 *Sei $0 < \epsilon \leq 2^{-\alpha}$, $k \in \mathbb{Z}$ und $\alpha \geq 0$. Es gelte für eine stetig, positive, durch C beschränkte reelle Funktion $f(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$*

$$f(t) \leq \epsilon \sup_{\tilde{t}\in[t/2,t]} f(\tilde{t}) + t^{-\alpha} \qquad \forall\, t \geq 2^{k-1}$$

Dann ist

$$f(t) \leq\ 2\,\frac{C+1}{1-\delta}(1+t)^{-\min\{\alpha,\beta\}} \quad \forall 2^k \leq t \leq 2^n,\ n > k,$$

$$\textit{wobei } \beta = \frac{n-k}{n}\ \log_2\left(\frac{1}{\epsilon}\right),\ \delta = \epsilon 2^{\alpha}$$

Unter den Voraussetzungen kann insbesondere $\beta = \alpha$ gesetzt werden, falls die Funktionalungleichung für $t > 0$ gilt oder ϵ hinreichend klein ist.

Beweis: Sei o.B. $n > k$. $\forall t \leq 2^n$ gilt $\epsilon^{n-k} \leq t^{-\beta}$, denn

$$\Leftarrow\ \epsilon^{n-k} = 2^{-n\beta} \iff (n-k)\log\epsilon = -n\beta\log 2 \iff \beta = \frac{n-k}{n}\,\frac{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\log 2}$$

Sei $2^{n-1} < t \leq 2^n$ und schreibe $\epsilon = \delta 2^{-\alpha}$ mit einem geeigneten $0 < \delta < 1$. Durch $n-k$-fache Iteration folgt

$$\begin{aligned}
f(t) &\leq \epsilon^{n-k} \sup_{\tilde{t}\in[t/2^{n-k},t]} f(\tilde{t}) + \sum_{i=0}^{n-k-1} \epsilon^i \left(\frac{t}{2^i}\right)^{-\alpha} \\
&\leq \epsilon^{n-k} \sup_{\tilde{t}\in[t/2^{n-k},t]} f(\tilde{t}) + \sum_{i=0}^{n-k-1} \delta^i t^{-\alpha} \\
&\leq\ \epsilon^{n-k}C + \frac{1}{1-\delta}t^{-\alpha} \\
&\leq\ t^{-\beta}C + \frac{1}{1-\delta}t^{-\alpha}
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

□

Sowohl Theorem 3 als auch die Folgerung 5.2.5 geben Auskunft über das Verhalten der Oseenhalbgruppe in einem beschränkten Gebiet. Der Verdacht liegt nahe, daß die dem $\mathcal{B}$ zugrundeliegende Funktion v weit draußen, also für $|x| >> 1$ nur noch geringen Einfluß auf das Verhalten im beschränkten Gebiet hat.

Schmiert man die Funktion v mit einer Abschneidefunktion $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$, $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leq R$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq R+1$, $R >> 1$ ab, also $B^0 u := \nabla(\varphi v \otimes u + u \otimes \varphi v)$ und betrachtet eine Lösung u der Oseengleichung $u_t - \Delta u + v_\infty \cdot u + \mathcal{B}u + \nabla p = 0$, sowie eine Lösung u^0 der Oseengleichung $u_t^0 - \Delta u^0 + v_\infty \cdot u^0 + \mathcal{B}^0 u^0 + \nabla p^0 = 0$, so sind diese Funktionen auch in einem beschränkten Gebiet $B_r(0)$, $r << R$ nicht (!) notwendig identisch.

Genauer gesagt werden wir zeigen, daß die mit $\mathcal{B}^\infty$ gestörte einfache Oseengleichung in $\mathbb{R}^3$ noch ähnliche Eigenschaften wie die ungestörte hat. Anschließend führt ein Vergleich zwischen einer Lösung der vollen Oseengleichung in Ω und einer Lösung der gestörten Gleichung zum gewünschten Resultat.

Daß aber gewisse Eigenschaften erhalten bleiben und daß man überhaupt abschneiden darf, ist Aussage der nächsten Sätze.

Definition 5.3.3 ($\mathcal{B} = \mathcal{B}^0 + \mathcal{B}^\infty$) *Sei $R > 0$, $\epsilon > 0$, $\mathcal{B}$ der in Definition 2.0.4 definierte Operator und $\varphi_R \in \mathcal{C}_0^\infty$ eine Abschneidefunktion mit $\varphi_R(x) = 1$ für $|x| \leq R$ und $\varphi_R(x) = 0$ für $|x| \geq R+1$. Dann gibt es ein $R_0 > 0$, so daß für die Reynoldszahlen der Operatoren*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_R^0 u &:= \nabla\big(\varphi_R v \otimes u + u \otimes \varphi_R v\big) \\ \mathcal{B}_R^\infty u &:= \nabla\big((1-\varphi_R)v \otimes u + u \otimes (1-\varphi_R)v\big) \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

gilt $\mathrm{Re}_{\mathrm{E}}(\mathcal{B}_R^\infty) \leq \epsilon$ und $\mathrm{Re}_{\mathrm{E}}(\mathcal{B}_R^0) \leq 1+\epsilon$ für alle $R \geq R_0$. Außerdem ist $\mathcal{B}_R u = \mathcal{B}^0 u + \mathcal{B}^\infty u$. Insbesondere $\mathrm{Re}_{\mathrm{E}}(\mathcal{B}_R^N) < 1$, $N = 0, \infty$, falls R_0 hinreichend groß ist.

Fixieren wir ein solches $R \geq R_0$, so lassen wir den Index R auch weg.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{B}u &= \nabla\big(v \otimes u + u \otimes v\big) \\ &= \nabla\Big(\big(\varphi + (1-\varphi)\big)v \otimes u + u \otimes \big(\varphi + (1-\varphi)\big)v\Big) \\ &= \nabla\Big((1-\varphi)v \otimes u + u \otimes (1-\varphi)v + \varphi v \otimes u + u \otimes \varphi v\Big) \\ &= \mathcal{B}_R^0 u + \mathcal{B}_R^\infty u \end{aligned}$$

Sei $0 < \epsilon$. Es ist mit partielle Integration, *Hölder* und *Sobolev*ungleichung

$$\begin{aligned}
| < \mathcal{B}_R^\infty u, u > | &= \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \Big(\nabla \big((1-\varphi_R) v \otimes u + u \otimes (1-\varphi_R) v \big) \Big) \cdot u \, dx \Big| \\
&= \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \big((1-\varphi_R) v \otimes u + u \otimes (1-\varphi_R) v \big) \sum_{\substack{i=1 \\ |\alpha_i|=1}}^{3} c_i \partial_x^{\alpha_i} u \, dx \Big| \\
&\le C \|(1-\varphi_R)\|_\infty \|v\|_{3,\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \|u\|_6 \|\nabla u\|_2 \\
&\le C \|v\|_{3,\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \|\nabla u\|_2^2 \\
&\le \epsilon \|\nabla u\|_2^2
\end{aligned}$$

für hinreichend großes R, etwa $R \ge R_0$, da $\|v\|_{3,\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \to 0$ für $R \to \infty$. Insbesondere ist $\mathrm{Re}_{\mathrm{E}}(\mathcal{B}_R^\infty) \le \epsilon$ für $R \ge R_0$.

Es folgt

$$- < \mathcal{B}_R^0 u, u > = - < \mathcal{B} u, u > + < \mathcal{B}_R^\infty u, u > \le \mathrm{Re}_{\mathrm{E}}(\mathcal{B}) \|\nabla u\|_2^2 + \epsilon \|\nabla u\|_2^2$$

Also ist $\mathrm{Re}_{\mathrm{E}}(\mathcal{B}_R^0) \le \mathrm{Re}_{\mathrm{E}}(\mathcal{B}) + \epsilon$, $\forall R \ge R_0$.

$\square$

Hilfssatz 5.3.4 *Sei $m \in \mathbb{N}$, $v \in L^p(\Omega)$, $\forall p > 2$ und $\nabla^j v \in L^p(\Omega)$, $\forall p > 4/3,\ 1 \le j \le m$. Sei $\varphi_R \in \mathcal{C}_0^\infty$ eine Abschneidefunktion mit $\varphi_R(x) = 1$ für $|x| \le R$, $\varphi_R(x) = 0$ für $|x| \le R+1$ und $\|\nabla^m \varphi_R\|_\infty \le C_m$ mit einer von R unabhängigen Konstanten. Dann gibt es eine aufsteigende Teilfolge $(R_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, so daß*

$$\text{(5.3.10)} \qquad \big\| \nabla^m \big((1-\varphi_{R_i}) v \big) \big\|_q \to 0 \quad (i \to \infty) \qquad \forall \begin{array}{ll} q > 2 & \textit{falls } m = 0 \\ q > \frac{4}{3} & \textit{falls } m \ge 1 \end{array}$$

Beweis: Zur Existenz solcher Abschneidefunktionen siehe [Hörmander]. Für $m = 0$ ist die Aussage offensichtlich. Sei o.B. $m \ge 1$. $\nabla^m \varphi_{R_i}$ hat Träger in $B_{R+1}(0) \setminus B_R(0)$. Nach Voraussetzung und wegen $|B_{R+1}(0) \setminus B_R(0)| = CR^2$ ist $\|\nabla^m \varphi_{R_i}\|_r \le C_r R^{\frac{2}{r}}$.

Für ein $a \in W^{m,p}(\Omega)$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \int_{B_{n+1} \setminus B_n} |a(x)|^p + \ldots + |\nabla^m a(x)|^p \, dx$. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_i} \le (n_i)^{-1}$ andernfalls

$$C = \|a\|_{p,m}^p \ge \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_{n+1} \setminus B_n} |a(x)|^p + \ldots + |\nabla^m a(x)|^p \, dx \; = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \ge \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-1} = \infty$$

Widerspruch!

Wähle zu $q > 4/3$ eine Zahl $p > 2$, so daß $q > 2p/3$ und setze $r = pq/(p-q)$. Dann ist

$$q > \frac{2}{3} p \iff 2p - 2q < q \iff \frac{2(p-q)}{pq} < \frac{1}{p} \iff \frac{2}{r} - \frac{1}{p} < 0$$

Sei $(a_{R_i})_{i\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge zu $a = v \in W^{m,p}$, $p > 2$.

Es folgt für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^3$ mit $|\alpha| = m \geq 1$, $|\beta| = k \geq 0$

$$\left\|(\partial_x^\alpha \varphi_{R_i})(\partial_x^\beta v)\right\|_q \leq C_{q,r,p} \|\partial_x^\alpha \varphi_{R_i}\|_r \|\partial_x^\beta v\|_p \leq C_{q,r,p} R_i^{\frac{2}{r}-\frac{1}{p}} \to 0 \qquad (i \to \infty)$$

Die Behauptung folgt, wegen

$$\left\|\nabla^m\big((1-\varphi_{R_i})v\big)\right\|_q^q = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} \left\|(\partial_x^\alpha \varphi_{R_i})(\partial_x^\beta v)\right\|_q^q$$

□

Satz 5.3.5 *Sei $1 < p < \infty$, $j, m \in \mathbb{N}$ mit $j \geq 0$, $m \geq 0$ und $a \in H_p(\mathbb{R}^3)$. Seien R, R_0 Elemente aus der Teilfolge von Hilfssatz 5.3.4 zu $m = 2$ und R_0 hinreichend groß mit $R \geq R_0$. Das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} &\partial_t \vartheta^\infty - \Delta\vartheta^\infty + (v_\infty \cdot \nabla)\vartheta^\infty + \mathcal{B}_R^\infty \vartheta^\infty + \nabla p = 0, \quad \textit{div}\, \vartheta^\infty = 0 && \textit{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \\ &\vartheta^\infty(0,x) = a(x) && \textit{in } \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

besitzt eine eindeutige Lösung ϑ^∞ mit Lösungsoperator $\vartheta^\infty(t,x) = S^\infty_{v_\infty,v,R}(t)a(x)$. und es gilt für alle $t \geq 1$

$$\left\|\partial_t^j S^\infty(t)a\right\|_{q,m} \leq C_{j,m,p,q,\sigma_0,R_0}(1+t)^{-\frac{j}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \qquad \forall\, 1 < p \leq q < \infty \tag{5.3.12}$$

$$\left\|\nabla\partial_t^j S^\infty(t)a\right\|_{q,m} \leq C_{j,m,p,q,\sigma_0,R_0}(1+t)^{-\frac{j+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \qquad \forall\, 1 < p \leq q < 3 \tag{5.3.13}$$

Ist darüber hinaus $a \in \mathcal{D}_p(\mathbb{O}^{\infty\ N}_{v_\infty,v,R}) = W^{2N,p}(\mathbb{R}^3) \cap H_p(\mathbb{R}^3)$, wobei mit $\mathbb{O}^\infty_{v_\infty,v,R} = \mathbb{P}_{\mathbb{R}^3}\big(-\Delta + (v_\infty\cdot\nabla) + \mathcal{B}_R^\infty\big)$ ein voller Oseenoperator in $\mathbb{R}^3$ gemeint ist, so gilt für $t \geq 0$

(5.3.14)
$$\|\partial_t^j \vartheta^\infty(t)\|_{q,m} \leq C_{p,q,m,j,\sigma_0}\|a\|_{p,[m+3\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)]+2j} \quad \forall\, t \geq 0,\ 1 < p \leq q \leq \infty,\ p \neq \infty,\ m \geq 0$$

wobei mit $[n]$ die kleinste, natürliche, gerade Zahl, größer als n gemeint ist.

Beweis: Die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung von Gleichung (5.3.11) ist gegeben durch (5.2.11) bzw. [Pazy, Corollary 7.5] für $\Omega = \mathbb{R}^3$. Nennen wir den Lösungsoperator $\vartheta^\infty(t,x)$ $= S^\infty_{v_\infty,v}(t)a(x)$.

In $\mathbb{R}^3$ ist der Projektor auf den divergenzfreien Teil explizit gegeben durch

$$\mathbb{P}f = f - \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi\big(\xi\cdot\mathcal{F}(f)\big)}{|\xi|^2}\right)$$

Offensichtlich vertauscht $\mathbb{P}$ mit Ableitungen ∂_x^α, d.h. $\mathbb{P}(\partial_x^\alpha f) = \partial_x^\alpha \mathbb{P}(f)$.

$\partial_t^j \partial_x^\alpha S^\infty(t)$ ist ein Faltungsintegral und vertauscht daher auch mit der Ableitung ∂_x^α.

Die Aussage $\mathcal{D}_p({\mathbb{O}_{v_\infty,v,R}^\infty}^N) = W^{2N,p}(\mathbb{R}^3) \cap H_p(\mathbb{R}^3)$ ist offensichtlich, da in $\mathbb{R}^3$ die Räume $W^{m,p}(\mathbb{R}^3)$ und $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^3)$ identisch sind.

Zeigen wir zunächst (5.3.14): Sei $1 < p \leq q < \infty$ Für $j \leq 1$ und $q = p \neq \infty$ folgt dies aus (5.2.27). Sei l die kleinste, natürliche Zahl, größer gleich $3\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. Nach Soboleveinbettung und Interpolationstheoreme

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^j S^\infty(t)a\|_{q,m} &\leq C_{p,q}\|\partial_t^j S^\infty(t)a\|_{p,l+m} \\
&= C_{p,q}\|\partial_t^j S^\infty(t)a\|_{p,l+m} \\
&= C_{p,q}\|{\mathbb{O}_{v_\infty,v,R}^\infty}^j S^\infty(t)a\|_{p,l+m} \\
&\leq C_{p,q}\|S^\infty(t)a\|_{p,l+2j+m} \\
&\leq C_{p,q,m,j}\|a\|_{p,[l+2j+m]}
\end{aligned}$$

nach (5.2.27).

Setzen wir $b := S^\infty(1)a$ und lösen das modifizierte Gleichungssystem

$$\text{(5.3.11')} \quad \begin{array}{lll} \partial_t\vartheta^\infty - \Delta\vartheta^\infty + (v_\infty \cdot \nabla)\vartheta^\infty + \mathcal{B}_R^\infty\vartheta^\infty + \nabla p = 0, & \operatorname{div}\vartheta^\infty = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \\ \vartheta^\infty(0,x) = b(x) & & \text{in } \mathbb{R}^3 \end{array}$$

und zeigen die Gleichungen

$$\text{(5.3.12')} \qquad \left\|\partial_t^j S^\infty(t)b\right\|_{q,m} \leq C_{j,m,p,q,\sigma_0,R_0}(1+t)^{-\frac{j}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \qquad \forall\, 1 < p \leq q < \infty$$

$$\text{(5.3.13')} \qquad \left\|\nabla\partial_t^j S^\infty(t)b\right\|_{q,m} \leq C_{j,m,p,q,\sigma_0,R_0}(1+t)^{-\frac{j+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \qquad \forall\, 1 < p \leq q < 3$$

für $t \geq 0$. Wegen $\vartheta^\infty(t) = S^\infty(t)b = S^\infty(t+1)a$ folgt dann (5.3.12) und (5.3.13) für $t \geq 1$. Nach (5.2.15) ist

$$\text{(5.3.15)} \qquad \|b\|_{p,m} \leq C_{p,m,\sigma_0}\|a\|_p \qquad \forall m \geq 0$$

und analog zu (5.3.14) ist

$$\|\partial_t^j\vartheta^\infty(t)\|_{q,m} = \|S^\infty(t)b\|_{q,m} \leq C_{p,q,m,j}\|b\|_{p,[l+2j+m]} \leq C_{p,m,\sigma_0}\|a\|_p$$

also

$$\text{(5.3.16)} \qquad \|\partial_t^j\vartheta^\infty(t)\|_{q,m} \leq C_{p,m,\sigma_0}\|a\|_p$$

Sei $1 < p \leq q \leq \infty$, $p \neq \infty$. Für $t \geq 1$ ist wegen (5.3.3) und (5.3.16)

$$\begin{aligned}
\|\left(\partial_x^\alpha S_{v_\infty}(t)\right)\vartheta^\infty(t)\|_q &\leq C_{p,q,|\alpha|,\sigma_0} t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{|\alpha|}{2}}\|\vartheta^\infty(t)\|_p \\
&\leq C_{p,q,|\alpha|,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{|\alpha|}{2}}\|a\|_p
\end{aligned}$$

und für $0 \le t < 1$ existiert Sobolev und Interpolationstheorie ein $l \le 3$, so daß nach (5.3.4) und (5.3.16) gilt

$$\begin{aligned} \|\big(\partial_x^\alpha S_{v_\infty}(t)\big)\vartheta^\infty(t)\|_q &\le C_{q,\alpha,\sigma_0}\|\vartheta^\infty(t)\|_{q,|\alpha|} \le C_{p,q,|\alpha|,\sigma_0}\|\vartheta^\infty(t)\|_{p,|\alpha|+l} \\ &\le C_{p,q,|\alpha|,\sigma_0}\|a\|_p \end{aligned}$$

Also insgesamt $\forall 1 < p \le q \le \infty$, $p \ne \infty$ und $\alpha \in \mathbb{N}^3$ mit $|\alpha| \ge 0$ gilt

$$\|\big(\partial_x^\alpha S_{v_\infty}(t)\big)\vartheta^\infty(t)\|_q \le C_{p,q,|\alpha|,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{|\alpha|}{2}}\|a\|_p \tag{5.3.17}$$

Behauptung: Für $j, k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}^3$ gilt die Folgerung

$$\begin{aligned} &\left\|\partial_t^j\vartheta^\infty(t)\right\|_p \le C_{q,p,\beta,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{j}{2}}\|a\|_p \\ \Rightarrow\ &\left\|\partial_t^k\partial_x^\alpha S_{v_\infty}(t/2)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\left(\partial_t^j\vartheta^\infty(t/2)\right)\right\|_q \le C_{q,p,j,k,\alpha,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{j+k+|\alpha|+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

$\forall 1 < p \le q \le \infty$, $p \ne \infty$.

Beweis der Behauptung: Beachte, daß $\mathcal{B}_R^\infty u = \nabla\Big((1-\varphi_R)\big(v\otimes\vartheta^\infty + \vartheta^\infty\otimes v\big)\Big)$ und daß sowohl $\mathbb{P}$ als auch S_{v_∞} mit Ableitungen vertauschen, d.h. $\mathbb{P}S_{v_\infty}(\partial_x^\alpha u) = \partial_x^\alpha\mathbb{P}S_{v_\infty}u$.

Für $t \le 2$ ist nach (5.3.4) und (5.3.16)

$$\begin{aligned} \left\|\partial_t^k\partial_x^\alpha S_{v_\infty}(t/2)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\left(\partial_t^j\vartheta^\infty(t/2)\right)\right\|_q &\le C_{q,k,\alpha}\left\|\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\left(\partial_t^j\vartheta^\infty(t/2)\right)\right\|_{q,|\alpha|+2k} \\ &\le C_{q,k,\alpha}\|v\|_{\infty,|\alpha|+1}\|\partial_t^j\vartheta^\infty(t/2)\|_{q,|\alpha|+2k+1} \\ &\le C_{q,p,j,k,\alpha}\|a\|_p \end{aligned}$$

und für $t > 2$ ist

$$\begin{aligned} &\left\|\partial_t^k\partial_x^\alpha S_{v_\infty}(t/2)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\left(\partial_t^j\vartheta^\infty(t/2)\right)\right\|_q \\ &\quad\le \sum_{\substack{i=1\\|\alpha_i|=1}}^{3}\left\|\partial_t^k\partial_x^{\alpha+\alpha_i}S_{v_\infty}(t/2)\mathbb{P}\Big((1-\varphi_R)\big(v_i\otimes\partial_t^j\vartheta^\infty + \partial_t^j\vartheta_i^\infty\otimes v\big)\Big)\right\|_q \\ &\quad\le C_{q,k,\alpha}(1+t/2)^{-\frac{k+|\alpha|+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|v\|_\infty\|\partial_t^j\vartheta^\infty(t/2)\|_p \\ &\quad\le C_{q,p,j,k,\alpha,\sigma_0}(1+t/2)^{-\frac{j+k+|\alpha|+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \\ &\quad\le C_{q,p,j,k,\alpha,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{j+k+|\alpha|+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \end{aligned}$$

Eine Lösung ϑ^∞ der Gleichung (5.3.11') besitzt die Integraldarstellung

$$\vartheta^\infty(t) = S_{v_\infty}(t)b - \int_0^{\frac{t}{2}} S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\vartheta^\infty(s)\,ds - \int_{\frac{t}{2}}^{t} S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\vartheta^\infty(s)\,ds$$

Wegen $\partial_t \int_{t/2}^t S(t-s)f(s)\,ds = \int_{t/2}^t S(t-s)\partial_s f(s)\,ds + (1/2)S(t/2)f(t/2)$ bzw. $\partial_t \int_0^{t/2} S(t-s)f(s)\,ds = \int_0^{t/2} \partial_t S(t-s)f(s)\,ds + (1/2)S(t/2)f(t/2)$ gilt

$$\begin{aligned}
&\partial_t^j \partial_x^\alpha \vartheta^\infty(t) \\
&\quad = \partial_t^j \partial_x^\alpha S_{v_\infty}(t)b - \frac{1}{2^j}\sum_{i=1}^{j}\big(\partial_t^{i-1}\partial_x^\alpha S_{v_\infty}\big)(t/2)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\big(\partial_t^{j-i}\vartheta^\infty\big)(t/2) \\
&\qquad - \int_{\frac{t}{2}}^{t} \partial_x^\alpha S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\,ds - \int_0^{\frac{t}{2}} \partial_t^j \partial_x^\alpha S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \vartheta^\infty(s)\,ds
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Jetzt nutzen wir die Tatsache aus (Hilfssatz 5.3.4), daß $\forall \epsilon > 0, r \geq 1 \exists R_0 > 0 : \|(1-\varphi_R)v\|_{r,n} \leq \epsilon \|v\|_{r,2}\ \forall R > R_0$.

Behauptung: Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $R_0 = R_0(p,q,\epsilon)$, so daß für alle $R \geq R_0$ und $t \geq 4$ gilt

$$\int_{t/2}^{t} \big\|S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\big\|_q\,ds \leq \epsilon \sup_{s\in[t/2,t]} \big\|\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\big\|_q \qquad \forall\ \frac{3}{2} < q < \infty \tag{5.3.20}$$

$$\int_{t/2}^{t} \big\|\nabla S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\big\|_q\,ds \leq \epsilon \sup_{s\in[t/2,t]} \big\|\nabla\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\big\|_q \qquad \forall\ \frac{3}{2} < q < 3 \tag{5.3.20'}$$

Beweis hierzu: Nach (5.2.15) gilt für $t \geq 1$

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^j \vartheta^\infty(t)\|_{p,m} &= \|\partial_t^j S_{v_\infty,v}^\infty(t)b\|_{p,m} \\
&= \|\partial_t^j S_{v_\infty,v}^\infty(1)S_{v_\infty,v}^\infty(t-1)b\|_{p,m} \\
&= \|S_{v_\infty,v}^\infty(1)\partial_t^j S_{v_\infty,v}^\infty(t-1)b\|_{p,m} \\
&\leq C_{j,m,p,\sigma_0}\|\partial_t^j S_{v_\infty,v}^\infty(t-1)b\|_p \\
&= C_{j,m,p,\sigma_0}\|\partial_t^j \vartheta^\infty(t-1)\|_p \qquad \forall\ t \geq 1,\ 1 < p < \infty
\end{aligned} \tag{5.3.21}$$

Wähle $r \in \mathbb{R}$ so, daß $\max\left\{1, \frac{q2}{q+2}\right\} < r < \frac{q3}{q+3}$, etwa das arithmetische Mittel der beiden Zahlen. Dann ist $\frac{rq}{q-r} > 2$ und $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) > 1$ und zusammen mit (5.3.21), der Definition von $\mathcal{B}_R^\infty$, der Tatsache, daß $S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}$ mit der Ableitung vertauscht und Satz 2.0.3 ist für $t \geq 4$

$$\begin{aligned}
&\int_{t/2}^{t} \big\|S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\big\|_q\,ds \\
&\quad = \int_{t/2}^{t-1} \big\|S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\big\|_q\,ds + \int_{t-1}^{t} \big\|S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\big\|_q\,ds
\end{aligned}$$

$$\leq C_{p,q,\sigma_0} \int\limits_{t/2}^{t-1} (1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)} \left\|(1-\varphi_R)v \otimes \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_r \, ds$$

$$+ C_{q,\sigma_0} \int\limits_{t-1}^{t} \left\|(1-\varphi_R)v \otimes \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_{r,1} \, ds$$

$$\leq C_{p,q,\sigma_0} \int\limits_{t/2}^{t-1} (1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)} \|(1-\varphi_R)v\|_{\frac{rq}{q-r}} \left\|\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_q \, ds$$

$$+ C_{p,q,\sigma_0} \int\limits_{t-1}^{t} \|(1-\varphi_R)v\|_{\frac{rq}{q-r},1} \left\|\partial_s^j \vartheta^\infty(s-1)\right\|_q \, ds$$

Nach Wahl von r können wir (5.3.6) anwenden, so daß für $t \geq 4$ gilt

$$\leq C_{p,q,\sigma_0} \|(1-\varphi_R)v\|_{\frac{rq}{q-r},1} \left(\sup_{s\in[t/2,t]} \left\|\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_q + \sup_{s\in[t-2,t-1]} \left\|\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_q \right)$$
$$\leq \epsilon \sup_{s\in[t/2,t]} \left\|\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_q$$

für alle $R \geq R_0$, falls R_0 hinreichend groß ist.

Um (5.3.20') zu zeigen, wiederholen wir Teile der Argumentation: Sei nun $3/2 < q < 3$ und $\alpha \in \mathbb{N}^3$ mit $|\alpha| = 1$. Sei wieder $r \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß $\max\left\{1, \frac{q2}{q+2}\right\} < r < \frac{q3}{q+3}$, etwa das arithmetische Mittel der beiden Zahlen. Dann ist $\frac{rq}{q-r} > 2$ und $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) > 1$. Wähle Zahlen $\tilde{r} \geq 1$, $0 < \delta < 1/12$ zu $q \in (3/2, 3]$ so, daß $1/\tilde{r} - 1/q = 1/3 + \delta$ und setzte dann $1/x := 1/\tilde{r} - (3-q)/(3q)$. Dann ist

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\tilde{r}}-\frac{1}{q}\right) = 1+\frac{3\delta}{2} \iff \frac{1}{\tilde{r}}-\frac{1}{q} = \frac{1}{3}+\delta \iff \frac{1}{x}+\frac{3-q}{3q}-\frac{1}{q} = \frac{1}{3}+\delta \iff x = \frac{3}{2+3\delta}$$

und $x \in (4/3, 3/2)$ Damit ist

$$\int\limits_{t-1}^{t} \left\|\nabla S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_q ds \leq \sup_{s\in[t-1,t]} \left\|(1-\varphi_R)v \otimes \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_{q,2}$$
$$\leq \|(1-\varphi_R)v\|_{3,2} \sup_{s\in[t-1,t]} \left\|\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_{\frac{3q}{3-q},2}$$

Ungleichung (5.3.21) angewendet

$$\leq C_{q,\sigma_0} \|(1-\varphi_R)v\|_{3,2} \sup_{s\in[t-1,t]} \left\|\partial_s^j \vartheta^\infty(s-1)\right\|_{\frac{3q}{3-q}}$$

Sobolevungleichung und R_0 hinreichend groß gewählt

$$\leq \epsilon \sup_{s\in[t-2,t-1]} \left\|\nabla \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_q$$

und

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{t/2}^{t} \left\|\nabla S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_q ds \\
&\quad\le C_{p,q,\sigma_0} \int\limits_{t/2}^{t-1} (1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)} \left\|(1-\varphi_R)v \otimes \nabla\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_r ds \\
&\quad+ C_{p,q,\sigma_0} \int\limits_{t/2}^{t-1} (1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\tilde r}-\frac{1}{q}\right)} \left\|\big(\nabla(1-\varphi_R)v\big) \otimes \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_{\tilde r} ds \\
&\quad\le C_{p,q,\sigma_0} \int\limits_{t/2}^{t-1} (1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)} \|(1-\varphi_R)v\|_{\frac{rq}{q-r}} \left\|\nabla\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_q ds \\
&\quad+ C_{p,q,\sigma_0} \int\limits_{t/2}^{t-1} (1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\tilde r}-\frac{1}{q}\right)} \left\|\nabla(1-\varphi_R)v\right\|_x \left\|\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_{\frac{3q}{3-q}} ds
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion von $r, \tilde r, x$, Sobolevungleichung, (5.3.6) und hinreichend großem R_0 folgt

$$\le \epsilon \sup_{s\in[t/2,t]} \left\|\nabla\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_q$$

Beweisen wir nun induktiv den Satz: Eine Lösung ϑ^∞ der Gleichung (5.3.11') besitzt die Integraldarstellung

$$\vartheta^\infty(t) = S_{v_\infty}(t/2)\vartheta^\infty(t/2) - \int\limits_{\frac{t}{2}}^{t} S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \vartheta^\infty(s)\, ds$$

Sei $q > 3/2$ und zunächst $|\alpha| = j = 0$. Ungleichnung (5.3.16) zeigt den Fall $t \le 4$ und für $t \ge 4$ gilt nach (5.3.3), (5.3.16) und (5.3.20)

$$\begin{aligned}
\|\vartheta^\infty(t)\|_q &\le \|S_{v_\infty}(t/2)\vartheta^\infty(t/2)\|_q + \int\limits_{\frac{t}{2}}^{t} \|S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \vartheta^\infty(s)\|_q\, ds \\
&\le C_{p,q,\sigma_0}(1+t/2)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\vartheta^\infty(t/2)\|_p + \epsilon \sup_{s\in[t/2,t]} \|\vartheta^\infty(s)\|_q \\
&\le C_{p,q,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|a\|_p + \epsilon \sup_{s\in[t/2,t]} \|\vartheta^\infty(s)\|_q
\end{aligned}$$

Ist R_0 hinreichend groß gewählt, so ist ϵ hinreichend klein und nach Hilfssatz 5.3.2 folgt

$$\|\vartheta^\infty(t)\|_q \le C_{p,q,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|a\|_p \qquad \forall t \ge 0,\ \frac{3}{2} < q < \infty$$

Setzen wir dieses Ergebnis nocheinmal in die Lösungsgleichung ein, um uns von der Grenze für q zubefreien: Sei $1 < q \leq 3/2$, $\delta > 0$ hinreichend klein und $r := \min\{q, \delta\}$, dann existiert $k > 2$, so daß (o.B. $t \geq 2$)

$$\begin{aligned}
&\|\vartheta^\infty(t)\|_q \\
&\quad \leq \|S_{v_\infty}(t/2)\vartheta^\infty(t/2)\|_q + \int_{t/2}^{t} \|S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\vartheta^\infty(s)\|_q \, ds \\
&\quad \leq C_{p,q,\sigma_0}\Big((1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\vartheta^\infty(t/2)\|_p \\
&\qquad + \int_{t/2}^{t}(1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)}\|(1-\varphi_R)v\otimes\vartheta^\infty(s)\|_{r,1}\, ds\Big) \\
&\quad \leq C_{p,q,\sigma_0}\Big((1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \\
&\qquad + \int_{t/2}^{t}(1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)}\|(1-\varphi_R)v\|_{k,1}\|\vartheta^\infty(s)\|_{2,1}\, ds\Big) \\
&\quad \leq C_{p,q,\sigma_0}\Big((1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \\
&\qquad + \int_{t/2}^{t}(1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)}\|(1-\varphi_R)v\|_{k,1}\|\vartheta^\infty(s-1)\|_{2}\, ds\Big) \\
&\quad \leq C_{p,q,\sigma_0}\Big((1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p + \int_{t/2-1}^{t}(1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)}(1+s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}\|a\|_p\, ds\Big)
\end{aligned}$$

Anwendung von Hilfssatz 5.3.1 ergibt

$$\leq C_{p,q,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p$$

Also zusammen mit (5.3.16)

$$\|\vartheta^\infty(t)\|_q \leq C_{p,q,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \qquad \forall t \geq 0,\ 1 < p \leq q < \infty$$

Damit gilt die Behauptung:

$$\int_0^{t/2}\left\|\partial_x^\alpha\partial_t^j S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\vartheta^\infty(s)\right\|_q ds \leq C_{p,q,j,|\alpha|,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{j+|\alpha|}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \tag{5.3.22}$$

$$\forall\, t \geq 0, j \geq 1,\ |\alpha| \geq 0,\ 1 < p \leq q \leq \infty,\ p \neq \infty$$

Beweis hierzu: Den Fall $t \leq 2$ zeigt (5.3.16). Sei o.B. $t \geq 2$. Wähle zu p, q Zahlen r, k wie folgt: Ist $q \leq 5/2$, dann setze $r = q$ und $k = 5q/(5-2q)$. Ist $q \geq 5/2$, dann setze $r = 5/2$ und $k = 1/\delta$

mit einer hinreichend kleine Zahl $0 < \delta = \delta(p,q,r)$. Mit den so gesetzten Zahlen gilt: $r \leq q$, $p \leq k$ und $2 < \frac{rk}{k-r} < 3$, weswegen gilt

$$\frac{j+|\alpha|+1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{k}\right) - 1 > \frac{j+|\alpha|}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$$

Somit

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t/2} \left\| \partial_x^\alpha \partial_t^j S_{v_\infty}(t-s) \mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \vartheta^\infty(s) \right\|_q ds \\
&\qquad \leq C_{p,q,j,|\alpha|,\sigma_0} \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{j+|\alpha|+1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)} \left\| (1-\varphi_R) v \otimes \vartheta^\infty(s) \right\|_r ds \\
&\qquad \leq C_{p,q,j,|\alpha|,\sigma_0} \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{j+|\alpha|+1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)} \left\| (1-\varphi_R) v \right\|_{\frac{rk}{k-r}} \left\| \vartheta^\infty(s) \right\|_k ds \\
&\qquad \leq C_{p,q,j,|\alpha|,\sigma_0} \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{j+|\alpha|+1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)} \left\| (1-\varphi_R) v \right\|_{\frac{rk}{k-r}} (1+s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{k}\right)} \|a\|_p \, ds
\end{aligned}$$

Benutzen wir jetzt wieder die obere Formel (5.3.6) von Hilfssatz 5.3.1 und erhalten

$$\leq C_{p,q,j,|\alpha|,\sigma_0} (1+t)^{-\frac{j+|\alpha|}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|a\|_p$$

Sei nun $3/2 < q < \infty$, $j \geq 1$ und es gelte (5.3.12') für alle $|\alpha| = 0$ und alle Ableitungen kleiner als j. Dann ist mit Formel (5.3.19) für $t \geq 4$

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^j \vartheta^\infty(t)\|_q \leq{}& \|\partial_t^j S_{v_\infty}(t) b\|_q + \sum_{i=1}^{j} \left\| \left(\partial_t^{i-1} S_{v_\infty}\right)(t/2) \mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \left(\partial_t^{j-i} \vartheta^\infty\right)(t/2) \right\|_q \\
&+ \int_{\frac{t}{2}}^{t} \|S_{v_\infty}(t-s) \mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\|_q \, ds + \int_0^{\frac{t}{2}} \|\partial_t^j S_{v_\infty}(t-s) \mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \vartheta^\infty(s)\|_q \, ds
\end{aligned}$$

Wenden wir für die einzelnen Summanden die Induktionsvoraussetzung und jeweils die Formeln (5.3.4), (5.3.18), (5.3.20) und (5.3.22) für hinreichend großes $R_0 = R_0(p,q)$ an

$$\leq C_{p,q,j,|\alpha|,\sigma_0} (1+t)^{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|a\|_p + \epsilon \sup_{s \in [t/2,t]} \left\| \partial_s^j \vartheta^\infty(s) \right\|_q$$

Nach Hilfssatz 5.3.2 folgt (5.3.12') für $3/2 < q < \infty$ $j \geq 0$, $|\alpha| = 0$.

Setzen wir auch hier dieses Ergebnis nocheinmal in die Lösungsgleichung (5.3.19) ein, um uns von der Grenze für q zubefreien: Sei $1 < q \leq 3/2$, $\delta > 0$ hinreichend klein und $r := \min\{q, \delta\}$, dann existiert $k > 2$, so daß (o.B. $t \geq 2$)

$$\|\partial_t^j \vartheta^\infty(t)\|_q \leq \|\partial_t^j S_{v_\infty}(t) b\|_q + \sum_{i=1}^{j} \left\| \left(\partial_t^{i-1} S_{v_\infty}\right)(t/2) \mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \left(\partial_t^{j-i} \vartheta^\infty\right)(t/2) \right\|_q$$
$$+ \int_0^{\frac{t}{2}} \|\partial_t^j S_{v_\infty}(t-s) \mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \vartheta^\infty(s)\|_q \, ds + \int_{\frac{t}{2}}^{t} \|S_{v_\infty}(t-s) \mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\|_q \, ds$$

Wenden wir bis auf den letzten Summanden die Formeln (5.3.3), (5.3.4), (5.3.11'), (5.3.18) und (5.3.22) an

$$\leq C_{p,q,j,\sigma_0} \Big((1+t)^{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|a\|_p$$
$$+ \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)} \|(1-\varphi_R) v \otimes \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\|_{r,1} \, ds \Big)$$
$$\leq C_{p,q,j,\sigma_0} \Big((1+t)^{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|a\|_p$$
$$+ \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)} \|(1-\varphi_R) v\|_{k,1} \|\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\|_{2,1} \, ds \Big)$$
$$\leq C_{p,q,j,\sigma_0} \Big((1+t)^{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|a\|_p$$
$$+ \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)} (1+s)^{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)} \|a\|_p \, ds \Big)$$

Anwendung von (5.3.6) aus Hilfssatz 5.3.1 ergibt

$$\leq C_{p,q,j,\sigma_0} (1+t)^{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|a\|_p$$

Damit ist (5.3.12') für $|\alpha| = 0$ gezeigt.

Setzen wir das Ergebnis noch ein weiteres Mal in die Lösungsgleichung (5.3.19) ein, um auch (5.3.12') für $|\alpha| > 0$ zu erhalten.

Dazu wähle zu p, q Zahlen r, k wie folgt: Ist $q \leq 5/2$, dann setze $r = q$ und $k = 5q/(5-2q)$. Ist $q \geq 5/2$, dann setze $r = 5/2$ und $k = 1/\delta$ mit einer hinreichend kleine Zahl $0 < \delta = \delta(p, q, r)$. Mit den so gesetzten Zahlen gilt: $r \leq q$, $p \leq k$ und $2 < \frac{rk}{k-r} < 3$, weswegen gilt

$$\frac{j+1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{k}\right) - 1 > \frac{j}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$$

Sei o.B. $t \geq 2$

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_x^\alpha \partial_t^j \vartheta^\infty(t)\|_q \\
&\quad \leq \|\partial_x^\alpha \partial_t^j S_{v_\infty}(t) b\|_q + \sum_{i=1}^{j} \big\| \big(\partial_x^\alpha \partial_t^{i-1} S_{v_\infty}\big)(t/2) \mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \big(\partial_t^{j-i} \vartheta^\infty\big)(t/2) \big\|_q \\
&\qquad + \int_0^{\frac{t}{2}} \|\partial_x^\alpha \partial_t^j S_{v_\infty}(t-s) \mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \vartheta^\infty(s)\|_q \, ds + \int_{\frac{t}{2}}^{t} \|\partial_x^\alpha S_{v_\infty}(t-s) \mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\|_q \, ds
\end{aligned}
$$

Wenden wir bis auf den letzten Summanden die Formeln (5.3.3), (5.3.4), (5.3.11'), (5.3.18) und (5.3.22) an. Obwohl diese Abschätzungen die Differentiation nach x berücksichtigen würden, kann im letzten Summand die Ableitung nicht mit $\mathcal{B}_R^\infty$ vertauscht werden, weswegen wir also auch in den ersten Summanden $|\alpha|$ zu 0 abschätzen

$$
\begin{aligned}
&\leq C_{p,q,j,\sigma_0} \Big((1+t)^{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|a\|_p \\
&\quad + \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)} \|(1-\varphi_R) v \otimes \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\|_{r,1+|\alpha|} \, ds \Big) \\
&\leq C_{p,q,j,\sigma_0} \Big((1+t)^{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|a\|_p \\
&\quad + \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)} \|(1-\varphi_R) v\|_{\frac{rk}{k-r},1+|\alpha|} \|\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\|_{k,1+|\alpha|} \, ds \Big) \\
&\leq C_{p,q,j,\sigma_0} \Big((1+t)^{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|a\|_p + \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)} \|\partial_s^j \vartheta^\infty(s-1)\|_k \, ds \Big) \\
&\leq C_{p,q,j,\sigma_0} \Big((1+t)^{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|a\|_p \\
&\quad + \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)} (1+s)^{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{k}\right)} \|a\|_p \, ds \Big)
\end{aligned}
$$

Anwendung von (5.3.6) aus Hilfssatz 5.3.1 ergibt

$$
\leq C_{p,q,j,\sigma_0} (1+t)^{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|a\|_p
$$

Bleibt (5.3.13') zu zeigen: Wir wiederholen weite Argumente von (5.3.12'). Zunächst der Fall $j = 0$ und $q > 3/2$. Ungleichnung (5.3.16) zeigt den Fall $t \leq 4$ und für $t \geq 4$ gilt wegen der Integraldarstellung

$$
\nabla \vartheta^\infty(t) = \nabla S_{v_\infty}(t/2) \vartheta^\infty(t/2) - \int_{\frac{t}{2}}^{t} \nabla S_{v_\infty}(t-s) \mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty \vartheta^\infty(s) \, ds
$$

und (5.3.3), (5.3.16) und (5.3.20')

$$\begin{aligned}
\|\nabla\vartheta^\infty(t)\|_q &\le \|\nabla S_{v_\infty}(t/2)\vartheta^\infty(t/2)\|_q + \int\limits_{\frac{t}{2}}^{t} \|\nabla S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\vartheta^\infty(s)\|_q\,ds \\
&\le C_{p,q,\sigma_0}(1+t/2)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\vartheta^\infty(t/2)\|_p + \epsilon \sup_{s\in[t/2,t]}\|\nabla\vartheta^\infty(s)\|_q \\
&\le C_{p,q,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p + \epsilon \sup_{s\in[t/2,t]}\|\nabla\vartheta^\infty(s)\|_q
\end{aligned}$$

Ist R_0 hinreichend groß gewählt, so ist ϵ hinreichend klein und nach Hilfssatz 5.3.2 folgt

$$\|\nabla\vartheta^\infty(t)\|_q \le C_{p,q,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \qquad \forall t\ge 0,\ \frac{3}{2}<q<3$$

Sei weiterhin $3/2<q<3$, aber $j\ge 1$ und es gelte (5.3.13') für alle $|\alpha|=0$ und alle Ableitungen kleiner als j. Dann ist mit Formel (5.3.19) für $t\ge 4$

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t^j\nabla\vartheta^\infty(t)\|_q \\
&\quad\le \|\partial_t^j\nabla S_{v_\infty}(t)b\|_q + \sum_{i=1}^{j}\left\|\left(\partial_t^{i-1}\nabla S_{v_\infty}\right)(t/2)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\left(\partial_t^{j-i}\vartheta^\infty\right)(t/2)\right\|_q \\
&\qquad + \int\limits_{\frac{t}{2}}^{t}\|\nabla S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\partial_s^j\vartheta^\infty(s)\|_q\,ds + \int\limits_{0}^{\frac{t}{2}}\|\partial_t^j\nabla S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\vartheta^\infty(s)\|_q\,ds
\end{aligned}$$

Wenden wir für die einzelnen Summanden die Induktionsvoraussetzung und jeweils die Formeln (5.3.4), (5.3.18), (5.3.20') und (5.3.22) für hinreichend großes $R_0=R_0(p,q)$ an

$$\le C_{p,q,j,|\alpha|,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{j+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p + \epsilon\sup_{s\in[t/2,t]}\left\|\partial_s^j\nabla\vartheta^\infty(s)\right\|_q$$

Nach Hilfssatz 5.3.2 folgt (5.3.13') für $3/2<q<3$, $j\ge 0$ und $|\alpha|=0$.

Zeigen wir nun: Sei $j\ge 0$. Gilt (5.3.13') für $|\alpha|=0$ und allen Zeitableitungen mit Ordnung kleiner gleich j, dann gilt auch (5.3.13') für $|\alpha|>0$. Wegen der Darstellung (5.3.19) und den Formeln (5.3.16), (5.3.3), (5.3.4), (5.3.18) und (5.3.22) genügt es

$$\int\limits_{t/2}^{t}\left\|\partial^\alpha\nabla S_{v_\infty}(t-s)\mathbb{P}\mathcal{B}_R^\infty\partial_s^j\vartheta^\infty(s)\right\|_q ds \le C_{p,q,|\alpha|,j}(1+t)^{-\frac{j+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p$$

für $t \geq 4$ und $|\alpha| \geq 1$ zu zeigen. Es ist nach (5.3.3) und (5.3.4)

$$\begin{aligned}
&\int_{t/2}^{t} \left\| \partial^\alpha \nabla S_{v_\infty}(t-s) \mathbb{P} \mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s) \right\|_q ds \\
&\qquad \leq C_{p,q,|\alpha|} \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{\frac{3}{2}} \left\| (1-\varphi_R) v \otimes \partial_s^j \vartheta^\infty(s) \right\|_{q,|\alpha|+3} ds \\
&\qquad \leq C_{p,q,|\alpha|} \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{\frac{3}{2}} \| (1-\varphi_R) v \|_{3,|\alpha|+3} \left\| \partial_s^j \vartheta^\infty(s) \right\|_{\frac{3q}{3-q},|\alpha|+3} ds \\
&\qquad \leq C_{p,q,|\alpha|} \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{\frac{3}{2}} \left\| \partial_s^j \vartheta^\infty(s-1) \right\|_{\frac{3q}{3-q}} ds \\
&\qquad \leq C_{p,q,|\alpha|} \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{\frac{3}{2}} \left\| \nabla \partial_s^j \vartheta^\infty(s-1) \right\|_q ds \\
&\qquad \leq C_{p,q,|\alpha|} \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{\frac{3}{2}} (1+s)^{-\frac{j+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|a\|_p \, ds \\
&\qquad \leq C_{p,q,|\alpha|,j}\, (1+t)^{-\frac{j+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|a\|_p
\end{aligned}$$

nach (5.3.6).

Bleibt (5.3.13') für alle $j \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = 0$ und $1 < q \leq 3/2$ zu zeigen. Wieder genügt es wegen der Darstellung (5.3.19) und den Formeln (5.3.16), (5.3.3), (5.3.4), (5.3.18) und (5.3.22)

$$\int_{t/2}^{t} \left\| \nabla S_{v_\infty}(t-s) \mathbb{P} \mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s) \right\|_q ds \leq C_{p,q,j} (1+t)^{-\frac{j+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|a\|_p$$

für $j \geq 0$ und $1 < q \leq 3/2$ zu zeigen. Wir benutzen die Tatsache, daß wir dieses Ergebnis für $q > 3/2$ bereits gezeigt haben:

Für jede Zahl $k \in \mathbb{R}$ mit $k > 3/2$ gilt:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{j+1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{k}\right) > \frac{j+1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \iff 3 - \frac{3}{k} > 1 \iff k > \frac{3}{2}$$

Somit ist wegen $v \in L^r$, $r > 2$ und $\nabla^m v \in L^r$, $r > 4/3$, $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\int_{t/2}^{t} \left\| \nabla S_{v_\infty}(t-s) \mathbb{P} \mathcal{B}_R^\infty \partial_s^j \vartheta^\infty(s) \right\|_q ds \\
&\qquad \leq C_q \int_{t/2}^{t-1} (1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \left\| \nabla \big((1-\varphi_R) v \otimes \partial_s^j \vartheta^\infty(s) \big) \right\|_1 ds
\end{aligned}$$

$$+ C_q \int_{t-1}^{t} \left\| \nabla\big((1-\varphi_R) v \otimes \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\big)\right\|_{q,1} ds$$
$$\le C_q \int_{t/2}^{t-1} (1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \Big(\|\nabla v\|_{\frac{15}{11}} \left\|\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_{\frac{15}{4}} + \|v\|_{\frac{5}{2}} \left\|\nabla \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_{\frac{5}{3}} \Big) ds$$
$$+ C_q \int_{t-1}^{t} \Big(\|\nabla v\|_{\frac{15q}{15-4q},1} \left\|\partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_{\frac{15}{4}} + \|v\|_{\frac{5q}{5-3q},2} \left\|\nabla \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_{\frac{5}{3},1} \Big) ds$$

Mit Soboleveinbettung $\|f\|_{\frac{15}{4}} < C\|\nabla f\|_{\frac{5}{3}}$ und da $5/3 > 3/2 > 1/q$

$$\le C_q \int_{t/2}^{t-1} (1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \left\|\nabla \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_{\frac{5}{3}} ds + C_q \sup_{s\in[t-1,t]} \left\|\nabla \partial_s^j \vartheta^\infty(s)\right\|_{\frac{5}{3},1} ds$$
$$\le C_{q,p,j} \int_{t/2}^{t-1} (1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} (1+s)^{-\frac{j+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{3}{5}\right)} \|a\|_p \, ds$$
$$+ C_{q,p,j} (1+t)^{-\frac{j+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{3}{5}\right)} \|a\|_p \, ds$$
$$\le C_{q,p,j} (1+t)^{-\frac{j+1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|a\|_p$$

$\square$

(5.3.14), (5.3.12’),(5.3.13’),(5.3.15),(5.3.11) (5.3.12)

Satz 5.3.6 *Sei $1 < p < \infty$, $a \in H_p(\Omega)$ und sei $T(t)$ die Oseenhalbgruppen zu dem Oseenoperator $-\mathbb{O}_{v_\infty,v} = -\mathbb{P}(-\Delta + v_\infty \cdot \nabla + \mathcal{B})$ in Ω. Sei $r \in \mathbb{R}$ so groß, daß $\mathbb{R}^3 \setminus B_r(0) \subset \Omega$. Dann gilt für eine Lösung des Gleichungssystems*

$$\begin{aligned} &\partial_t u - \Delta u + (v_\infty \cdot \nabla) u + \mathcal{B}u + \nabla p = 0, \quad \mathit{div}\, u = 0 && \textit{in } (0,\infty)\times\Omega \\ &u(t)|_{\partial\Omega} = 0 && \textit{in } (0,\infty)\times\partial\Omega \\ &u(0,x) = T_{v_\infty,v}(1) a =: b && \textit{in } \Omega \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

$b \in \mathcal{D}(\mathbb{O}^N_{v_\infty,v})$ und

$$\|b\|_{p,2N} \le C_{p,N,j,\sigma_0} \|a\|_p \qquad \forall N \in \mathbb{N} \tag{5.3.24}$$

und

$$\|u(t,.)\|_{p,2m,\Omega_r} + \|\partial_t u(t,.)\|_{p,2m,\Omega_r} \le \frac{C_{p,m,r,R,\sigma_0}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}} (1+t)^{-\frac{3}{2p}+\delta} \|a\|_p \quad \forall\, t \ge 0,\ \delta > 0 \tag{5.3.25}$$

wobei $\Omega_r = \Omega \cap B_r(0)$.

Beweis: Sei $R \in R$ eine hinreichend große Zahl aus der Folge von Hilfssatz 5.3.4. Daß $b \in \mathcal{D}(\mathbb{O}^N_{v_\infty,v})$ für alle $N \geq 0$ folgt unmittelbar aus der Definition von $b = T(1)a$ und Hilfssatz 5.2.4. Ebenso folgt (5.3.24) aus (5.2.15). Wegen $\mathcal{D}(\mathbb{O}^N_{v_\infty,v}) \subset H_p(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \cap W^{2N,p}(\Omega)$ existiert nach Folgerung 5.1.2 ein $\tilde{b} \in W^{2N,p}(\mathbb{R}^3)$ mit $\tilde{b} = b$ in Ω, $\operatorname{div} \tilde{b} = 0$ in $\mathbb{R}^3$ und $\|\tilde{b}\|_{p,2N,\mathbb{R}^3} \leq C_{p,N}\|a\|_p$. $\tilde{b}$ erfüllt also die Voraussetzung von Satz 5.3.5. Setzte zu hinreichend großem $R \in \mathbb{R}$

$$\vartheta^\infty(t,x) := S^\infty_{v_\infty,v,R}(t)\tilde{b}$$

wobei $S^\infty_{v_\infty,v,R}(t)$ der in Satz 5.3.5 definierte Lösungsoperator zu Gleichung (5.3.11) mit Druck $\tilde{p}$ ist. Da wir auf die Grenzfälle $q = 1$ und $q = \infty$ verzichten müssen, führen wir wieder zu hinreichend kleinem $\delta > 0$ die Notation $\mathrm{o}_\delta(1)$ ein, wobei $\mathrm{o}_\delta(1)$ eine Funktion ist, mit $\mathrm{o}_\delta(1) \to 0$, falls $\delta \to 0$ und o. B. $\mathrm{o}_\delta(1) > 0$. Nach (5.3.12) ist

$$\|\partial_t^j \vartheta^\infty(t)\|_{\frac{1}{\delta},2m+1} \leq C_{p,m,j,\sigma_0,R}(1+t)^{-\frac{j}{2}-\frac{3}{2p}+\mathrm{o}_\delta(1)}\|a\|_p \quad \forall\, t \geq 0,\ j \geq 0, 0 < \delta << 1 \tag{5.3.26}$$

Sei $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0$ eine Abschneidefunktion mit den Eigenschaften $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leq r$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq r+1$. Setzen wir

$$\begin{aligned}\tilde{w}(t,.) &:= u(t,.) - (1-\varphi)\vartheta^\infty(t,.) - \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot\vartheta^\infty(t,.)\big)\\ w(t,.) &= T(2)\tilde{w}(t,.)\end{aligned}$$

so ist nach Satz 5.1.1 $\operatorname{div} \tilde{w} = 0$ in Ω und $\tilde{w}|_{\partial\Omega}(t,.) = 0$ für alle $t \geq 0$ und wegen Folgerung 5.1.2 und (5.3.26) gilt

$$\|\partial_t^j \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot\vartheta^\infty(t,.)\big)\|_{p,2m+2} \leq C_{p,m,r,R,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{j}{2}-\frac{3}{2p}+\mathrm{o}_\delta(1)}\|a\|_p \quad \forall\, t \geq 0,\ j \geq 0 \tag{5.3.27}$$

Für $t \leq 2$ folgt die Behauptung aus Satz 5.2.4. Wegen (5.3.26), (5.3.27) und Hölder ist

$$\Big\|\partial_t^j T(2)\Big((1-\varphi)\vartheta^\infty(t,.) + \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot\vartheta^\infty(t,.)\big)\Big)\Big\|_{p,2m,\Omega_r} \leq C_{p,m,r,R,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{j}{2}-\frac{3}{2p}+\mathrm{o}_\delta(1)}\|a\|_p$$

für $t \geq 0$ und es genügt offensichtlich die Aussage für $w(t,.)$ zu zeigen.

Wie im Kapitel 5.1 im Satz 5.1.3 setzen wir $\tilde{w}$ formal in die Gleichung (5.3.23) ein und schreiben den 'Fehler' auf die rechte Seite. Damit erhalten wir wegen $\mathcal{B} = \mathcal{B}^0_R + \mathcal{B}^\infty_R$ (Definition 5.3.3).

$$\begin{aligned}&\partial_t\tilde{w} - \Delta\tilde{w} + (v_\infty\cdot\nabla)\tilde{w} + \mathcal{B}\tilde{w} + \nabla q = h, \quad \operatorname{div}\tilde{w} = 0 && \text{in } (0,\infty)\times\Omega\\ &\tilde{w}(t)|_{\partial\Omega} = 0 && \text{in } (0,\infty)\times\partial\Omega\\ &\tilde{w}(0,x) = d && \text{in } \Omega\end{aligned}$$

bzw. wenn wir auf die Gleichung $T(2)\mathbb{P}_\Omega$ anwenden

$$\begin{aligned}&\partial_t w + \mathbb{O}_{v,v_\infty} w = T(2)\mathbb{P}_\Omega h, \quad \operatorname{div} w = 0 && \text{in } (0,\infty)\times\Omega\\ &w(t)|_{\partial\Omega} = 0 && \text{in } (0,\infty)\times\partial\Omega\\ &w(0,x) = T(2)d && \text{in } \Omega\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
&d = \varphi b - \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot b\big) \quad \in W_r^{2m,p}(\Omega)\cap W_0^p(\Omega)\cap H_p(\Omega)\\
&q = -(1-\varphi)\tilde p + p\\
&h = (\Delta\varphi)\vartheta^\infty + 2(\nabla\varphi)\cdot\nabla\vartheta^\infty + \big((v_\infty\cdot\nabla)\varphi\big)\vartheta^\infty - (1-\varphi)\mathcal{B}_R^0\vartheta^\infty + (\nabla\varphi)\tilde p\\
&\quad - \big(c_i\partial_x^{\alpha_i}\varphi\big)_{\substack{i=1,2,3\\|\alpha_i|=1}}\cdot(v\otimes\vartheta^\infty + \vartheta^\infty\otimes v) - (\partial_t - \Delta + (v_\infty\cdot\nabla) + \mathcal{B})\mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot\vartheta^\infty\big)\\
&\quad \in W_0^{2m,p}(\Omega)\cap L_r^p(\Omega)
\end{aligned}$$

Für den Druck gelte o.B. $\int_{\Omega_r}\tilde p\,dx = 0$, sonst ersetzte $\tilde p$ durch $\tilde p - |\Omega_r|^{-1}\int_{\Omega_r}\tilde p\,dx$. Nach *Poincare* (2.0.16) und Satz 5.3.5 (5.3.12) gilt dann

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^j\tilde p\|_{p,2m,\Omega_r} &\le C_r\|\nabla\partial_t^j\tilde p\|_{p,2m,\Omega_r}\\
&= C_r\big\|\partial_t^j\big(\partial_t\vartheta^\infty - \Delta\vartheta^\infty + (v_\infty\cdot\nabla)\vartheta^\infty + \mathcal{B}^\infty\vartheta^\infty\big)\big\|_{p,2m,\Omega_r}\\
&\le C_r\big\|\partial_t^j\big(\partial_t\vartheta^\infty - \Delta\vartheta^\infty + (v_\infty\cdot\nabla)\vartheta^\infty + \mathcal{B}^\infty\vartheta^\infty\big)\big\|_{\frac{1}{\delta},2m,\Omega_r}\\
&\le C_{r,m,p,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{j}{2}-\frac{3}{2p}+o_\delta(1)}\|a\|_p \qquad \forall\, t\ge 0,\ j\ge 0
\end{aligned}$$

Somit gilt nach Folgerung 5.1.2 und Satz 5.3.5 (5.3.12)

$$\|\partial_t^j h\|_{p,2m} \le C_{r,p,m,\sigma_0}(1+t)^{-\frac{j}{2}-\frac{3}{2p}+o_\delta(1)}\|a\|_p \qquad \forall\, t\ge 0,\ j\ge 0 \tag{5.3.28}$$

und mit der Darstellung

$$w(t,.) = T_{v_\infty,v}(t)T(2)d + \int_0^t T_{v_\infty,v}(t-s)T(2)\mathbb{P}_\Omega h(s,.)\,ds$$

folgt nach Satz 5.2.5 und wegen der Beschränktheit von $\mathbb{P}$ (Satz 2.0.3)

$$\|w(t,.)\|_{p,2m,\Omega_r} \le \|T(t+2)d\|_{p,2m,\Omega_r} + \int_0^t \|T_{v_\infty,v}(2+t-s)\mathbb{P}_\Omega h(s,.)\|_{p,2m,\Omega_r}\,ds$$

Nach (5.2.18) und der Beschränktheit von $\mathbb{P}$ (Satz 2.0.3) folgt mit einem hinreichend kleinen $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\le \frac{C_{p,m,r,\sigma_0,\epsilon}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\Big((1+t)^{-\frac{3}{2}}\big(\|d\|_p + \|d\|_{1+\epsilon}\big)\\
&\quad + \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{3}{2}}\big(\|h(s,.)\|_p + \|h(s,.)\|_{1+\epsilon}\big)\,ds\Big)
\end{aligned}$$

Da d und h in $B_{r+1}(0)$ bzw. in $B_{R+1}(0)$ beschränkten Träger haben, folgt mit Hölder, (5.3.28) und (5.3.24)

$$\le \frac{C_{p,m,r,R,\sigma_0,\epsilon,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\|a\|_p\Big((1+t)^{-\frac{3}{2}} + \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{3}{2}}(1+s)^{-\frac{3}{2p}+o_\delta(1)}\,ds\Big)$$

Nach Satz 5.3.1

$$\leq \frac{C_{p,m,r,R,\sigma_0,\epsilon,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}(1+t)^{-\frac{3}{2p}+o_\delta(1)}\|a\|_p$$

Analog folgt mit der Darstellung

$$\partial_t w(t,.) = \partial_t T_{v_\infty,v}(t+2)d + T_{v_\infty,v}(t+2)\mathbb{P}h(0,.) + \int_0^t T_{v_\infty,v}(2+t-s)\mathbb{P}_\Omega \partial_s h(s,.)\, ds$$

$$\begin{aligned}\|\partial_t w(t,.)\|_{p,2m,\Omega_r} \leq \frac{C_{p,m,r,\sigma_0,\epsilon,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\Big(&(1+t)^{-\frac{3}{2}}\big(\|d\|_p + \|d\|_{1+\epsilon} + \|h(0,.)\|_p + \|h(0,.)\|_{1+\epsilon}\big)\\ &+ \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{3}{2}}\big(\|\partial_s h(s,.)\|_p + \|\partial_s h(s,.)\|_{1+\epsilon}\big)\, ds\Big)\end{aligned}$$

Mit Hölder, (5.3.28) und (5.3.24)

$$\leq \frac{C_{p,m,r,R,\sigma_0,\epsilon,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\|a\|_p\Big((1+t)^{-\frac{3}{2}} + \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{3}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}+o_\delta(1)}\big)\, ds\Big)$$

Nach Satz 5.3.1

$$\leq \frac{C_{p,m,r,R,\sigma_0,\epsilon,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}(1+t)^{-\frac{3}{2p}}\|a\|_p$$

$\square$

Theorem 4 ($L^p - L^q$ Abschätzungen) *Sei $1 < p \leq q < \infty$, $\sigma_0 > 0$ mit $0 < |v_\infty| \leq \sigma_0$ und $\mathbb{O} = (-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B})$ der volle Oseenoperator. Dann existiert eine Konstante $C_{p,q,\sigma_0,\delta} > 0$, so daß für die stark stetige Oseenhalbgruppe gilt*

(5.3.29) $$\left\|e^{-\mathbb{O}t}a\right\|_q \leq \frac{C_{p,q,\sigma_0,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \qquad \forall\, t > 0,\ \forall\, a \in H_p(\Omega)$$

Gilt zusätzlich $1 < p \leq q < 3$, dann ist

(5.3.30) $$\left\|\nabla e^{-\mathbb{O}t}a\right\|_q \leq \frac{C_{p,q,\sigma_0,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}t^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \qquad \forall\, t > 0,\ \forall\, a \in H_p(\Omega)$$

Beweis: Fast wortwörtlich wie [ShiKo, S.: 39 ff].

Für hinreichend kleines $\delta > 0$ ist im Bereich $1 < p \leq q < 3$ gerade $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) < 3/(2p) - \delta$. Daher haben wir für beschränkte Gebiete Ω_r das Theorem bereits in Satz 5.3.6 gezeigt.

Für den Bereich $\mathbb{R}^3 \setminus B_r(0)$ betrachten wir Gleichung (5.3.11) aus Satz 5.3.5.

Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ eine Abschneidefunktion mit $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leq r-1$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq r$. Wir setzen

$$z(t,.) = (1-\varphi)u(t,.) + \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot u(t,.)\big)$$

Da $z = u$ in $\mathbb{R}^3 \setminus B_r(0)$ genügt es das Theorem für z zu zeigen.

Setzen wir z formal in die Gleichung (5.3.11) ein und schreiben den 'Fehler' auf die rechte Seite, so erhalten wir wegen $\mathcal{B} = \mathcal{B}_R^0 + \mathcal{B}_R^\infty$

$$\begin{aligned} &\partial_t z - \Delta z + (v_\infty\cdot\nabla)z + \mathcal{B}^\infty z + \nabla q = h, \quad \operatorname{div} z = 0 && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \\ &z(0,x) = d && \text{in } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} d &= (1-\varphi)b + \mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot b\big) \qquad \in H_p(\mathbb{R}^3)\cap W^{2m,p}(\mathbb{R}^3) \\ q &= (1-\varphi)p \\ h &= (\Delta\varphi)u - \big((v_\infty\cdot\nabla)\varphi\big)u - (1-\varphi)\mathcal{B}_R^0 u + \big(c_i\partial_x^{\alpha_i}\varphi\big)_{\substack{i=1,2,3\\|\alpha_i|=1}}\big((1-\varphi_R)\big(v\otimes u + u\otimes v\big)\big) \\ &\quad + (\partial_t - \Delta + (v_\infty\cdot\nabla) + \mathcal{B}_R^\infty)\mathbb{B}\big((\nabla\varphi)\cdot u\big) - (\nabla\varphi)p \qquad \in L^p_{\max\{r,R\}+1}(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

Für den Druck gelte o.B. $\int_{\Omega_r} p\, dx = 0$, sonst ersetzte p durch $p - |\Omega_r|^{-1}\int_{\Omega_r} p\, dx$. Nach *Poincare* (2.0.16) und Satz 5.3.6 (5.3.25) gilt dann

$$\begin{aligned} \|p\|_{p,2m,\Omega_r} &\leq C_r\|\nabla\partial_t^j p\|_{p,2m,\Omega_r} = C_r\|\partial_t u - \Delta u + (v_\infty\cdot\nabla)u + \mathcal{B}u\|_{p,2m,\Omega_r} \\ &\leq \frac{C_{p,m,r,R,\sigma_0,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}(1+t)^{-\frac{3}{2p}+\mathrm{o}_\delta(1)}\|a\|_p \qquad \forall\, t\geq 0 \end{aligned}$$

wobei $0 < \mathrm{o}_\delta(1) \to$ für $0 < \delta \to 0$.

Daraus folgt zusammen mit Satz 5.3.6 (5.3.25) und Folgerung 5.1.2 und (5.3.24)

$$\|h(t,.)\|_{p,2m-1,\mathbb{R}^3} \leq \frac{C_{p,m,r,R,\sigma_0,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}(1+t)^{-\frac{3}{2p}+\delta}\|a\|_p \qquad \forall\, t\geq 0,\ \delta>0,\ m\geq 1 \tag{5.3.31}$$

$$\|d\|_{p,2m,\mathbb{R}^3} \leq C_{p,m,\sigma_0}\|a\|_p \qquad \forall\, m\geq 0 \tag{5.3.32}$$

Weiterhin folgt für $s \in [t-1,t]$ mit Soboleveinbettung für ein geeignetes $\tilde{m} \leq 2$, zusammen mit (5.3.14), (5.3.31)

$$\|S^\infty_{v_\infty,v}(t-s)\mathbb{P}_{\mathbb{R}^3}h(s,.)\|_q \leq \|h(s,.)\|_q \leq C_{p,q}\|h(s,.)\|_{p,2\tilde{m}-1} \leq \frac{C_{p,r,R,\sigma_0,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}(1+s)^{-\frac{3}{2p}+\delta}\|a\|_p$$

also

$$\|S^\infty_{v_\infty,v}(t-s)\mathbb{P}_{\mathbb{R}^3}h(s,.)\|_q \leq \frac{C_{p,r,R,\sigma_0,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}(1+s)^{-\frac{3}{2p}+\delta}\|a\|_p \tag{5.3.33}$$

Mit $S^\infty_{v_\infty,v}$ aus Satz 5.3.5 gilt die Darstellung

$$z(t,.) = S^\infty_{v_\infty,v}(t)d + \int_0^t S^\infty_{v_\infty,v}(t-s)\mathbb{P}_{\mathbb{R}^3}h(s,.)\,ds$$

Da $q \neq \infty$ wähle $\delta < 3/(2q)$ hinreichend klein und $1 < \rho < \min\{3/(2+2\delta), p\}$. Dann gilt mit (5.3.12), (5.3.32) und (5.3.33)

$$\begin{aligned}
&\|z(t,.)\|_q \\
&\quad\le C_{p,q,\sigma_0,R}(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \\
&\qquad + \frac{C_{p,r,R,\sigma_0,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\int_{t-1}^{t}(1+s)^{-\frac{3}{2p}+\delta}\|a\|_p\,ds + C_{\rho,q,\sigma_0,R}\int_0^{t-1}(1+t-s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{q}\right)}\|\mathbb{P}_{\mathbb{R}^3}h(s,.)\|_\rho\,ds
\end{aligned}$$

Nach *Hölder* und (5.3.31) ist

$$\le C_{p,q,\sigma_0,R}(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p + \frac{C_{p,r,R,\sigma_0,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{q}\right)}(1+s)^{-\frac{3}{2p}+\delta}\|a\|_p\,ds$$

Nach Wahl von ρ und δ folgt nach Satz 5.3.1

$$\le \frac{C_{p,q,r,R,\sigma_0,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p$$

Da $q \notin \{\infty, 3\}$, setze $\delta < 3/(2q) - 1/2$ hinreichend klein und $1 < \rho < \min\{3/(2+2\delta), p\}$. Sei l die kleinste natürliche Zahl, größer gleich $3(1/p - 1/q)$ und bezeichne $[n]$ die kleinste gerade natürliche Zahl, größer gleich n. Nach *Hölder* , Soboleveinbettung,(5.3.13) und (5.3.14) gilt für $1 < p \le q < 3$

$$\begin{aligned}
\|\nabla z(t,.)\|_q &\le C_{p,q,\sigma_0,R}(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \\
&\qquad + C_{\rho,q,\sigma_0,R}\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{q}\right)}\left(\|\mathbb{P}_{\mathbb{R}^3}h(s,.)\|_\rho + \|\mathbb{P}_{\mathbb{R}^3}h(s,.)\|_{p,[l+1]}\right)ds
\end{aligned}$$

Nach *Hölder* ist

$$\begin{aligned}
&\le C_{p,q,\sigma_0,R}(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \\
&\qquad + C_{\rho,q,\sigma_0,R}\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{q}\right)}\|\mathbb{P}_{\mathbb{R}^3}h(s,.)\|_{p,[l+1]}\,ds
\end{aligned}$$

Nach (5.3.31) ist

$$\begin{aligned}
&\le C_{p,q,\sigma_0,R}(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p \\
&\qquad + \frac{C_{p,q,r,R,\sigma_0,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{q}\right)}(1+s)^{-\frac{3}{2p}+\delta}\|a\|_p\,ds
\end{aligned}$$

Nach Wahl von ρ und δ folgt nach Satz 5.3.1

$$\leq \frac{C_{p,q,r,R,\sigma_0,\delta}}{|v_\infty|^{\frac{3}{4}}}(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_p$$

Die letzten beiden Abschätzungen zeigen das Theorem für $t \geq 1$. Der Fall $0 < t \leq 1$ ist Aussage von Hilfssatz 5.2.4 (5.2.16).

□

Kapitel 6

Energieabklingrate einer Störung der stationären Navier-Stokes-Gleichung im Außenraum mit Anströmgeschwindigkeit

Wie bereits in der Einführung erwähnt, sind wir an dem Verhalten von schwachen Lösungen v des Navier-Stokes Systems für großen Zeiten interessiert

$$
\begin{aligned}
\partial_t v - \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla p &= 0 && \text{in } (0,\infty) \times \Omega, \\
\operatorname{div} v &= 0 && \text{in } (0,\infty) \times \Omega, \\
v\big|_{\partial\Omega} &= 0 && \text{auf } [0,\infty) \times \partial\Omega \\
v(0,x) &= v_0(x) && \text{in } \Omega, \\
v(t,x) \to v_\infty &\neq 0 && \text{für } |x| \to \infty,\ t \in [0,\infty),
\end{aligned} \tag{1.0.1}
$$

wobei Ω ein glatter Außenraum in $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{div} v_0 = 0$, $v_0\big|_{\partial\Omega} = 0$, $v_0 \to v_\infty$ bei unendlich und v_∞ ein konstanter Vektor in $\mathbb{R}^3$ sind.

Wir nehmen an, es gäbe eine physikalisch sinnvolle (siehe [Finn2]) Lösung $(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{p})$ des zugehörigen stationären Systems

$$
\begin{aligned}
-\Delta \overset{\circ}{v} + \overset{\circ}{v} \cdot \nabla \overset{\circ}{v} + \nabla \overset{\circ}{p} &= 0 && \text{in } \Omega \\
\nabla \cdot \overset{\circ}{v} &= 0 && \text{in } \Omega \\
\overset{\circ}{v}\big|_{\partial\Omega} &= 0 && \text{in} \partial\Omega \\
\overset{\circ}{v}(x) \longrightarrow v_\infty & && \text{für } |x| \to \infty \text{ in } \Omega
\end{aligned} \tag{6.0.1}
$$

Bemerkung: Der Begriff „physikalisch sinnvoll“ geht zurück auf R. Finn. In seiner Arbeit [Finn2] von 1965 hat er gezeigt, daß es ein klassische Lösung von (6.0.1) gibt, die noch zusätzlich gewissen Regularitäts - und Abklingverhalten erfüllt. Eine ausführliche Diskussion über Existenz, Eindeutigkeit und Regularität von Lösungen dieses Differentialgleichungssystems findet sich u.a. in [Galdi2]. Von einer solchen Lösung $\overset{\circ}{v}$ erwarten wir hier die Eigenschaften von Satz 2.0.1.

Die nicht-stationäre Störung u von $\overset{\circ}{v}$, also $v(t) = \overset{\circ}{v} + u(t)$, $p(t) = \overset{\circ}{p} + \tilde{p}(t)$ erfüllt dann die Störungsgleichung

$$\begin{aligned}
u_t - \Delta u + (v_\infty \cdot \nabla)u + \mathcal{B}(u) + (u\cdot\nabla)u + \nabla\tilde{p} &= f \quad \text{in } (0,\infty)\times\Omega,\\
\operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\Omega,\\
u(t,x) &= 0 \quad \text{auf } (0,\infty)\times\partial\Omega,\\
u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{in } \Omega,\\
u(t,x) \to 0 & \quad \text{für } |x|\to\infty
\end{aligned} \tag{1.0.2}$$

Wir fassen das Gleichungssystem (1.0.2) im schwachen Sinn auf. Genauer gesagt nehmen wir stets die folgenden Voraussetzungen für u_0 und u an:

(i) $u_0 \in H_2(\Omega)$, $u \in \bigcap\limits_{0<T<\infty} \Big(L^\infty\big(0,T,H_2(\Omega)\big) \cap L^2\big(0,T,W_0^{1,2}(\Omega)^3\big)\Big)$ ist eine schwache Lösung von (1.0.2) im folgenden Sinn: $u : [0,\infty) \to H_2(\Omega)$ ist schwach stetig und

$$\int_0^T \Big(-\langle u,\phi\rangle + \langle\nabla u,\nabla\phi\rangle + \langle(u\cdot\nabla)\overset{\circ}{v},\phi\rangle + \langle(\overset{\circ}{v}\cdot\nabla)u,\phi\rangle - \langle u\otimes u,\nabla\phi\rangle\Big)\,dt = \langle u_0,\phi(0)\rangle \tag{6.0.2}$$

für jedes $T>0$, $\phi(t,x) = h(t)\varphi(x)$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{A})$, $h\in C^1\big([0,T),\mathbb{R}\big)$, $h(T)=0$.

(ii) u erfülle die verallgemeinerte Energieungleichung, d.h. für $s=0$, fast alle $s>0$ und alle $t\ge s$ gelte

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_s^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2\,d\tau \le \|u(s)\|_2^2 + 2\int_s^t \langle(u\cdot\nabla)u, \overset{\circ}{v} - v_\infty\rangle\,d\tau \tag{6.0.3}$$

Theorem 5 (Energieabklingrate) *Sei v eine Fortsetzung von $\overset{\circ}{v} - v_\infty$ auf ganz $\mathbb{R}^3$, für die gelte*

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{E}} = \sup_{w\in\mathcal{D}(\mathbb{A}^{\frac12}\setminus\{0\})} \frac{\langle(w\cdot\nabla)w,v\rangle}{\|\nabla w\|_2^2} < 1 \tag{6.0.4}$$

Dann gilt für hinreichend große Zeiten t

$$\|u\|_2 \le C_\epsilon t^{-\min\left\{\frac34-\epsilon,\alpha_0\right\}} \qquad \forall\,\epsilon>0 \tag{6.0.5}$$

wobei die Energie der Lösung der einfachen Oseengleichung $\partial_t u_0 - (\mathbb{A}-\mathbb{P}_\Omega(v_\infty\cdot\nabla))u_0$, $u_0(0) = u(0)$ mit mindestens $\|u_0(t)\|_2 \le Ct^{-\alpha_0}$ falle.

Bemerkung: Für $\mathrm{Re}_{\mathrm{E}} < 1$ ist $\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_2 = 0$ und $u(t)$ ist eine glatte Funktion für große Zeiten t. Ein Beweis hierfür findet sich in [Mas, chapter 4] und [MiSo, chapter 5]. Die dort verwendete Bedingung $C_0 := \sup_{x\in\Omega}|x|\,|\overset{\circ}{v}(x) - v_\infty| < 1/2$ kann mit Hilfe gewichteter

Sobolevungleichungen $\||x|^{-1}w\|_2 \leq \|\nabla w\|_2$ für $w \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2})$ in $\mathrm{Re}_{\mathrm{E}} \leq 2C_0 < 1$ umgeschrieben werden.

A priori Abklingraten des einfachen Oseenoperators finden sich bei [ShiKo, Theorem 2]. Danach ist z.B. $\alpha_0 = 3/4$, falls der Anfangswert $u_0(0) \in L^1(\Omega)$ liegt.

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt. Ideen dieses Beweises gehen zurück auf [Wi], [Mar], [Bo, Miy.5], [Sc1, Sc2] und [Grunau1, Grunau2, Grunau3].

Hilfssatz 6.0.7 *Sei u eine Störung der stationären Lösung $\overset{\circ}{v}$ in Ω und es gelte*

(6.0.6) $$\|u\|_2 \leq Ct^{-\alpha} \qquad \textit{für } t >> 0$$

Dann gilt

(6.0.7) $$\|\nabla u\|_2 \leq Ct^{-\frac{1}{2}-\alpha} \qquad \textit{für } t >> 0$$

Beweis: Sei $v = \overset{\circ}{v} - v_\infty$. Wir verwenden hier Theorem 4 mit dem Operator $\mathcal{B}u = \operatorname{div}(u \otimes v + v \otimes u) = (u \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u$. Der Projektor $\mathbb{P}_\Omega$ auf den divergenzfreien Anteil, angewendet auf die Gleichung (1.0.2) ergibt dann gerade

$$u_t + \mathbb{O}_{v_\infty,v}u + \mathbb{P}_\Omega\big((u \cdot \nabla)u\big) = 0$$

wobei $\mathbb{O}_{v_\infty,v}u = -\mathbb{A}u + \mathbb{P}(v_\infty \cdot \nabla)u + \mathbb{P}\big((u \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u\big)$. der volle Oseenoperator ist. Nach Duhamels Prinzip gilt

$$u(t) = e^{-\mathbb{O}_{v_\infty,v}(t/2)}u(t/2) - \int_{t/2}^{t} e^{-\mathbb{O}_{v_\infty,v}(t-s)}\mathbb{P}_\Omega\big((u \cdot \nabla)u\big)(s)\, ds$$

Daraus folgt für große Zeiten $t >> 0$ und $0 < \epsilon \leq 1/4$

$$\|\nabla u(t)\|_2 \leq \|\nabla e^{-\mathbb{O}_{v_\infty,v}(t/2)}u(t/2)\|_2 + \int_{t/2}^{t} \big\|\nabla e^{-\mathbb{O}_{v_\infty,v}(t-s)}\mathbb{P}_\Omega\big((u \cdot \nabla)u\big)(s)\big\|_2\, ds$$

Wende Theorem 4 mit $p = q = 2$ auf den ersten Summand und mit $p = 6/(5-4\epsilon)$, $q = 2$ auf den zweiten Summanden an. Wegen der Beschränktheit des Projektors $\mathbb{P}_\Omega$ (Satz 2.0.3) folgt

$$\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}\|u(t/2)\|_2 + \int_{t/2}^{t} (t-s)^{-(1-\epsilon)}\big\|\big((u \cdot \nabla)u\big)(s)\big\|_{\frac{6}{5-4\epsilon}}\, ds$$

Voraussetzung (6.0.6) und *Hölder*

$$\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}-\alpha} + \int_{t/2}^{t} (t-s)^{-(1-\epsilon)}\|u(s)\|_{\frac{3}{1-2\epsilon}}\|\nabla u(s)\|_2\, ds$$

Interpolationstheorem von [Friedmann, Theorem 9.3, S.: 24]

$$\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}-\alpha} + \int\limits_{t/2}^{t} (t-s)^{-(1-\epsilon)} \|u(s)\|_2^{\frac{1}{2}-2\epsilon} \|\nabla u(s)\|_2^{\frac{3}{2}+2\epsilon} \, ds$$

Für große Zeiten t wird $\|u(s)\|_2$, $s \geq t/2$ hinreichend regulär (siehe [MiSo]), so daß das Integral beschränkt bleibt. Nehmen wir nun an, daß $\|\nabla u(s)\|_2 \leq s^{-\beta}$ mit einem $\beta \geq 0$, dann

$$\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}-\alpha} + \int\limits_{t/2}^{t} (t-s)^{-(1-\epsilon)} s^{-\alpha(\frac{1}{2}-2\epsilon)-\beta(\frac{3}{2}+2\epsilon)} \, ds$$

Nach Hilfssatz 5.3.1 gilt

$$\begin{aligned} &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}-\alpha} + C(1+t)^{-\alpha(\frac{1}{2}-2\epsilon)-\beta(\frac{3}{2}+2\epsilon)+\epsilon} \\ &\leq C(1+t)^{-\min\left\{\frac{1}{2}+\alpha, \alpha(\frac{1}{2}-2\epsilon)+\beta(\frac{3}{2}+2\epsilon)-\epsilon\right\}} \end{aligned}$$

Daß a priori $\|\nabla u\|_2$ in der Zeit fällt, genauer gesagt daß $\beta > 0$, folgt z.B. aus [Bo, Miy.5], wo wir $\alpha > 0$ unter der Voraussetzung von Reynoldzahl kleiner 1 (dort etwas anders formuliert) finden. Nach der obigen Ungleichung muß daher auch $\beta > 0$ sein.

Setzen wir die Abklingraten $\|\nabla u\|_2 \leq Ct^{-\beta}$ iterativ in die Ungleichung ein: Im ersten Schritt ist $\beta_1 > 0$. In jedem weiteren Schritt verbessert sich β_{i-1} in jedesmal um mindestens $3\beta_i/2 - \epsilon$ bis in endlich vielen Schritten die Grenze $\beta = \alpha + 1/2$ erreicht ist.

$\square$

Bemerkung: Mit Hilfe a priori Abklingraten von $\|\nabla u(t)\|_2 \leq C(1+t)^{-\beta_0}$ mit $\beta_0 > 1/4$ genügt es Theorem 4 für $p = q = 2$ und für $p = 3/2$, $q = 2$ anzuwenden ($\epsilon = 1/4$).

Hilfssatz 6.0.8 *Bezeichne* $\mathbb{O}^*_{v_\infty}. = \mathbb{A}. - (v_\infty \cdot \nabla).$ *den adjungierten Oseenoperator zu* $\mathbb{O}_{v_\infty}$*, so ist* $\mathcal{D}_p(\mathbb{O}_{v_\infty}) := H_p(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ *bzw.* $\mathcal{D}_{p'}(\mathbb{O}^*_{v_\infty}) := \mathcal{D}_{p'}(\mathbb{O}_{v_\infty})$ *und es ist*

$$\left(e^{-\mathbb{O}_{v_\infty} t}\right)^* = e^{-\mathbb{O}^*_{v_\infty} t} \qquad \textit{in} \quad \mathcal{D}_{p'}((\mathbb{O}^*_{v_\infty})^2) \tag{6.0.8}$$

Beweis: Die erste Aussage ist offensichtlich bzw. Definition und Wohldefiniertheit. Nach (5.2.11) (mit $\mathbb{O}_{v_\infty}$ statt $\mathbb{O}_{v_\infty,v}$) oder [Pazy, Corollary 7.5, Chapter 1] ist

$$e^{-\mathbb{O}_{v_\infty} t} f = -\frac{1}{2\pi i t} \int\limits_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} e^{\lambda t} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathbb{O}_{v_\infty} + \lambda \mathbb{I})^{-1} f \, ds$$

Andererseit ist

$$\begin{aligned} &(\mathbb{O}_{v_\infty} + \lambda \mathbb{I})^{-1} = \lambda^{-1}(\mathbb{O}_{v_\infty} \lambda^{-1} + \mathbb{I})^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \mathbb{O}^k_{v_\infty} \\ \Rightarrow \quad &\left((\mathbb{O}_{v_\infty} + \lambda \mathbb{I})^{-1}\right)^* = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \left(\mathbb{O}^k_{v_\infty}\right)^* = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \left(\mathbb{O}^*_{v_\infty}\right)^k = (\mathbb{O}^*_{v_\infty} + \lambda \mathbb{I})^{-1} \end{aligned}$$

woraus sofort folgt

$$< e^{-\mathbb{O}_{v_\infty} t} f, g > = < f, e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}^* t} g > \qquad \forall\, f \in \mathcal{D}_p((\mathbb{O}_{v_\infty})^2),\ g \in \mathcal{D}_{p'}((\mathbb{O}_{v_\infty}^*)^2)$$

mit $1 = 1/p + 1/p'$. $\square$

Hilfssatz 6.0.9 *Sei* $\{E_\lambda\}_{\lambda>0}$ *die Spektralschar zum Stokes-Operator* $\mathbb{A} = -\mathbb{P}_\Omega \Delta$. *Für ein* u *aus der Lösungsklasse der Gleichung* (1.0.2) *bzw. für* $v = \overset{\circ}{v} - v_\infty$ *mit den Eigenschaften von Satz 2.0.1 gilt für alle* $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ *und für alle hinreichend kleinen* $\epsilon > 0$

(6.0.9) $$\big\| E_\lambda e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}(t-\tau)} \mathbb{P}\big((u\cdot\nabla)u\big)\big\|_2 \le C\|u\|_2^{1-2\epsilon}\|\nabla u\|_2^{1+2\epsilon}\lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon}$$

(6.0.10) $$\big\| E_\lambda e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}(t-\tau)} \mathbb{P}\big((u\cdot\nabla)v\big)\big\|_2 \le C\|u\|_2^{\frac{1}{4}}\|\nabla u\|_2^{\frac{3}{4}}\lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon}$$

(6.0.11) $$\big\| E_\lambda e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}(t-\tau)} \mathbb{P}\big((v\cdot\nabla)u\big)\big\|_2 \le C\|\nabla u\|_2\lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon}$$

Beweis: Gemäß [Bo, Miy.4, Corollary 4.5] gilt das Einbettungsresultat: Für jedes hinreichend kleine $\epsilon > 0$ und $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{\frac{3}{4}-\epsilon})$ folgt $\|\Phi\|_{\frac{3}{2\epsilon}} \le C\|\mathbb{A}^{\frac{3}{4}-\epsilon}\Phi\|_2$.

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\big\| E_\lambda e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}(t-\tau)} \mathbb{P}\big((u\cdot\nabla)u\big)\big\|_2 &= \sup_{\substack{\Phi\in H_2(\Omega)\\ \|\Phi\|_2=1}} < e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}(t-\tau)} \mathbb{P}\big((u\cdot\nabla)u\big), E_\lambda\Phi > \\
&\le \big\| e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}(t-\tau)} \mathbb{P}\big((u\cdot\nabla)u\big)\big\|_{\frac{3}{3-2\epsilon}} \sup_{\substack{\Phi\in H_2(\Omega)\\ \|\Phi\|_2=1}} \|E_\lambda\Phi\|_{\frac{3}{2\epsilon}} \\
&\le C\|(u\cdot\nabla)u\|_{\frac{3}{3-2\epsilon}} \sup_{\substack{\Phi\in H_2(\Omega)\\ \|\Phi\|_2=1}} \|\mathbb{A}^{\frac{3}{4}-\epsilon}E_\lambda\Phi\|_2
\end{aligned}$$

da $e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}(t-\tau)}$ nach [ShiKo, Theorem 2, S.: 6] eine beschränkte Halbgruppe ist.

Wegen

$$\|\mathbb{A}^{\frac{3}{4}-\epsilon}E_\lambda\Phi\|_2 = \Big\|\int_0^\infty \mu^{\frac{3}{4}-\epsilon}\, dE_\mu E_\lambda\Phi\Big\|_2 = \Big\|\int_0^{\lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon}} \mu\, dE_\mu\Phi\Big\|_2 \le \lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon}\|\Phi\|_2 = \lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon}$$

und wegen *Hölder* $(3-2\epsilon)/3 = 1/2 + (3-4\epsilon)/6$ und [Friedmann, Theorem 9.3, S.:24] $(3-4\epsilon)/6 = 2\epsilon(1/2-1/3) + (1-2\epsilon)1/2$

$$\|(u\cdot\nabla)u\|_{\frac{3}{3-2\epsilon}} \le C\|u\|_{\frac{6}{3-4\epsilon}}\|\nabla u\|_2 \le C\|u\|_2^{1-2\epsilon}\|\nabla u\|_2^{1+2\epsilon}$$

folgt

$$\big\| E_\lambda e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}(t-\tau)} \mathbb{P}\big((u\cdot\nabla)u\big)\big\|_2 \le C\|u\|_2^{1-2\epsilon}\|\nabla u\|_2^{1+2\epsilon}\lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon}$$

also (6.0.9).

Zu (6.0.10):

$$\begin{aligned}
\big\|E_\lambda e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}(t-\tau)}\mathbb{P}\big((v\cdot\nabla)u\big)\big\|_2 &= \sup_{\substack{\Phi\in H_2(\Omega)\\ \|\Phi\|_2=1}} < e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}(t-\tau)}\mathbb{P}\big((v\cdot\nabla)u\big), E_\lambda\Phi > \\
&\le C\|(v\cdot\nabla)u\|_{\frac{3}{3-2\epsilon}}\lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon} && \text{analog zu (6.0.9)}\\
&\le C \underbrace{\|v\|_{\frac{6}{3-4\epsilon}}}_{\le C<\infty,\text{ da } \frac{6}{3-4\epsilon}>2} \|\nabla u\|_2\lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon} && \textit{Hölder}\\
&\le C\|\nabla u\|_2\lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon}
\end{aligned}$$

Zu (6.0.11):

$$\begin{aligned}
\big\|E_\lambda e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}(t-\tau)}\mathbb{P}\big((u\cdot\nabla)v\big)\big\|_2 &= \sup_{\substack{\Phi\in H_2(\Omega)\\ \|\Phi\|_2=1}} < e^{-\mathbb{O}_{v_\infty}(t-\tau)}\mathbb{P}\big((u\cdot\nabla)v\big), E_\lambda\Phi > \\
&\le C\|(v\cdot\nabla)u\|_{\frac{3}{3-2\epsilon}}\lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon} && \text{analog zu (6.0.9)}\\
&\le C\|u\|_4\|\nabla v\|_{\frac{12}{9-8\epsilon}}\lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon} && \textit{Hölder}\\
&\le C\|\nabla u\|_2^{\frac{3}{4}}\|u\|_2^{\frac{1}{4}}\lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon}
\end{aligned}$$

nach [Friedmann, Theorem 9.3, S.:24].

□

Hilfssatz 6.0.10 *Für eine Lösung u des Systems* (1.0.2) *gilt:*

$$(6.0.12)\quad \|u(t)\|_2^2\exp\Big(2(1-\mathrm{Re_E})\int_0^t\lambda(\tau)\,d\tau\Big)$$
$$\le \|u(0)\|_2^2 + 2(1-\mathrm{Re_E})\int_0^t \exp\Big(2(1-\mathrm{Re_E})\int_0^\tau\lambda(\sigma)\,d\sigma\Big)\lambda(\tau)\|E_{\lambda(\tau)}u(\tau)\|_2^2\,d\tau$$

mit einer noch später zu bestimmenden positiven Funktion $\lambda(t)\in\mathbb{R}_*^+\to\mathbb{R}_*^+$.

Beweis: Für u gilt nach Voraussetzung die Energieungleichung (6.0.3)

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_s^t\|\nabla u(\tau)\|_2^2\,d\tau \le \|u(s)\|_2^2 + 2\int_s^t < (u\cdot\nabla)u, v > \,d\tau$$

wobei wieder $v = \overset{\circ}{v} - v_\infty$. Nach Definition der Reynoldszahl folgt

$$\|u(t)\|_2^2 + 2(1-\mathrm{Re_E})\int_s^t\|\nabla u(\tau)\|_2^2\,d\tau \le \|u(s)\|_2^2$$

und wegen

(6.0.13)

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 = \|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} u(t)\|_2^2 = \int\limits_0^\infty \mu \; d\|E_\mu u(t)\|_2^2 \geq \int\limits_\lambda^\infty \mu \; d\|E_\mu u(t)\|_2^2 \geq \lambda\big(\|u(t)\|_2^2 - \|E_\lambda u(t)\|_2^2\big)$$

ist

(6.0.14)

$$\|u(t)\|_2^2 + 2(1-\mathrm{Re}_\mathrm{E}) \int\limits_s^t \lambda(\tau)\|u(\tau)\|_2^2 \; d\tau \leq \|u(s)\|_2^2 + 2(1-\mathrm{Re}_\mathrm{E}) \int\limits_s^t \lambda(\tau)\|E_\lambda u(\tau)\|_2^2 \; d\tau$$

Setzt man $y(t) := \|u(t)\|_2^2$, $\varphi(\tau) := \lambda(\tau)2(1-\mathrm{Re}_\mathrm{E})$ und $\beta(\tau) := \|E_\lambda u(\tau)\|_2^2 2(1-\mathrm{Re}_\mathrm{E})\lambda(\tau)$, so hat (6.0.14) die Gestallt

$$y(t) + \int\limits_s^t \varphi(\tau)y(\tau) \; d\tau \leq y(s) + \int\limits_s^t \beta(\tau) \; d\tau$$

und mit [Wi, pp. 307, 308] folgt

$$y(t)\exp\Big(\int\limits_0^t \varphi(\tau) \; d\tau\Big) \leq y(0) + \int\limits_0^t \exp\Big(\int\limits_0^\tau \varphi(\sigma) \; d\sigma\Big)\beta(\tau) \; d\tau$$

und nach Einsetzen die Behauptung.

$\square$

<u>Beweis des Theorems 5</u>:

Sei $\Phi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty$ mit $\|\Phi_0\|_2 = 1$ und $\operatorname{div}\Phi_0 = 0$, aber sonst beliebig. Dann ist die Funktion

$$\Phi(\tau) = \mathbb{P}_\Omega e^{-\mathbb{O}^*_{v_\infty}(\tilde{t}-\tau)} E_{\lambda(\tilde{t})}\Phi_0$$

Lösung der Oseen-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Phi - \mathbb{O}^*_{v_\infty}\Phi = 0 \iff \mathbb{P}_\Omega\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\Phi + \Delta\Phi + (v_\infty\cdot\nabla)\Phi)\Big) = 0$$

Setzt man dieses Φ in die schwache Version der Störungsgleichung (1.0.1), so erhält man

$$\int\limits_0^t \Big(- < u, \partial_\tau\Phi > + < \nabla u, \nabla\Phi > + < (u\cdot\nabla)\overset{\circ}{v} + (\overset{\circ}{v}\cdot\nabla)u + (u\cdot\nabla)u, \Phi\Big) \; d\tau$$
$$= < u(0), \Phi(0) > - < u(t), \Phi(t) >$$

Mit partieller Integration und wegen $v = \overset{\circ}{v} - v_\infty$ formen wir um zu

$$< u(t), \Phi(t) > = < u(0), \Phi(0) > + \int\limits_0^t < \underbrace{\partial_\tau\Phi(\tau) + \Delta\Phi(\tau) + (v_\infty\cdot\nabla)\Phi(\tau)}_{=0}, u(\tau) >$$
$$- < (u\cdot\nabla)v + (v\cdot\nabla)u + (u\cdot\nabla)u, \Phi > \; d\tau$$

Also

$$< u(t), \Phi(t) > \; = < u(0), \Phi(0) > - \int_0^t < (u \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)u, \Phi > \; d\tau$$

Läßt man nun $\tilde{t} \to t$ und nimmt anschließend $\sup_{\substack{\|\Phi_0\|_2 = 1 \\ \operatorname{div}\Phi_0 = 0}} \ldots$, so ergibt, da $e^{-\mathbb{O}_{v\infty}}$, E_λ und $\mathbb{P}_\Omega$ beschränkte Operatoren sind

(6.0.15)

$$\|E_{\lambda(t)}u(t)\|_2 \leq C\|u_0(t)\|_2 + \int_0^t \|E_{\lambda(t)}e^{-\mathbb{O}_{v\infty}(t-\tau)}\mathbb{P}\big((u \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)u\big)\|_2 \, d\tau$$

wobei $u_0(t) = e^{-\mathbb{O}_{v\infty}t}\big((u(0)\big)$ eine Lösung der einfachen Oseengleichung $\partial_t u_0(t) - \mathbb{O}_{v_\infty}u_0(t) = 0$, $u_0(0) = u(0)$ ist.

Wir untersuchen die rechte Seite von (6.0.15) genauer: Aus Hilfssatz 6.0.9 (6.0.9), (6.0.10), (6.0.11) folgt

$$\begin{aligned}
&\|E_{\lambda(t)}e^{-\mathbb{O}_{v\infty}(t-\tau)}\mathbb{P}\big((u \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)u\big)\|_2 \\
&\qquad\qquad \leq C\lambda^{\frac{3}{4}-\epsilon}\Big(\|u\|_2^{1-2\epsilon}\|\nabla u\|_2^{1+2\epsilon} + \|u\|_2^{\frac{1}{4}}\|\nabla u\|_2^{\frac{3}{4}} + \|\nabla u\|_2\Big)
\end{aligned}$$

Mit *Hölder* und $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ und $p \geq 3/4$ folgt

$$\begin{aligned}
&\Big(\int_0^t \|E_{\lambda(t)}e^{-\mathbb{O}_{v\infty}(t-\tau)}\mathbb{P}\big((u \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)u\big)\|_2 \, d\tau\Big)^2 \\
&\quad \leq C\lambda^{\frac{3}{2}-2\epsilon}\Bigg(\Big(\int_0^t \|\nabla u\|_2^2 \, d\tau\Big)^{1+2\epsilon}\Big(\int_0^t \|u\|_2^2 \, d\tau\Big)^{1-2\epsilon} + \Big(\int_0^t \|\nabla u\|_2^p \, d\tau\Big)^{\frac{2}{p}}(1+t)^{\frac{2p-2}{p}} \\
&\qquad\qquad + \Big(\int_0^t \|\nabla u\|_2^p \, d\tau\Big)^{\frac{3}{2p}}\Big(\int_0^t \|u\|_2^{\frac{p}{4p-3}} \, d\tau\Big)^{\frac{4p-3}{2p}}\Bigg)
\end{aligned}$$

Zunächst ist, außer für $p = 2$, was aus der Energieungleichung bei Reynoldszahl kleiner 1 folgt, nicht klar, welche Werte p annehmen darf.

Setzen wir (6.0.15) in die Formel (6.0.12) aus Hilfssatz 6.0.10 ein. Zusammen mit der obigen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_2^2 \exp\Big(2(1-\mathrm{Re_E})\int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\Big) \leq \|u(0)\|_2^2 \\
&\qquad + 2(1-\mathrm{Re_E})\int_0^t \exp\Big(2(1-\mathrm{Re_E})\int_0^\tau \lambda(\sigma)\, d\sigma\Big)\lambda(\tau)\|u_0(\tau)\|_2^2 \, d\tau
\end{aligned}$$

$$+\,2(1-\mathrm{Re}_{\mathrm{E}})\int\limits_0^t \exp\Big(2(1-\mathrm{Re}_{\mathrm{E}})\int\limits_0^\tau \lambda(\sigma)\,d\sigma\Big)$$

$$\cdot\,\lambda^{\frac{5}{2}-2\epsilon}\Bigg(\Big(\Big(\int\limits_0^\tau \|\nabla u\|_2^2\,d\sigma\Big)^{1+2\epsilon}\Big(\int\limits_0^\tau \|u\|_2^2\,d\sigma\Big)^{1-2\epsilon}+\Big(\int\limits_0^\tau \|\nabla u\|_2^p\,d\sigma\Big)^{\frac{2}{p}}(1+\tau)^{\frac{2p-2}{p}}$$

$$+\Big(\int\limits_0^\tau \|\nabla u\|_2^p\,d\sigma\Big)^{\frac{3}{2p}}\Big(\int\limits_0^\tau \|u\|_2^{\frac{p}{4p-3}}\,d\sigma\Big)^{\frac{4p-3}{2p}}\Bigg)\,d\tau$$

Ausmultipliziert stehen auf der rechten Seite 5 Summanden: $T_1=\|u(0)\|_2^2$,

$$T_2=2(1-\mathrm{Re}_{\mathrm{E}})\int\limits_0^t \exp\Big(2(1-\mathrm{Re}_{\mathrm{E}})\int\limits_0^\tau \lambda(\sigma)\,d\sigma\Big)\lambda(\tau)\|u_0(\tau)\|_2^2\,d\tau$$

und die restlichen 3 unter dem Integral, also

$$\|u(t)\|_2^2\exp\Big(2(1-\mathrm{Re}_{\mathrm{E}})\int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\Big)\le T_1+T_2+T_3+T_4+T_5 \tag{6.0.16}$$

Iteration: Setze

$$\lambda(t):=\frac{\gamma}{1+t}$$

mit einer hinreichend großen Zahl $\gamma>0$. Dann ist

$$\exp\Big(2(1-\mathrm{Re}_{\mathrm{E}})\int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\Big)=(1+t)^{2\gamma(1-\mathrm{Re}_{\mathrm{E}})} \tag{6.0.17}$$

und es folgt

$$T_2=C(1-\mathrm{Re}_{\mathrm{E}})\gamma(1+t)^{2\gamma(1-\mathrm{Re}_{\mathrm{E}})}\|u_0(t)\|_2^2$$

Angenommen $\|u(t)\|_2\le C(1+t)^{-\alpha}$ mit einem $\alpha\ge 0$. Aus der Energieungleichung folgt für energetische Reynoldszahlen $\mathrm{Re}_{\mathrm{E}}<1$ mindesten α nicht negativ. Ebenfalls aus der Energieungleichung folgt

$$\int\limits_0^\infty \|\nabla u\|_2^2\,dt\le C<\infty$$

Ist nun $\|u(t)\|_2\le C(1+t)^{-\alpha}$, so folgt aus Hilfssatz 6.0.7 $\|\nabla u(t)\|_2\le C(1+t)^{-\frac{1}{2}-\alpha}$, also

$$\int\limits_0^\infty \|\nabla u\|_2^p\,dt\le C<\infty \qquad \forall\, p>\frac{2}{2\alpha+1}\text{ oder }p=2 \tag{6.0.18}$$

Da außerdem für $\alpha \neq 1$ gilt $\int_0^t (1+\tau)^{-\alpha}\, dt \leq C(1+t)^{\max\{0,1-\alpha\}}$ ist

$$\left(\int_0^\tau \|u\|_2^2 \, d\sigma\right)^{1-2\epsilon} \leq C(1+\tau)^{\max\{0,1-2\alpha\}(1-2\epsilon)}$$

$$\left(\int_0^\tau \|u\|_2^{\frac{p}{4p-3}} \, d\sigma\right)^{\frac{4p-3}{2p}} \leq C(1+\tau)^{\max\left\{0,1-\frac{p\alpha}{4p-3}\right\}\frac{4p-3}{2p}} = C(1+\tau)^{\max\left\{0,\frac{4p-3}{2p}-\frac{\alpha}{2}\right\}}$$

wobei $C = C(p,\alpha)$. Mit (6.0.17) und (6.0.18) folgt

$$\begin{aligned}
T_3 &\leq C\int_0^t (1+\tau)^{2\gamma(1-\mathrm{Re_E})-\frac{5}{2}+2\epsilon+\max\{0,1-2\alpha\}(1-2\epsilon)}\, d\tau \\
&\leq C(1+t)^{2\gamma(1-\mathrm{Re_E})+\max\left\{2\epsilon-\frac{3}{2},(1-2\alpha)(1-2\epsilon)+2\epsilon-\frac{3}{2}\right\}} \\
T_4 &\leq C\int_0^t (1+\tau)^{2\gamma(1-\mathrm{Re_E})-\frac{5}{2}+2\epsilon+\frac{2p-2}{p}}\, d\tau \leq C(1+t)^{2\gamma(1-\mathrm{Re_E})+\frac{p-4}{2p}+2\epsilon} \\
T_5 &\leq C\int_0^t (1+\tau)^{2\gamma(1-\mathrm{Re_E})-\frac{5}{2}+2\epsilon+\max\left\{0,\frac{4p-3}{2p}-\frac{\alpha}{2}\right\}}\, d\tau \leq C(1+t)^{2\gamma(1-\mathrm{Re_E})+\max\left\{2\epsilon-\frac{3}{2},\frac{p-3}{2p}-\frac{\alpha}{2}+2\epsilon\right\}}
\end{aligned}$$

In Gleichung (6.0.16) einsetzen:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_2^2 \leq \|u(0)\|_2^2(1+t)^{-2\gamma(1-\mathrm{Re_E})} &+ C(1-\mathrm{Re_E})\|u_0(t)\|_2^2 \\
&+ C(1+t)^{\max\left\{2\epsilon-\frac{3}{2},(1-2\alpha)(1-2\epsilon)+2\epsilon-\frac{3}{2},\frac{p-4}{2p}+2\epsilon,\frac{p-3}{2p}-\frac{\alpha}{2}+2\epsilon\right\}}
\end{aligned}$$

Also für hinreichend großes $\gamma >> 0$ und wegen $a^2+b^2 \leq (a+b)^2$ für nicht-negative Zahlen a,b

(6.0.19) $$\|u(t)\|_2 \leq C\|u_0(t)\|_2 + C(1+t)^{-\min\left\{\frac{3}{4}-\epsilon,(2\alpha-1)(\frac{1}{2}-\epsilon)-\epsilon+\frac{3}{4},\frac{4-p}{4p}-\epsilon,\frac{3-p}{4p}+\frac{\alpha}{4}-\epsilon\right\}}$$

Angenommen $\|u_0(t)\|_2$ fällt wie $t^{-\alpha_0}$. Im ersten Schritt kann man $p_1 = 2$ und $\alpha_1 = 0$ wählen. Daraus folgt

$$\|u(t)\|_2 \leq C(1+t)^{-\min\left\{\frac{3}{4}-\epsilon,-\frac{1}{2}+\frac{3}{4},\frac{1}{4}-\epsilon,\frac{1}{8}-\epsilon,\alpha_0\right\}} \leq C(1+t)^{-\min\left\{\frac{1}{8}-\epsilon,\alpha_0\right\}}$$

Für genügend großes α_0 hat man also eine Abklingrate von $1/8-\epsilon$ und man kann im zweiten Schritt

$$\alpha_2 = \frac{1}{8}-\epsilon \qquad \text{und wegen (6.0.18)}$$
$$p_2 = \frac{2+2\delta}{2\alpha_2+1}$$

mit einer hinreichend kleinen Zahl $\delta > 0$ in (6.0.19) einsetzen. Im $i+1$ Schritt erhält man

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1} &= \min\left\{\frac{3}{4}-\epsilon,(2\alpha_i-1)(\frac{1}{2}-\epsilon)-\epsilon+\frac{3}{4},\frac{4-p_i}{4p_i}-\epsilon,\frac{3-p_i}{4p_i}+\frac{\alpha_i}{4}-\epsilon,\alpha_0\right\} \\
p_{i+1} &= \frac{2+2\delta}{2\alpha_{i+1}+1}
\end{aligned}$$

Also gilt für $\alpha_{i+1} = \alpha_{i+1}(\alpha_i)$

$$\begin{aligned}
&\alpha_{i+1}(\alpha_i)\\
&\quad = \min\left\{\frac{3}{4}-\epsilon, (2\alpha_i-1)(\frac{1}{2}-\epsilon)-\epsilon+\frac{3}{4}, \frac{4-\frac{2+2\delta}{2\alpha_i+1}}{4\frac{2+2\delta}{2\alpha_i+1}}-\epsilon, \frac{3-\frac{2+2\delta}{2\alpha_i+1}}{4\frac{2+2\delta}{2\alpha_i+1}}+\frac{\alpha_i}{4}-\epsilon, \alpha_0\right\}\\
&\quad = \min\left\{\frac{3}{4}-\epsilon, \alpha_i+\frac{1}{4}-2\alpha_i\epsilon, \frac{\alpha_i}{1+\delta}+\frac{1-\delta}{4(1+\delta)}-\epsilon, \frac{\alpha_i}{1+\delta}+\frac{1-2\delta(1-\alpha_i)}{8(1+\delta)}-\epsilon, \alpha_0\right\}\\
&\quad \geq \min\left\{\frac{3}{4}-\epsilon, \frac{\alpha_i}{1+\delta}+\frac{1-2\delta(1-\alpha_i)}{8(1+\delta)}-2\epsilon, \alpha_0\right\}\\
&\quad \geq \min\left\{\frac{3}{4}-\epsilon, \frac{\alpha_i}{1+\delta}+\frac{1-2\delta}{8(1+\delta)}-2\epsilon, \alpha_0\right\}
\end{aligned}$$

Ist also α_0 hinreichend groß , d.h. $\geq 3/4-\epsilon$, sowie $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ hinreichend klein, so erhält man in jedem Iterationsschritt eine Verbesserung der Abklingrate bis in endlich vielen Schritten die Grenze von $\min\{3/4-\epsilon, \alpha_0\}$ erreicht ist.

$\square$

Symbolverzeichnis

∂_i	$\frac{\partial}{\partial x_i}$, Ableitung nach der i-ten Variable
∂_t	$\frac{\partial}{\partial t}$, Zeitableitung
Δu	$= \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \partial_3^2 u$, der Laplace-Operator für Funktionen $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
Δu	$= (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)^T$, der Laplace-Operator für Funktionen $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
∂_x^α	$= \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \partial_3^{\alpha_3}$, $\alpha \in \mathbb{N}^3$
$\partial_x^m u$	$= (\partial_x^\alpha u,\ \lvert\alpha\rvert = m)$
$\nabla^m u$	$= \partial_x^m u$
$\overline{\partial}_x^m u$	$= (\partial_x^\alpha u,\ \lvert\alpha\rvert \leq m)$
∇u	$= \operatorname{grad} u = (\partial_i u)_{i=1,2,3}$ für Fkt. $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
∇u	$= (\partial_j u_i)_{i,j=1,2,3}$, 3×3 Matrix für Fkt. $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
∇u	$\sum_{i=1,2,3} c_i \partial_x^{\alpha_i} u_{i,j}$, $\lvert\alpha_i\rvert = 1$ Ableitungsoperator 1. Ord. für Fkt. $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$
$\nabla \cdot u$	$= \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^3 \partial_i u_i$, Divergenz von u
$(u \cdot \nabla) v$	$= \left(\sum_{i=1,2,3} u_i \partial_i v_j \right)_{j=1,2,3}$
G	beschränktes oder unbeschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^3$
D	beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^3$
Ω	Außenraumgebiet
B_r	$= \overline{\mathcal{U}_r(0)} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \lvert x\rvert \leq r\}$
D_r	$= \{x \in \mathbb{R}^3 : r - 1 \leq \lvert x\rvert \leq r\}$
S_r	$= \{x \in \mathbb{R}^3 : \lvert x\rvert = r\}$
Ω_r	$= \Omega \cap B_r$
$\partial\Omega_r$	$= \partial\Omega \cup S_r$
$\lVert u\rVert_{p,G}$	$\left(\int_G \lvert u\rvert^p\, dx\right)^{1/p}$ bzw. $\left(\sum_{j=1,2,3} \int_G \lvert u_j\rvert^p\, dx\right)^{1/p}$
$\lVert u\rVert_{p,m,G}$	$\lVert\overline{\partial}_x^m u\rVert_{p,G}$ die Sobolevnorm
$< u, v >_G$	$\int_G u \cdot \overline{v}$ duale Paarung
$\lVert u\rVert_{p,m}$	$\lVert u\rVert_{p,m,\Omega}$
$L^p(G)$	bezüglich des Lebesque-Maßes integrierbare Funktionen
$L_r^p(G)$	$= \{u \in \mathbb{L}^p(G) : u\rvert_{\mathbb{R}^3 - B_r} = 0\}$
$\mathcal{C}_0^\infty(G)$	beliebig differentierbare Funktionen mit kompaktem Träger in G
$\mathcal{D}'(G)$	Distributionen; alle stetig, linearen Abbildungen : $\mathcal{C}_0^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{R}$
$\mathcal{S}'$	gemäßigte Distributionen auf $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{S}'(G)$	$= \{u : \exists \tilde{u} \in \mathcal{S}'$ mit $u = \tilde{u}$ auf $G\}$

$W^{m,p}(G)$	Sobolevraum der $m \in \mathbb{N}$ mal schwach diff. Fkt.; $1 \leq p \leq \infty$
$W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(G)$	lokal schwach diff. Fkt.
$W^{m,p}_0(G)$	$\overline{\mathcal{C}^\infty_0(G)} \subset W^{m,p}(G)$
$\hat{W}^{m,p}(G)$	$\{u \in \mathcal{S}'(G) \cap W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(G) : \lVert \partial^m_x u \rVert_{p,G} < \infty\}$
$\bar{W}^{m,p}(G)$	$= \big\{u \in W^{m,p}_0(G) : \int_D u(x)\, dx = 0\big\}$ mittelwertfreie Sobolevfunktionen
$H_p(G)$	$= \overline{\{u \in \mathcal{C}^\infty_0(G) : \operatorname{div} u = 0\}} \subset L^p(G)$, divergenzfreie Fkt.
$\mathcal{G}_p(G)$	$= \{\nabla u : u \in \tilde{W}^{1,p}(G)\}$
$H_{p,r}(G)$	$= H_p(G) \cap L^p_r(G)$
$\mathbb{P}_G$	Projektor auf den divergenzfreien Teil $H_p(G)$
v_∞	$\in \mathbb{R}^3$, Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen
$\mathring{v}$	Lösung der stationären Gleichung von Navier-Stokes
v	$= \mathring{v} - v_\infty$
$\mathcal{E}(v)$	Fortsetzungsoperator der auf Ω definierten Fkt. auf ganz $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{B}(u)$	$:= \mathcal{B}_v(u) := \nabla\big(\mathcal{E}(v) \otimes u + u \otimes \mathcal{E}(v)\big)$ Störungsoperator in $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{B}(u)$	$(u \cdot \nabla v) + (v \cdot \nabla) u$ Störungsoperator in Ω falls ∇ die Divergenz und v differgenzfrei ist
$\mathbb{A}_G$	$-\mathbb{P}_G(\Delta)$ Stokes-Operator
$\mathbb{O}_{eG}$	$\mathbb{P}_G(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla))$ einfacher Oseen-operator
$\mathbb{O}_G$	$\mathbb{P}_G(-\Delta + (v_\infty \cdot \nabla)) + \mathcal{B}$ (voller) Oseen-operator
$\mathcal{Q}_e$	$(\lambda - \Delta + (v_\infty \cdot \nabla))$ Operator für $\lambda \in \mathbb{C}$
$\mathcal{Q}_\lambda$	$(\lambda - \Delta + (v_\infty \cdot \nabla) + \mathcal{B})$ Operator für $\lambda \in \mathbb{C}$
$\mathcal{D}_p(\mathbb{A}_G)$	$H_p(G) \cap W^{1,p}_0(G) \cap W^{2,p}_0(G)$ Wertebereich des Stokes-Operator
$\mathcal{D}_p(\mathbb{A}^{1/2}_G)$	$H_2(G) \cap W^{1,2}_0(G)$ Wertebereich von $\mathbb{A}^{1/2}$ im Hilbertraum; $\lVert \mathbb{A}^{1/2} u \rVert_2 = \lVert \nabla u \rVert_2$ in $\mathcal{D}_p(\mathbb{A}^{1/2})$
$\mathcal{D}_p(\mathbb{O}_{eG})$	$= \mathcal{D}_p(\mathbb{A}_G)$ Wertebereich des einfachen Oseen-Operator
$\mathcal{D}_p(\mathbb{O}_G)$	$= \mathcal{D}_p(\mathbb{A}_G)$ Wertebereich des vollen Oseen-Operator
σ_0	positive, relle Zahl mit $\vert v_\infty \vert < \sigma_0$
$T(t)$	$= \mathrm{e}^{-\mathbb{O}t}$ die durch $\mathbb{O}$ erzeugte Halbgruppe
$\mathbb{B}$	Operator mit $\operatorname{div} \mathbb{B}(f) = f$ für $f \in W^{m,p}_0(D)$
$\mathrm{Re}(z)$	Realteil einer komplexen Zahl z
$\mathrm{Im}(z)$	Imaginärteil einer komplexen Zahl z
Re_{E}	$\sup_{u \in\ (\mathbb{A}^{1/2}) - \{0\}} < (u \cdot \nabla) u, v > / \lVert \nabla u \rVert^2_2$ energetische Reynoldszahl
$\mathcal{A}(I, X)$	alle holomorphen Funktionen von $I \subset \mathbb{C}$ in den Banachraum X
$\mathcal{B}(I, X)$	alle beschränkten, stetigen Funktionen von $I \subset \mathbb{C}$ in den Banachraum X
$\mathcal{L}(X, Y)$	alle beschränkten, linearen Operatoren vom Banachraum X in den Banachraum Y
$\lVert . \rVert_{\mathcal{L}(X,Y)}$	Operatorennorm $= \sup_{\lVert x \rVert_X = 1} \lVert .(x) \rVert_Y$
$\sum_{v_\infty}$	$= \{\lambda \in \mathbb{C} \vert \vert v_\infty \vert^2 \operatorname{Re} \lambda + (\operatorname{Im} \lambda)^2 > 0\} \subset \rho(-\mathbb{O}_e)$ Teilmenge der Resolventenmenge von $-\mathbb{O}_e$
$\sum_0$	$= \mathbb{R}^2 - \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq 0, \operatorname{Im} \lambda = 0\} \subset \rho(-\mathbb{A})$ Teilmenge der Resolventenmenge von $-\mathbb{A}$

$\sum_{v_\infty,v}$	$=\{\lambda\in\mathbb{C}\vert\frac{(\vert v_\infty\vert+C)^2}{1-\mathrm{Re_E}}\,\mathrm{Re}\,\lambda+(\mathrm{Im}\,\lambda)^2>0\}$ Teilmenge der Resolventenmenge von $-\mathbb{O}$
$A\subset\subset B$	A kompakt in B enthalten bzw. eingebettet
$\mathbb{L}_{v_\infty}(\lambda,f,c)$	Lösungsoperator von $\mathcal{Q}_\lambda+\nabla p=0$ in beschränkten Gebieten
$\mathcal{I}_{v_\infty}(\lambda,f,c)$	Druck-Lösungsoperator von $\mathcal{Q}_\lambda+\nabla p=0$ in beschränkten Gebieten
$E_{v_\infty}(\lambda)(f)$	Lösungsoperator von $\mathcal{Q}_e+\nabla p=0$ in $\mathbb{R}^3$
$E_{v_\infty,v,\lambda}(f)$	Lösungsoperator von $\mathcal{Q}_\lambda+\nabla p=0$ in $\mathbb{R}^3$
$\Pi(f)$	Druck-Lösungsoperator von $\mathcal{Q}_e+\nabla p=0$ in $\mathbb{R}^3$
$\Pi_v(f)$	$=\Pi(f+g_\lambda(f))$ Druck-Lösungsoperator von $\mathcal{Q}_\lambda+\nabla p=0$ in $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{F}(u)$	Fouriertransformierte von u
$\hat{u}$	$=\mathcal{F}(u)$, Fouriertransformierte von u
$\check{u}$	$=\mathcal{F}^{-1}(u)$
δ_{jk}	= 1 für $j=k$ und = 0 für $j\neq k$
$u\otimes v$	Matrix $(u_iv_j)_{i,j=1,2,3}$

Literaturverzeichnis

[Adams] ADAMS, ROBERT A. : Sobolev Spaces. *Academic Press, New York San Francisco London, Pure and Applied Mathematics* **65** (1975)

[Bog1] BOGOVSKII, M. E.:Solution of the first value boundary value problem for the equation of continuity of an incompressible medium. *Sov. Math. Dokl.* **20**, 1094-1098 (1979)

[Bog1] BOGOVSKII, M. E.:Solution for some vektor analysis problems connected with operators div and grad. *Trudy Sem. S. L. Sobolev, No. 1, Novosibirsk: Acad. Nauk SSSR, Sibirsk. Otdel., Inst. Math.*, 5-40, (1980)

[Bo, Miy.1] BORCHERS, W.; MIYAKAWA, T.:L_2-Decay for Navier-Stokes Flows in exterior domains. *Acta Math* **165**, 189-227 (1990)

[Bo, Miy.2] BORCHERS, W.; MIYAKAWA, T.:L_2-Decay for Navier-Stokes Flows in Unbounded Domains, with Application to Exterior Stationary Flows. *Arch. Rational Mech. Anal* **118**, 273-295 (1992)

[Bo, Miy.3] BORCHERS, W.; MIYAKAWA, T.:L_2-Decay for Navier-Stokes Flows in Exterior Domains, II. *Hiroshima Math. J.* **21**, 621-640 (1992)

[Bo, Miy.4] BORCHERS, W.; MIYAKAWA, T.: On stability of exterior stationary Navier-Stokes flows. *Acta Math.* **174**, 311-382 (1995)

[Bo, Miy.5] BORCHERS, W.; MIYAKAWA, T.: On large time behavior of the total kinetic energy for weak solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains. Proc. of a symposium on the Navie-stokes equations, Oberwolfach 1988. *Lecture Notes in Mathematics, Berlin - Heidelberg - New York, Springer-Verlag* (1998)

[BoSo] BORCHERS, W.; SOHR, H.: On the semigroup of the Stokes operator for the exterior domain in L^p spaces. *Math. Z.* **196**, 415-425 (1987)

[Finn1] FINN, R.: An energy theorem for viscous fluid motions, *Arch. Rational Mech. Anal.* **6**, 371-381 (1960)

[Finn2] FINN, R.: On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated pertubation problems. *Arch. Rational Mech. Anal.* **19**, 363-406 (1965)

[Friedmann] FRIEDMAN, AVNER: Partial differential equations. *Robert E. Krieger Publishing Company Huntington, New York* (1976)

[FuMo] FUJIWARA, D; MORIMOTO, H.: An L^r- theorem of the Helmholz decomposition of vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec., 1* **24**, 685-700 (1977)

[Galdi1] GALDI, G. P.: An introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Vol. I. Linearized Steady Problems. *Springer Tracts in Natural Philosophy*, Volume **38** (1994)

[Galdi2] GALDI, G. P.: An introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Vol. I. Linearized Steady Problems. *Springer Tracts in Natural Philosophy*, Volume **39** (1994)

[Gi1] GIGA, Y.: Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L^r spaces. *Math. Z.* **178** 297-329 (1981)

[Gi2] GIGA, Y.: Domains of fractional powersof the Stokes operators in L^r-spaces. *Arch. Rational Mech. Anal.* **89** 251-265 (1985)

[GiMi] GIGA, Y., MIYAKAWA, T.: Solutions in L^r to the Navier-Stkes initial value problem. *Arch. Rational Mech. Anal.* **89** 267-281 (1985)

[GiSo] GIGA, Y., SOHR, H.: On the Stokes operator in exterior domains. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec., IA. Math.* **36** 103-130 (1989)

[Grunau1] GRUNAU, HANS-CHRISTOPH: The Reynolds number and large time behaviour for weak solutions of the Navier-Stokes equation. *Z angew Math Phys* **44** (1993)

[Grunau2] GRUNAU, HANS-CHRISTOPH: Boundedness for large $|x|$ of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations with prescribed velocity at infinity, *Commun. Math. Phys.* **151** 577-587 (1993).

[Grunau3] GRUNAU, HANS-CHRISTOPH: L^2-Decay Rates for Weak Solutions of Perturbed Navier-Stokes system in $\mathbb{R}^3$. *Journal of Math. Analysis and Applications* **185** 340-349 (1994)

[Hörmander] HÖRMANDER, LARS: The analysis of linear partial differential operators I. *Grund. math. Wiss.* **265** *Springer, Berlin, Heidelberg, New York* (1983)

[Iwa] IWASHITA, H.: $L_q - L_r$ estimates for solutions of the nonstationary Stokes equation in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problem in L_q spaces. *Math. Ann.* **285** 265-288 (1983)

[Lady] LADYZHENSKAJA, O.A.: The mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. *Gordan and Breach: New York, London, Paris* (1969)

[LaUr] LADYZHENSKAYA, URAL'TSEVA Linear and quasilinear elliptic equations. *Mathematics in Science and engeneering* Volume **46** (1968)

[Mar] MAREMONTI, P.:On the asymtotic behaviour of the L^2-norm of suitable weak solutionsto the Navier-Stokes equations in three-dimensional exterior domains, *Comm. Math. Phys.* **118**, 385-400 (1988)

[Mas] MASUDA, K.: On the stability of incompressible viscous fluid motions past objects, *J. Math. Soc. Japan* **27**, 294-327 (1975)

[Mi] MIYAKAWA, T.: On nonstationary solutions of the Navier-Stokes equations in an exterior domain, *Hiroshima Math. J.* **12**, 115-140 (1982)

[MiSo] MIYAKAWA, T.; SOHR, H.: On energy inequality, smoothness, and large time behaviour in L^2 for weak solutions of the Navier-Stokes equations in exterior domains *Math. Z.* **199**, 455-478 (1988)

[Pazy] PAZY, A.: Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. *Appl. Math. Sci.* **44**, *Springer, Berlin, Heidelberg, New York* (1983)

[ReSi] REED, MICHAEL; SIMON, BARRY: Fourier Analysis, Self-Adjointness II. Methods of modern mathematical physics. *Academic Press New York San Francisco London* (1975).

[Sa] SAZONOV: Justification of the linearisation method in the flow problem. *Russian Acad. Sci. Izv. Math.* **45**, 315-337 (1995)

[Sc1] SCHONBEK, M. E.: L^2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **88**, 209-222 (1985)

[Sc2] SCHONBEK, M. E.: Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations. *Comm. Partial Differential Equations* **11**, 733-763 (1986)

[SiSo] SIMADER, CHRISTIAN G.; SOHR, HERMANN: The Dirichlet problem for the Laplacian in bounded and unbounded domains. *Pitman Research Notes in Mathematical Series Addison Wesley Longman Ltd. Harlow, Great Britain*.

[Shi] SHIBATA, Y.: On the global existence of classical solutions of second order fully nonlinear hyperbolic equations with first order dissipation in the exterior domain. *Tsukuba J. Math.* **7**, 1-68 (1983)

[ShiKo] KOBAYASHI, T.; SHIBATA, Y. : On the Oseen equation in the three dimensional domains. *Math. Annalen* **310**, 1-45 (1998)

[SWW] SOHR, H.; VON WAHL, W.; WIEGNER, M. : Zur Asymptotik der Gleichungen von Navier-Stokes. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* **II**, 45-59 (1986)

[Sol1] SOLONNIKOV, V.A. : Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations. *J. Soviet Math.* **8**, 467-529 (1977)

[Sol2] SOLONNIKOV, V.A. : Estimates for the solutions of a nonstationary linearized system of Navier-Stokes equations. *American Math. Soc. Transl.* **75**, 1-116 (1968)

[Sol3] SOLONNIKOV, V. A.: Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equation. *AN SSSR*, Vol. **38**, pp 153-231 (1973)

[Wahl1] VON WAHL, W.: Vorlesung über das Außenraumproblem für die instationären Gleichungen von Navier-Stokes *Sonderforschungsbereich 256, Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen, Vorlesungsreihe* **11** (1990)

[Wahl2] VON WAHL, W.: The Equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations *Aspects of Mathematics, Vieweg* (1985)

[WaSc] VON WAHL, W.; SCARPELLINI, B.: Stability properties of the Boussinesq equations. *Z. angew. Math Phys.* **49**, 294-321 (1998)

[WaS] VON WAHL, W.; SCHMITT, B. J.: Mean values and non-periodic pressure in convection problems between plates or with stress-free boundaries. *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. **185**, No. 2 (1998)

[Wi] WIEGNER: Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on $\mathbb{R}^n$. *J. London Math. Soc.*, Ser 2 **35**, 303-313 (1987)